目录

开篇、算法秘籍阅读指南

准备工作：安装刷题全家桶

- 算法可视化面板简介
- 配套 Chrome 刷题插件
- 配套 vscode 刷题插件
- 配套 JetBrains 刷题插件
- 番外：用算法打败算法
- 14 天刷题打卡挑战
- 面向新手的 Java 基础

无剑篇、刷题心法

- 学习算法和刷题的框架思维
- 计算机算法的本质

学剑篇、基础数据结构

- 1.1 数组/链表
    - 小而美的算法技巧：前缀和数组
    - 【强化练习】前缀和技巧经典习题
    - 小而美的算法技巧：差分数组
    - 双指针技巧秒杀七道链表题目
    - 【强化练习】链表双指针经典习题
    - 双指针技巧秒杀七道数组题目
    - 【强化练习】数组双指针经典习题
    - 滑动窗口算法核心代码模板
    - 【强化练习】滑动窗口算法经典习题
    - 二分搜索算法核心代码模板
    - 二分搜索题型套路分析
    - 【强化练习】二分搜索算法经典习题
    - 田忌赛马背后的算法决策
    - 链表操作的递归思维一览
- 1.3 队列/栈
    - 一文秒杀三道括号题目
    - 队列实现栈以及栈实现队列
    - 【强化练习】栈的经典习题
    - 【强化练习】队列的经典习题
    - 单调栈结构解决三道算法题
    - 【强化练习】单调栈的几种变体及经典习题
    - 单调队列结构解决滑动窗口问题

    - 【强化练习】单调队列的通用实现及经典习题
    - 一道数组去重的算法题把我整不会了

- 1.4 数据结构设计

    - 算法就像搭乐高：带你手撸 LRU 算法
    - 算法就像搭乐高：带你手撸 LFU 算法
    - 【强化练习】哈希表更多习题
    - 给我常数时间，我可以删除/查找数组中的任意元素
    - 一道求中位数的算法题把我整不会了
    - 二叉堆详解实现优先级队列
    - 【强化练习】优先级队列经典习题
    - 如何实现一个计算器
    - 【强化练习】更多经典设计习题

仗剑篇、进阶数据结构

- 2.1 二叉树

    - 东哥带你刷二叉树（纲领篇）
    - 东哥带你刷二叉树（思路篇）
    - 东哥带你刷二叉树（构造篇）
    - 东哥带你刷二叉树（序列化篇）
    - 东哥带你刷二叉树（后序篇）
    - 归并排序详解及应用

- 2.2 二叉搜索树

    - 东哥带你刷二叉搜索树（特性篇）
    - 东哥带你刷二叉搜索树（基操篇）
    - 东哥带你刷二叉搜索树（构造篇）
    - 东哥带你刷二叉搜索树（后序篇）
    - 快速排序详解及应用

- 【强化练习】手把手带你刷 100 道二叉树

    - 用「遍历」思维解题 I
    - 用「遍历」思维解题 II
    - 用「遍历」思维解题 III
    - 用「分解问题」思维解题 I
    - 用「分解问题」思维解题 II
    - 同时运用两种思维解题
    - 利用后序位置解题 I
    - 利用后序位置解题 II
    - 利用后序位置解题 III
    - 运用层序遍历解题 I
    - 运用层序遍历解题 II
    - 二叉搜索树经典例题 I
    - 二叉搜索树经典例题 II

- 2.3 图论
  - 图论基础
  - 拓扑排序
  - 二分图判定
  - Union-Find算法详解
  - Kruskal 最小生成树算法
  - Prim 最小生成树算法
  - 我写了个模板，把 Dijkstra 算法变成了默写题

霸剑篇、暴力搜索算法

- 3.1 DFS 算法/回溯算法
  - 回溯算法解题套路框架
  - 回溯算法团灭子集、排列、组合问题
  - 球盒模型：回溯算法的两种穷举视角
  - DFS 算法秒杀所有岛屿题目
- 3.2 BFS 算法
  - BFS 算法解题套路框架
  - 如何用 BFS 算法秒杀各种智力题

悟剑篇、动态规划

- 4.1 动态规划核心原理
  - 动态规划解题核心框架
  - base case 和备忘录的初始值怎么定?
  - 最优子结构和 dp 数组的遍历方向怎么定?
  - 动态规划的穷举视角：不同子序列问题
  - 算法时空复杂度分析实用指南
  - 算法笔试「骗分」套路
- 4.2 经典动态规划
  - 最长递增子序列问题
  - 最大子数组和问题
  - 编辑距离问题
  - 最长公共子序列问题
  - 正则表达式问题
- 4.3 背包问题
  - 0-1 背包问题
  - 完全背包问题
  - 子集背包问题
- 4.4 用动态规划玩游戏

- 团灭 LeetCode 股票买卖问题
- 团灭 LeetCode 打家劫舍问题
- 动态规划之博弈问题
- 动态规划之最小路径和
- 经典动态规划：高楼扔鸡蛋
- 动态规划帮我通关了《魔塔》
- 动态规划帮我通关了《辐射4》
- 旅游省钱大法：加权最短路径

开篇、算法秘籍阅读指南

在最开头先回答一个大家问的最多的问题：

东哥你太能写了，又是算法小抄，又是算法笔记，又是算法秘籍，又是纸质书，又是网站，又是课程，到底该怎么学？

好问题，随着我对算法教程的不断优化和完善，内容确实在一直更新，可能会给新来的读者造成困扰，所以在开头回答一下这个问题。

首先说一下《labuladong 的算法小抄》，这个名称是我在 2021～2022 年用来命名 PDF、纸质书、网站的，**所以无论是《算法小抄》的纸质书还是 PDF，你都可以理解为老版本，现在都不再建议学习了，因为有更好更全面的内容给你学**。

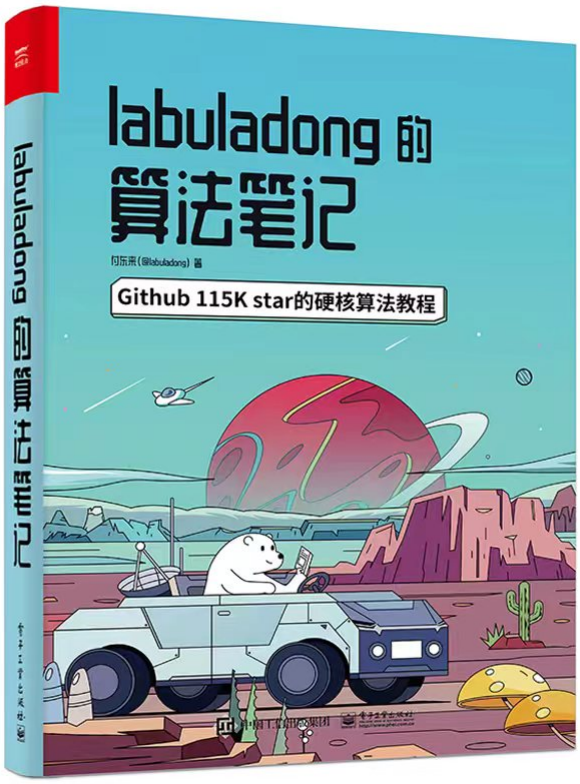
自 2024 年开始，你要学最新的内容有几个渠道：

最推荐的就是我的算法网站，最新地址是 https://labuladong.online/algo/，建议收藏。

因为网站的内容方便及时更新，而且我亲自开发很多实用的可交互功能，给你最丝滑完美的学习体验。我之前有推出过一些单独的付费课程，但是自 2024/3 开始，所有付费课程的内容都融合到了网站。所以我的唯一的付费项目就是 网站会员，购买后可以解锁我的所有内容和功能，没有其他付费项目了。

除了网站，如果你有学习 PDF 的需求，那么我有两本 PDF，一本是《labuladong 的算法秘籍》，另一本是《labuladong 的刷题笔记》。其中《labuladong 的算法秘籍》是从网站内容中摘选出的部分内容，可以理解成是一本教材，而《labuladong 的刷题笔记》是从刷题插件的题解思路中精选出来的，可以理解成是一本练习册。

除了网站，如果你有阅读纸质书的需求，我在 2023 年年底出的一本新书名为《labuladong 的算法笔记》，这本书可以理解为是《labuladong 的算法秘籍》对应的纸质书，其内容也是网站内容的精选。



那有读者肯定要说，既然纸质书对应的是《算法秘籍》PDF，为什么不直接把纸质书命名为《labuladong 的算法秘籍》，而是命名为《labuladong 的算法笔记》呢？这样不是徒增理解成本吗？

我肯定也和大家想的一样啊，《算法秘籍》PDF 火的一塌糊涂，纸质书如果和 PDF 同名，肯定可以带动纸质书的销售对吧，我何乐而不为呢？

其实根本原因是因为我国有相关规定，正规图书出版物名称中不能包含类似「秘籍」这样的字眼，没办法，当时给 PDF 起名的时候哪想得到这么多？所以最终决定给纸质书起名《算法笔记》，确实容易给不知情的读者造成困扰，所以就在这里阐明一下。

有阅读纸质书需求的读者，可以微信扫码查看介绍或购买：

由于对应的纸质书已出版，应出版社的要求，本 PDF 已删除了大部分内容，如果想学习完整的内容，请查看我的网站。

就先啰嗦这么多，相信大家已经理清了各个名称之间的关系了，如果你没有特殊的需求，直接在我的网站 https://labuladong.online/algo/ 学习就可以了，这也是我最推荐的学习渠道。

前言

我的 GitHub 算法仓库 目前已经快 100k star 了（如果你从我这学到了知识，希望你帮我点个 star），为了感谢大家一直以来的支持，我制作了刷题全家桶。

labuladong 的刷题全家桶 由学习网站、算法可视化工具、《算法秘籍》《刷题笔记》两本 PDF、Chrome/vscode/Jetbrain 三个不同平台的刷题插件组成，致力于为大家提供最丝滑的刷题体验。

这本 PDF 是《labuladong 的算法秘籍》，纸质书名为《labuladong 的算法笔记》。

其他的配套工具我会在第一章逐一详细介绍：

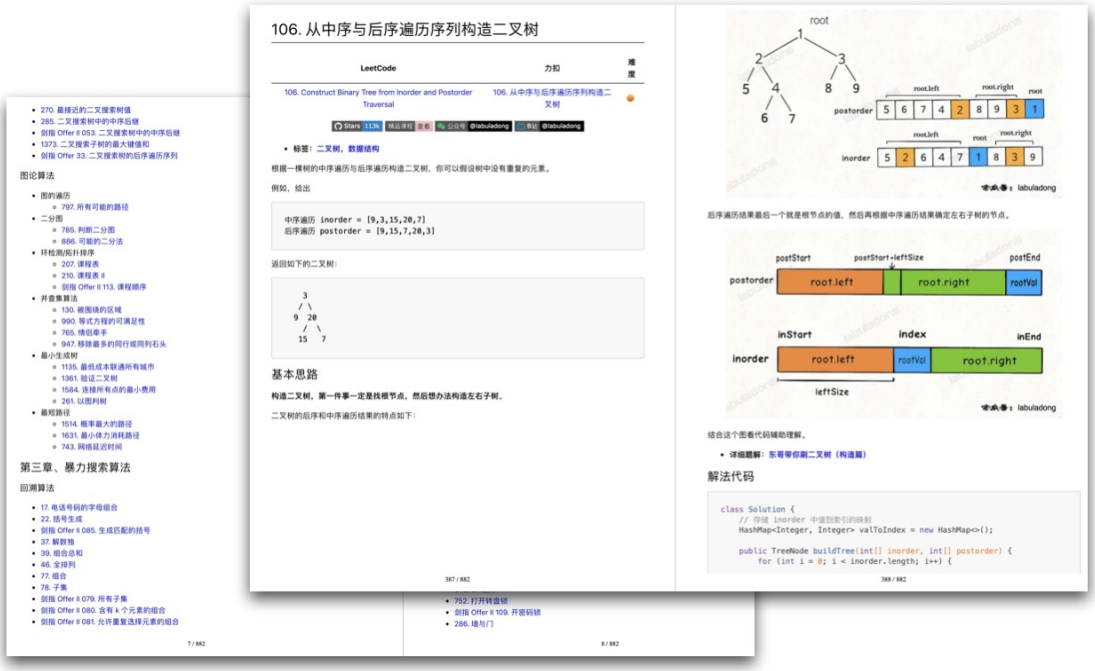
1. 播放/暂停按钮。点击后开始播放算法可视化过程，再次点击可暂停。
2. 上一步/减速按钮。非播放过程中点击可跳转到算法流程的上一步，播放过程中点击可放慢播放速度。
3. 下一步/加速按钮。非播放过程中点击可跳转到算法流程的下一步，播放过程中点击可加快播放速度。
4. 进度条，拖动可调整动画进度。
5. 点击可跳转到帮助页面。
6. 刷新按钮，可视化面板不显示或遇到 bug 时可尝试刷新。
7. 复制可视化面板的URL，方便分享。
8. 正在执行的代码会高亮显示。
9. 鼠标点击可直接快进到对应代码执行。
10. 变量区域，显示当前作用域内的变量及其值。
11. 数据结构区域，用于可视化复杂数据结构。
12. 函数堆栈区域，显示递归的堆栈情况及函数参数。

labuladong 网站地址：

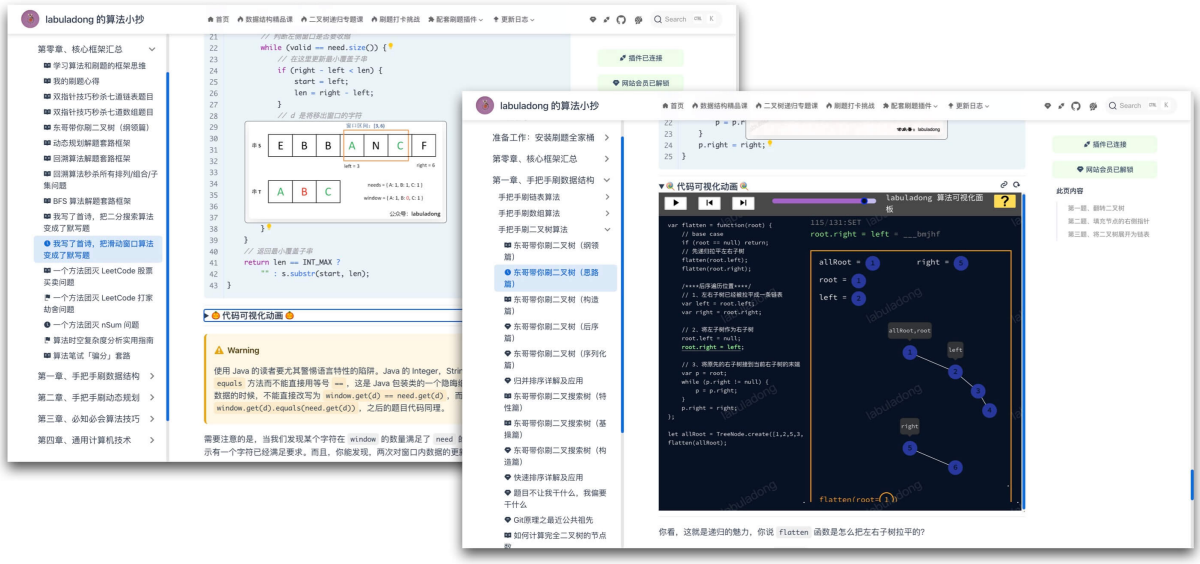
https://labuladong.online/algo/

你把前序位置的代码移到后序位置也可以，但是直接移到中序位置是不行的，需要稍作修改，这应该很容易看出来吧，我就不说了。

《labuladong 的算法笔记》：练习册，包含题目的简明思路，适合复习加深印象

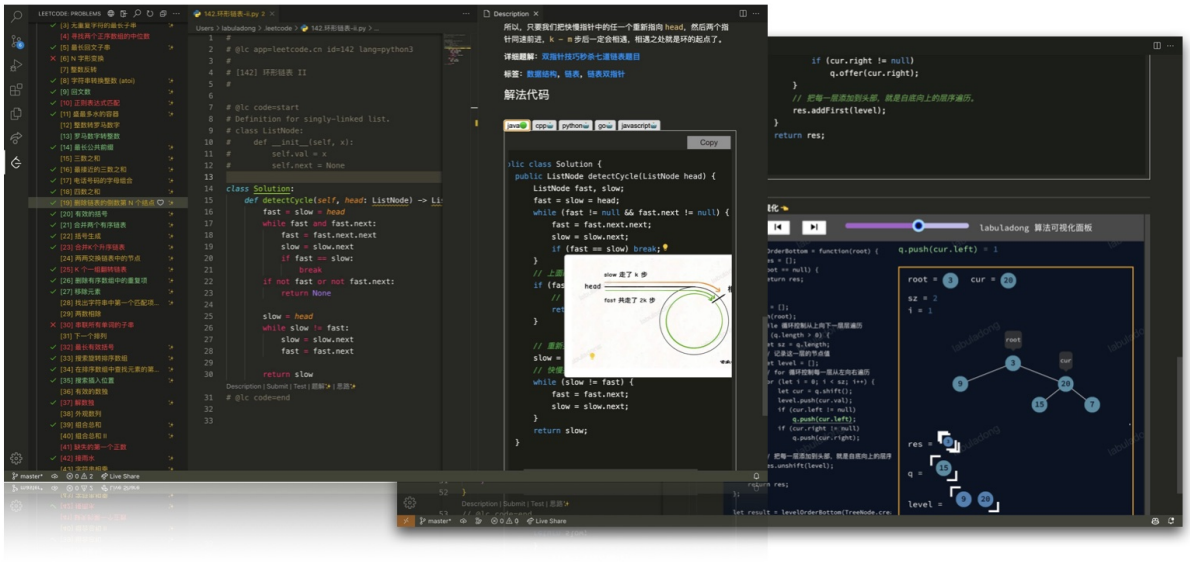


labuladong 的算法网站：汇总所有常见算法框架，支持算法可视化等实用功能

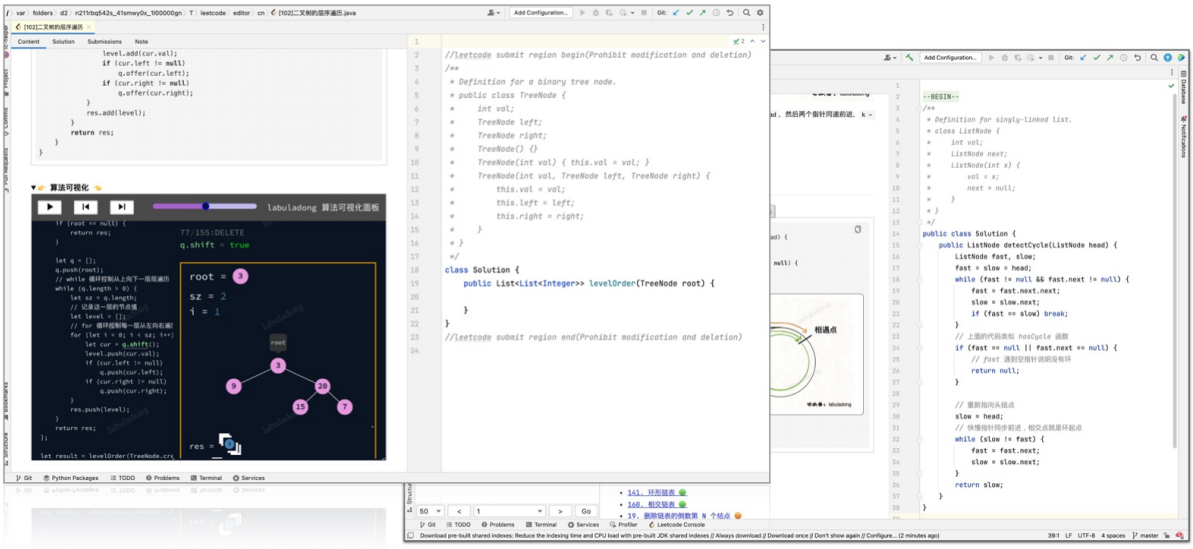


labuladong 的 Chrome 刷题插件：添加「思路」「题解」按钮，支持算法代码的可视化

labuladong 的 vscode 刷题插件：添加「思路」「题解」按钮，支持算法代码的可视化



labuladong 的 Jetbrains 刷题插件：添加「思路」「题解」按钮，支持算法代码的可视化



在我的公众号「labuladong」后台回复关键词「**全家桶**」即可获取下载和使用手册，而且你会发现 **PDF 和插件都有版本号，也就是说我一直在更新全家桶的内容**，修正错误或更新内容，所以你应该选择最新版本学习。

这本《算法秘籍》会详尽解析各种算法的原理和应用，可以理解成一本教材，而《刷题笔记》的灵感来源于「单词速记卡」的形式，其中只列出每到题目简明扼要的思路和参考解法，可以理解成一本练习册。

你可以在碎片化的时间翻看《刷题笔记》，像背单词一样背算法。至于这本《算法秘籍》，由于内容比较硬核，所以建议拿出整块的时间仔细阅读和思考，并亲手做题实践。

扫码关注我的公众号，后台回复关键词「**全家桶**」即可免费下载两本 PDF 和配套刷题插件。

算法秘籍目录结构

如果是金庸武侠小说的读者，应该熟悉《神雕侠侣》中杨过发现剑冢的情节，孤独剑魔一生练剑分为几个阶段：

第一阶段：青光利剑，凌厉刚猛，无坚不摧，弱冠前以之与河朔群雄争锋。

第二阶段：紫薇软剑，三十岁前所用，误伤义士不祥，悔恨无已，乃弃之深谷。

第三阶段：玄铁剑，重剑无锋，大巧不工。四十岁前恃之横行天下。

第四阶段：四十岁后，不滞于物，草木竹石均可为剑。自此精修，渐进于无剑胜有剑之境。

我给这本 PDF 起名「算法秘籍」是有理由的，我觉得学习算法的过程就好似孤独剑魔练剑：

第一阶段：虽然算法技巧的储备比较匮乏，刷题比较吃力，但每每遇到新的算法技巧，都会大呼精妙，学习的乐趣会抵消挫败感。

第二阶段：对常见的算法技巧都已有了一定的知识储备，却苦于无法自如运用这些技巧，看到一道算法题很难洞悉其本质，无法转化成自己熟悉的题型来解决。

第三阶段：各种算法技巧已比较纯熟，理解到计算机算法的本质即为穷举，看到一道题目，大致就知道要用什么技巧来解决。

第四阶段：随着持续刷题精进，通汇贯通，不只把算法当做面试的工具，进而将算法融入工作和生活，解决实际问题。

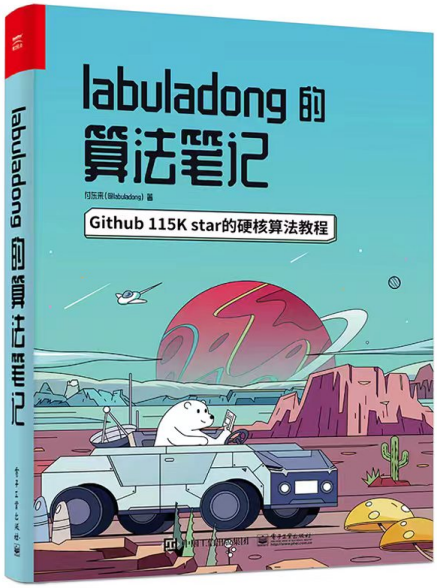
这本算法秘籍从这种算法的原理入手，可以帮你走到第三阶段，同时希望你能够爱上算法，持续修炼，达到第四层境界。

《labuladong 的算法秘籍》主要分为基础数据结构、进阶数据结构、暴力穷举算法、动态规划、其他经典算法几部分，

章节编号借鉴了《说剑》这款游戏中的几个关卡：学剑、仗剑、霸剑、朴剑、无剑，每个章节页的图片均来自《说剑》这款游戏的关卡截图，这样似乎更有点「秘籍」的味道了。

最后，我的公众号 labuladong 积累了很多高质量且通俗易懂的算法文章，这本 PDF 中只选择性地收录了一部分。

一方面因为 PDF 页数不宜过多，否则容易把人吓退，另一方面因为不能影响到纸质书《labuladong 的算法笔记》的销售：



另外，也建议关注我的微信视频号，我会尽量抽空直播，而且会在视频号积累学习算法的短视频，分享自己的学习经验：

准备工作：安装刷题全家桶

名称	最新版本号	详情
PDF 教材	V5.2	下载
刷题打卡挑战	开放报名	报名
网站会员	V已上线	购买
Chrome 刷题插件	V4.4.3	使用手册
vscode 刷题插件	V1.5.4	使用手册
JetBrains IDE 刷题插件	V1.8.6	使用手册

算法可视化面板简介

可视化面板编辑器已上线，可以在网页访问：

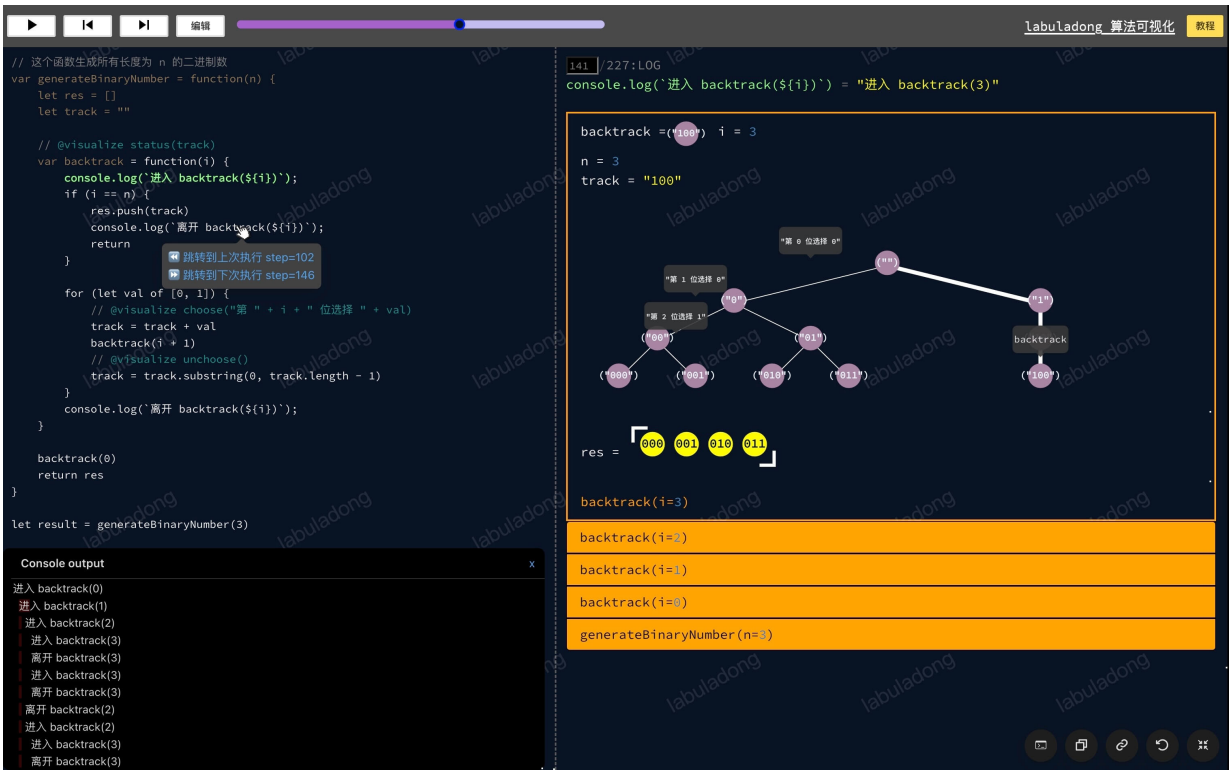
https://labuladong.online/algo-visualize/

另外，本站以及所有配套插件中嵌套的算法可视化面板也添加了「编辑」按钮，点击后即可直接修改并执行你的代码进行可视化。

目前可视化面板只支持 JavaScript 代码。如果你阅读可视化面板中的 JavaScript 代码有困难，我专门写了一个使用可视化面板的 极简 JavaScript 教程，帮助你 5 分钟上手。

希望你能看到本文的最后，因为在最后一部分，我会结合具体的算法题场景教给你使用可视化面板的实用技巧，手把手带你利用这些技巧高效分析题目和算法的执行过程。等你认识到可视化面板的强大之处，你就会发现它能巨幅提升你对算法的理解深度。

基本用法



顶部主要是一些控制按钮和滑动条，可以控制代码执行。

左侧是代码面板，当前执行到的代码行会高亮显示，**点击代码可以直接跳转执行**。

点击代码跳转执行的功能是最常用的。

一般我们不会从头开始一步步播放算法的执行，而是直接点击代码跳转到某个感兴趣的位置，然后再一步步执行，观察算法的执行过程。

点击顶部的「编辑」按钮后，左侧代码面板会变成编辑器，你可以直接修改代码并运行。

右侧是可视化区域，用来显示变量的值并可视化数据结构。

左下角是 Log Console，如果你的代码中使用了 `console.log`，输出内容会被打印在这里。

右下角有一些悬浮按钮，提供刷新面板、全屏显示、显示/隐藏 Log Console 等功能。

了解这些就足够你玩转可视化面板了，你可以在这两个面板上玩一玩点一点，尝试一下这些功能。

▶ 👾 代码可视化动画👾

▶ 🌈 代码可视化动画🌈

后面的内容主要是可视化编辑器的功能，用于执行你自己的代码。

数据结构的可视化

面板可以可视化数组、链表、二叉树、哈希表、哈希集合等常见数据结构，下面具体介绍一下如何创建这些数据结构。

标准库数据结构

类似数组、哈希表等 JavaScript 内置的数据结构，就正常初始化和操作它们即可，比如：

▶ 👾 代码可视化动画👾

需要着重讲的是 力扣/LeetCode 中一些特殊的数据结构，比如单链表 `ListNode` 和二叉树 `TreeNode`，它们的基本定义和用法和力扣上一样，下面提供一些例子。

单链表

首先说一下单链表，单链表的每个节点有 `val, next` 属性，和力扣上的定义完全一致：

```
// 单链表节点的定义
// 此类型已经内置，可以直接使用，不需要你再进行声明
function ListNode(val, next) {
    this.val = (val===undefined ? 0 : val)
    this.next = (next===undefined ? null : next)
}
```

你可以用 `ListNode.create` 方法快速创建一条单链表，这是一个简单的例子：

▶ 🌈 代码可视化动画🌈

双链表

双链表的每个节点有 val, prev, next 属性，构造函数和力扣完全一致：

```
// 双链表节点的定义
// 此类型已经内置，可以直接使用，不需要你再进行声明
function DoubleListNode(val, prev, next) {
    this.val = (val===undefined ? 0 : val)
    this.prev = (prev===undefined ? null : prev)
    this.next = (next===undefined ? null : next)
}
```

你可以用 DoubleListNode.create 方法快速创建一条双链表，或者手动组装双链表。这是一些简单的例子：

▶ 👾 代码可视化动画👾

二叉树

再说一下二叉树，二叉树每个节点有 val, left, right 属性，构造函数和力扣保持一致：

```
// 二叉树节点的定义
// 此类型已经内置，可以直接使用，不需要你再进行声明
function TreeNode(val, left, right) {
    this.val = (val===undefined ? 0 : val)
    this.left = (left===undefined ? null : left)
    this.right = (right===undefined ? null : right)
}
```

你可以用 TreeNode.create 方法快速创建一棵二叉树。注意我们用列表来表示二叉树，表示方式和 力扣题目中表示二叉树的方式 相同，这里举两个例子：

▶ 👾 代码可视化动画👾

每个二叉树节点有 val, left, right 属性，和力扣上的定义完全一致。

多叉树

多叉树的每个节点有 val, children 属性，构造函数和力扣完全一致：

```
// 多叉树节点的定义
// 此类型已经内置，可以直接使用，不需要你再进行声明
function Node(val, children) {
    this.val = val;
    this.children = children;
}
```

你可以用 `Node.create` 来创建多叉树，大家主要注意一下多叉树的表示方法，我们还是用列表来表示多叉树，使用层序遍历的顺序，并用 `null` 来分割每组子节点。具体可以参考这道力扣题目 429. N 叉树的层序遍历 的示例。

▶ 🌈 代码可视化动画🌈

每个多叉树节点有 `val, children` 属性，和力扣上的定义完全一致。

变量隐藏和作用域提升

使用 `@visualize global` 可以将变量的作用域提升到全局，这样，一些闭包变量就可以一直显示在右侧的可视化面板中。

使用 `@visualize hide` 可以隐藏变量，这样，你可以把一些无关的数据结构隐藏起来，避免右侧可视化面板过于拥挤。

用一个例子说明上面这两种注释的用法。比如说我想实现一个简单的 `Stack` 类，实现栈的 `push, pop, peek` 三个方法，我可以利用 JavaScript 函数的闭包这样来写：

▶ 👾 代码可视化动画👾

但是拉到最后一步可以看到，`stack` 这个变量一直作为一个 Object 存在于右侧的可视化面板中，并没有什么实际意义，还占很大的地方。

其实我们更关心的是那个 `items` 变量，因为我们可以观察这个数组中元素变化的情况以了解 `push, pop` 方法是如何工作的。

然而由于 `items` 是在 `Stack` 函数内部声明的变量，所以当代码在函数体之外执行时，`items` 变量不在当前的作用域，所以右侧面板也不会把它可视化出来。

对于这种情况，我们可以使用 `@visualize global` 注释将 `items` 变量提升到全局作用域，然后用 `@visualize hide` 注释让 `stack` 变量在右侧面板中隐藏。

这样就可以达到我们想要的效果。请你点击 `stack.push(1);` 这行代码并往下执行，可以看到 `stack` 变量不会再出现，且 `items` 数组的更新过程会显示在右侧：

▶ 🎃 代码可视化动画🎃

递归过程的可视化（可选）

> 新手可以跳过这部分内容。
>
> 等你学过了二叉树章节或动归/回溯的章节，且需要可视化自己的递归函数时，这部分内容才会被用到。

递归算法是很多读者头痛的，我之前写过一篇 从树的角度理解一切递归算法，从理论上抽象出了递归算法最基本的思维模型和编写技巧。

简单来说就是：**把递归函数理解成递归树上的一个指针，回溯算法是在遍历一棵多叉树，并收集叶子节点的值；动态规划是在分解问题，用子问题的答案来推导原问题的答案。**

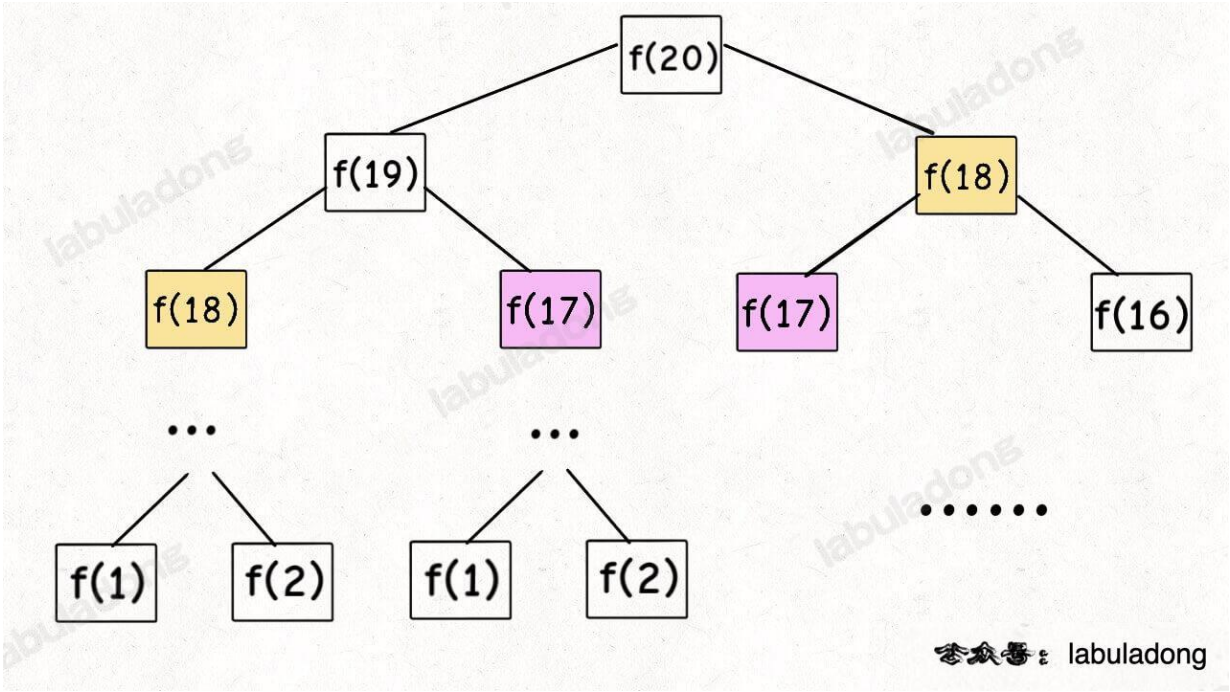
现在，我把文章中所阐述的思维模型融入了算法可视化面板，一定可以让你更直观地理解递归算法的执行过程。

对于递归算法，`@visualize status`，`@visualize choose` 和 `@visualize unchoose` 这几种注释可以帮到大忙，下面一一介绍。

`@visualize status` 举例

一句话，`@visualize status` 注释可以放在需要可视化的递归函数的上方，用来控制递归树上节点的值。

看个最简单的例子，我在讲解 动态规划算法核心框架 时画出了斐波那契问题的递归树，上层规模较大的问题逐渐被分解：



如何描述算法运行的过程？递归函数 `fib` 就好像递归树上的一个指针，它不断把原问题分解成子问题，当问题分解到 base case（叶子节点）时，开始逐层返回子问题的答案，推导出原问题的答案。

结合 `@visualize status` 注释，可以很直观地看到这个过程。下面这个面板是斐波那契算法运行的第 27 步，正在试图计算 `fib(3)` 的值：

▶ 👾 代码可视化动画👾

`@visualize status` 注释写在 `fib` 函数上边，具体含义是：

1、对这个 `fib` 函数开启递归树可视化功能，每次递归调用会被可视化为递归树上的一个节点，函数参数中的 `n` 的值会作为状态显示在节点上。

2、`fib` 函数被视为一个遍历这棵递归树的指针，处于堆栈路径的树枝会加粗显示。

3、如果函数有返回值，那么当函数结束，计算出某个节点返回值时，鼠标移动到这个节点上，会显示该返回值。

1、定义函数时，必须使用 `var fib = function(n) { ... }` 的方式，不要使用 `function fib(n) { ... }` 或者箭头函数 `var fib = (n) => { ... }` 的方式，否则无法追踪递归过程。

2、`@visualize` 注释必须写在函数定义的上一行，否则无法追踪递归过程。

> 请你在步数栏输入 27 并敲回车，就可以跳转到第 27 步。把鼠标移动到节点 `(2)` 上，可以看到 `fib(2) = 1`，这说明 `fib(2)` 的值已经被计算出来了。
>
> 而处在递归路径上的 `(5),(4),(3)` 节点，它们的值还没被计算出来，你把鼠标移动上去也不会显示返回值。

> 请你尝试点击可视化面板的前进后退按钮，让算法向后运行几步，理解动态规划算法的递归树生长过程。

> 待到整棵递归树遍历完成之时，就是原问题 `fib(5)` 被计算出来之日，那时候整棵递归树上的所有节点都会显示返回值。
>
> 请你尝试拉动进度条到最后，看看这棵递归树的样子，并把鼠标移动到各个节点上，看看显示什么。

前面展示的斐波那契解法代码没有添加备忘录，是一个指数级时间复杂度的算法，现在我们来体验一下添加备忘录之后会对整棵递归树的生长产生什么影响。

> 👇 请你拉动进度条到算法的最后，看看递归树长什么样子。

▶ 🌈 代码可视化动画🌈

> 👇 这是一个带备忘录优化的版本，请你拉动进度条到算法的最后，看看递归树长什么样子，和不带备忘录优化的递归树进行对比。

▶ 🌈 代码可视化动画🌈

这样把整棵树可视化出来，你是不是就能很直观地理解动态规划通过备忘录消除重叠子问题的原理了？

`@visualize choose/unchoose` 举例

一句话，`@visualize choose/unchoose` 注释分别放在递归函数调用之前和之后，控制递归树树枝上的值。

我编一个简单的回溯算法的题目吧，比如让你写一个 `generateBinaryNumber` 函数，生成长度为 `n` 的二进制数，比如 `n = 3` 时，生成 `000, 001, 010, 011, 100, 101, 110, 111` 这 8 个二进制数。

这道题的解法代码也不复杂，我来展示一下如何用 `@visualize choose/unchoose` 注释来可视化回溯过程的：

▶ 🎃 代码可视化动画🎃

你可以把鼠标移动到递归树上的任意节点，就可以显示出从根节点到该节点的路径上的所有信息。

你结合这棵递归树去理解递归算法的代码，是不是就很直观了？

场景练习题

下面我会结合具体的算法题目，向你提问，要求你利用可视化面板高效分析题目和算法的执行过程。我会给出问题的答案，你可以先自己思考，然后再看我的解答。

这部分主要用到的是可视化面板的「执行到指定代码位置」的功能：你可以点击代码的某一部分，然后算法就会执行到那里，并将执行过程可视化。**这个功能用得好，可以大幅提升你对算法的理解**。

热身

首先，我带大家熟悉一下「执行到指定代码位置」的功能，在之前展示的单链表成环算法中，我其实已经带你用过了，我让你不断点击代码中的 `if (slow === fast)` 这一行，观看快板指针的追逐过程：

▶ 🥰 代码可视化动画🥰

为什么点击这部分就可以展示快慢指针的追逐呢？因为执行这部分代码时，`fast, slow` 指针刚刚移动完毕，所以点击这里，可以看到它们最完整的移动过程。

在下面的练习中，请你着重思考代码执行到某一部分时算法的状态，这样你就能更好地利用可视化面板，精确地控制算法的执行。

场景一：二叉树的前中后序遍历

▶ 🥰 代码可视化动画🥰

> 上面这段代码是二叉树前中后序遍历，相信大家都不陌生。
>
> 请你点击播放按钮，查看这段代码的执行流程。播放时，上一步/下一步按钮将变成加速/减速按钮，用来调整播放速度。

你可以看到，二叉树将会被可视化出来，`root` 变量就好像一个指针，在二叉树上游走。我希望你能够使用「执行到指定代码位置」的功能，点击代码中的合适位置，精确控制 `root` 指针的移动顺序。

1、把面板复位，让 `root` 指针按照前序顺序访问整棵二叉树，即 `root` 指针按照 `1,2,4,3,5,6` 的顺序遍历二叉树。

2、把面板复位，`root` 指针按照中序顺序访问整棵二叉树，即 `root` 指针按照 `2,4,1,5,3,6` 的顺序遍历二叉树。

3、把面板复位，`root` 指针按照后序顺序访问整棵二叉树，即 `root` 指针按照 `4,2,5,6,3,1` 的顺序遍历二叉树。

这几个问题不难：

1、不断点击 `preorderResult.push(root.val)` 这部分代码。

2、不断点击 `inorderResult.push(root.val)` 这部分代码。

3、不断点击 `postorderResult.push(root.val)` 这部分代码。

场景二：观察递归树的生长

👇 这是刚才讲到的不带备忘录的斐波那契算法，现在请结合你对递归树的理解，点击代码中的合适位置，使得每点击一次，递归树就向下生长一个节点，直到递归树完全长成。

▶ 🍭 代码可视化动画🍭

你可以不断点击代码中 `if (n < 2)` 这一行，观察递归树的生长过程。

为什么点击这部分就可以展示递归树的生长过程呢？因为这部分代码是递归函数的 base case，每次递归必然都会执行这个判断逻辑，而递归树的每个节点其实就对应着每次递归，所以点击这个 if 语句就可以看到递归树上节点的生长过程。

这是一个非常常用的技巧，可以用来观察递归过程。

场景三：快速获得一个穷举结果

👇 这是前文展示的全排列算法的可视化面板，在场景二中你观察了斐波那契问题的递归树生长，现在请你点击代码中的合适位置，观察全排列问题的递归树生长。

▶ 🌈 代码可视化动画🌈

这个很简单，不断点击 `if (track.length === nums.length)` 这部分代码即可观察递归树的生长。

将面板复位。

现在，我不想看递归树一个一个节点地生长了，没什么意思，我希望你点击代码中的合适位置，每点击一次，递归树就生长出一条「树枝」。

这是个回溯算法中很常见的场景哦，因为每条「树枝」的末端是叶子节点，而叶子节点一般就存储这回溯算法穷举出来的一个结果。比如你看这道题，每条树枝末端的叶子节点就是一个排列结果。

不断点击 `res.push([...track])` 这部分代码，每次点击，回溯树都将生长出一条「树枝」。

因为叶子节点其实就是递归树结束生长的节点，即 `backtrack` 函数的 base case。那么我们只要点击 base case 中的代码，就可以直接跳到递归树的叶子节点，也就相当于生长出了一条树枝。

场景四：理解自顶向下/自底向上两种思维模式

我在 动态规划核心框架 中讲过，自顶向下用 memo 备忘录的递归解法和自底向上用 dp 数组的迭代解法本质上是一样的，dp 数组中的值和 memo 备忘录中的值完全一样，两种解法可以互相转化。

下面我将同时给你自顶向下的递归解法和自底向上的迭代解法，请你完成如下题目：

1、在自顶向下递归解法的面板上，点击代码的合适位置，使得每次点击都在 memo 中更新一个元素。

2、在自底向上迭代解法的面板上，点击代码的合适位置，使得每次点击都在 dp 中更新一个元素。

3、对比两个解法中 dp 数组和 memo 数组的更新，理解自顶向下的递归解法和自底向上的迭代解法本质上是相同的。

▶ 🍭 代码可视化动画🍭

▶ 🥳 代码可视化动画🥳

1、在自顶向下递归解法的面板上，每次点击 `memo[n] = dp(memo, n - 1) + dp(memo, n - 2)` 这部分代码，都会在 memo 数组中更新一个元素。

2、在自底向上迭代解法的面板上，每次点击 `dp[i] = dp[i - 1] + dp[i - 2]` 这部分代码，都会在 dp 数组中更新一个元素。

3、结合可视化面板应该不难理解，不过你会发现 `memo[1]` 和 `dp[1]` 的值不一样，那是因为我们把 `dp[1]` 作为 base case 设置了初始值，而递归解法中的 base case 是直接 return 的，并不需要设置在 memo 中。

配套 Chrome 刷题插件

> labuladong 的刷题全家桶 由学习网站、《算法秘籍》《刷题笔记》两本 PDF、Chrome/vscode/Jetbrain 三个不同平台的刷题插件组成，致力于为大家提供最丝滑的刷题体验。公众号后台回复关键词「**全家桶**」即可获取下载和使用手册。

> 虽然我叫这款插件为「Chrome 插件」，但实际上插件并不仅限于 Chrome 浏览器安装使用。像 Edge 浏览器、360 浏览器这些使用 Chromium 内核的浏览器都可以安装，具体见安装指南。

视频介绍

最近录了一个视频介绍 Chrome 插件的主要功能，喜欢看视频的读者可以去 B 站观看：

为什么要安装我的 Chrome 插件

建议我的读者都安装我的 Chrome 刷题插件，它的主要功能是在力扣和 LeetCode 的页面上添加「题解」和「思路」按钮，方便你跳转查看我的算法文章和解题思路：

labuladong 的 Chrome 刷题插件：添加「思路」「题解」按钮，支持算法代码的可视化

肯定有小伙伴问，力扣不是有题解和评论区吗？为啥还要安装你的这个插件呢？

首先，我建议你装插件，又没有说不让你学习别人的解法对吧，咱们多方学习，勤于思考，没毛病。

不过我的插件确实有它独特的价值。我先问一句，你是否有这样的困惑：看到新的算法技巧会大呼精妙，以为自己学会了，但下次换个题目，还是做不出来。

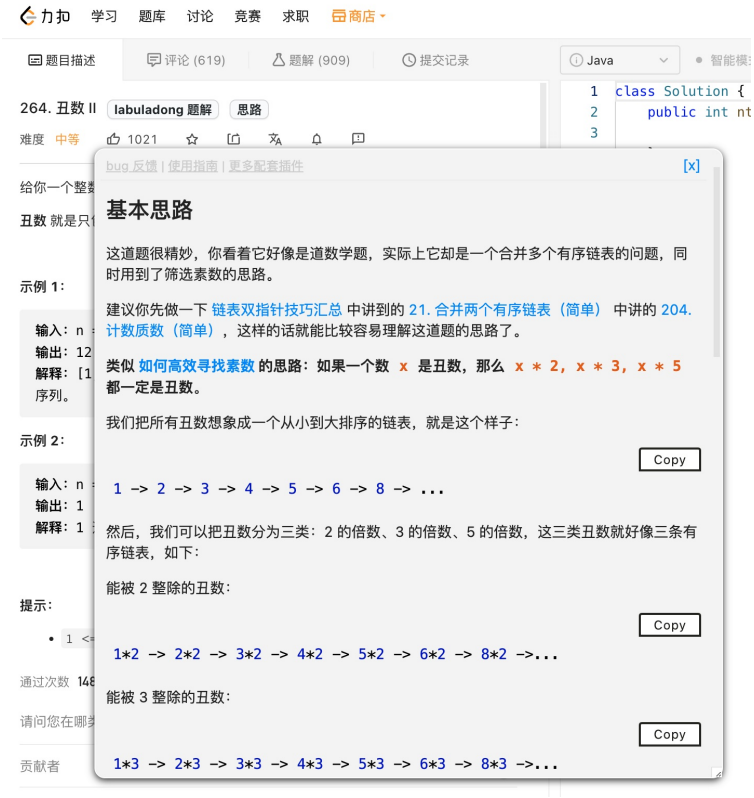
如果有，我告诉你为啥，因为人家给你看的只是最后的解法，一般不会给你讲清楚各个算法技巧之间的联系。

比方说，这个技巧 C 可能是技巧 B 和技巧 A 结合衍生出来的，人家只告诉你技巧 C 是什么，你直接从零开始接触 C 就会觉得这个思路不可能是普通人想出来的，甚至产生对算法的畏惧心理，更别说举一反三了。

但实际上，如果你能由浅入深，先了解 A 和 B，再接触 C，就不会觉得 C 有多了不起，你自己也可以推导出来，甚至你能随意变化 C 去解决更多新的的算法题。

我的文章和思路是经过精心设计浑然一体的，每道题的思路中会引用所有相关的技巧，插件可以保证你看到一道题，都可以寻根溯源由浅入深地学习到对应的算法技巧以及思维方法。

比如「丑数 II」这道题目：



乍一看这像是一道数学题，但实际上它掺杂了 高效寻找素数 中讲到的筛数法和 单链表的六大解题套路 讲到的单链表合并的技巧，我在插件中不仅给出了文章的链接，还给出了对应题目的链接，你可以去点击应题目的「思路」按钮对比题目之间的相似之处。

另外，很多小伙伴不是说看到题目没有思路，不知道从何下手吗？我会如实地分享我的思考过程，以及我这么想的依据是什么。虽然少数时候我的方法不是最优的，但我的方法一定是最「模板化」的。这种模板化的思考过程能够大幅提高初学者学习算法的效率：

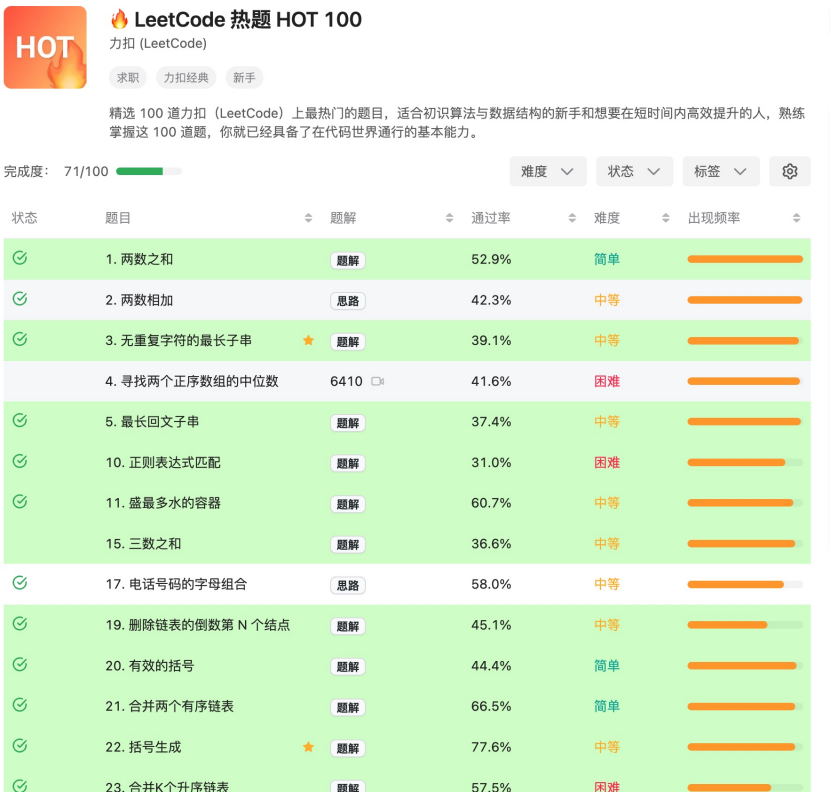
这就是我的刷题插件独有的价值，相当于我给你打造了一套完整的刷题工具链，如果你认可我算法教程的质量，那么使用我开发的配套工具，显然能给你提供最好的学习体验。

功能展示

总览

题目列表渲染

力扣 or LeetCode 的所有题目列表和题目详情页中会显示我的题解/思路按钮，支持所有常用编程语言：



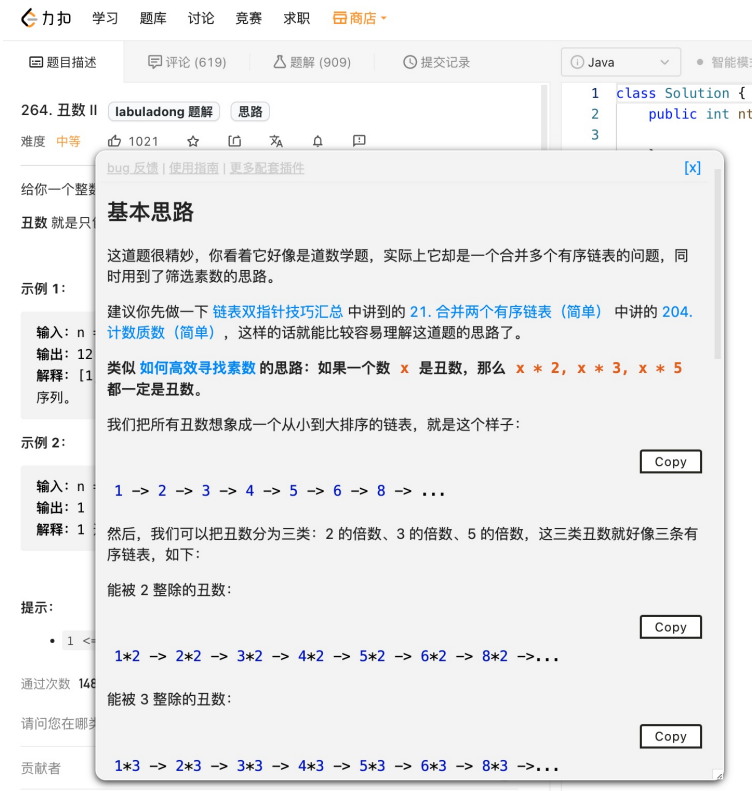
点击「题解」按钮即可跳转到网站对应文章学习，点击「思路」按钮即可查看我精心撰写的简明解题思路和代码。

同时，我把公众号里所有我讲过的题目整理出一份列表，安装插件后访问可以看到效果：

力扣版	LeetCode 版
https://leetcode.cn/problem-list/59jEaTgw/	https://leetcode.com/list/9zwo3ww5/

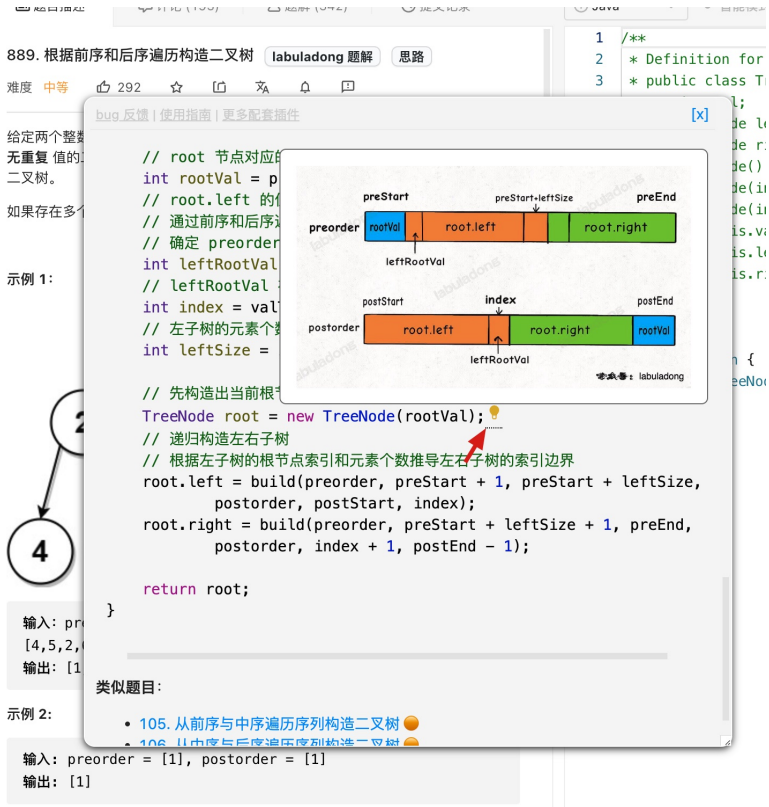
思路/题解辅助刷题

题目详情页也会显示题解和思路按钮，可以直接复制带详细注释的代码，刷题非常方便：



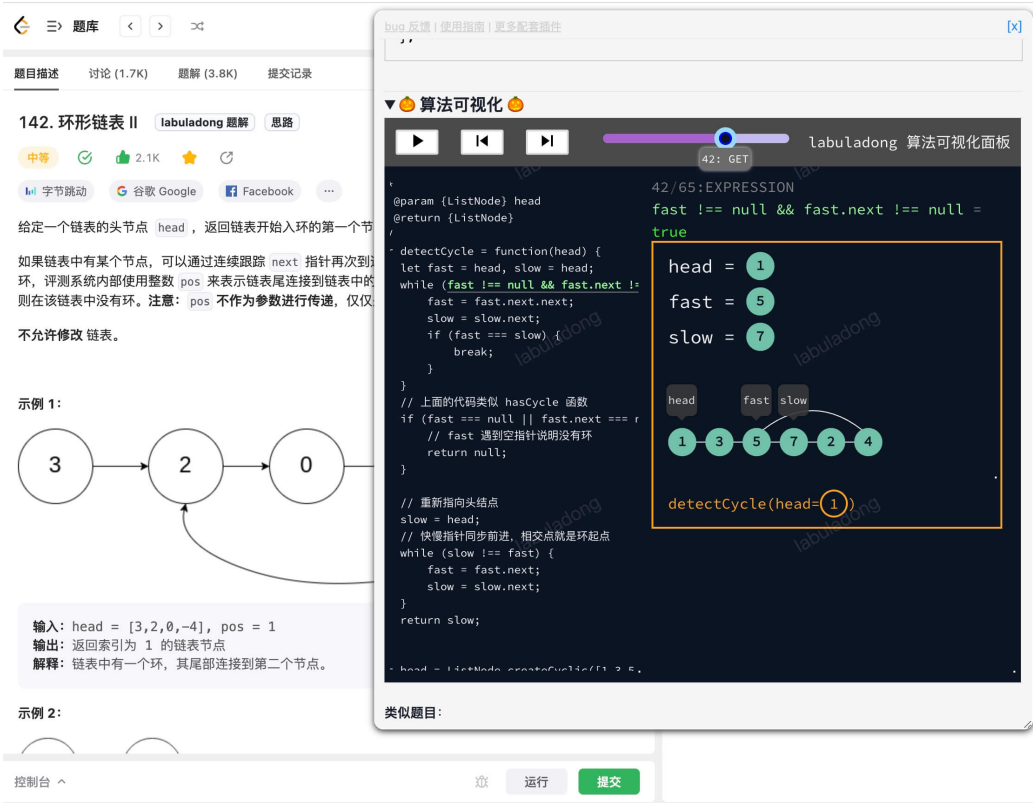
代码图片注释

对于比较复杂的解法，代码中会包含图片注释，方便理解代码逻辑。鼠标移动到小灯泡图表即可查看图片注释：



算法可视化面板

「思路」展开后，解法代码下方会显示一个可交互的算法可视化面板，帮助理解算法的执行过程：



可视化面板的具体功能请参考 算法可视化面板简介。

安装方式

Chrome 刷题插件不止支持 Chrome 浏览器，像 Edge 浏览器、360 浏览器这些使用 Chromium 内核的浏览器都可以通过离线安装 crx 文件的方式安装。

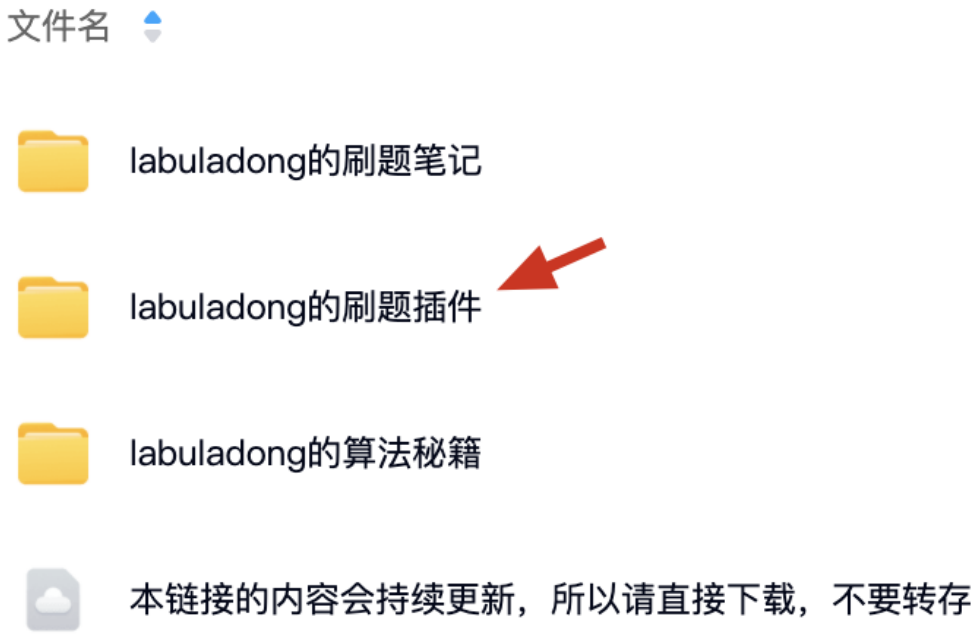
Chrome 浏览器用户有条件的话建议直接在 Chrome 商店下载：

https://chrome.google.com/webstore/detail/leetcode-helper-by-labula/elafhogmnaapleckojedgipgmidneccg

Edge 浏览器用户可以直接在 Edge 商店下载（国内也可以访问）：

https://microsoftedge.microsoft.com/addons/detail/leetcode-helper-by-labula/mgfjpejofejdbnillfolnnjbiefpokln

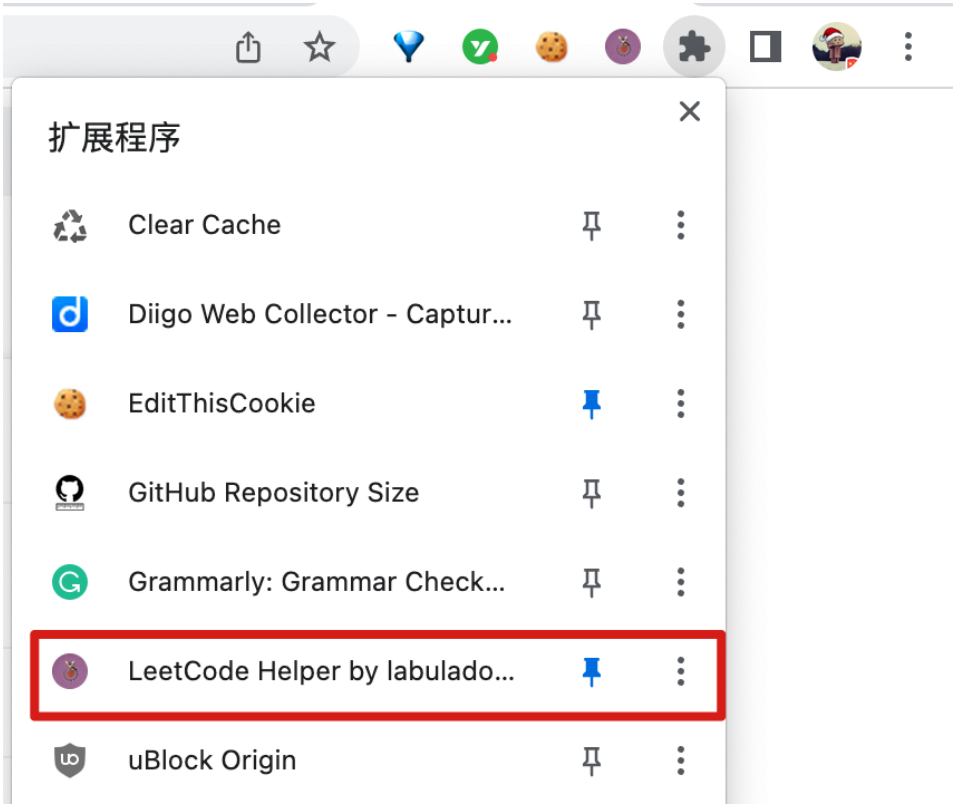
如果无法在线安装，也可以离线安装。在公众号后台回复关键词「插件」下载最新版本 crx 文件：



有了 crx 插件文件，手动安装的方法在网上一搜一大把，我就随便贴一个吧：

https://cloud.tencent.com/developer/article/1894180

安装成功后，可以在插件列表看到插件图标：



点击插件图标可以弹出插件弹窗，包含刷新数据的按钮和很多有用的链接：

更新方式

1、在 Chrome/Edge 商店安装的，会在新版本发布后自动更新。

2、通过 crx 文件离线安装的，我会在发布新版本之后更新百度网盘中的 crx 文件，所以你只需要重新在公众号后台回复关键词「插件」即可下载最新版本插件，再次安装即可。建议将插件固定在插件栏，有更新时会有 new 的提示字样。

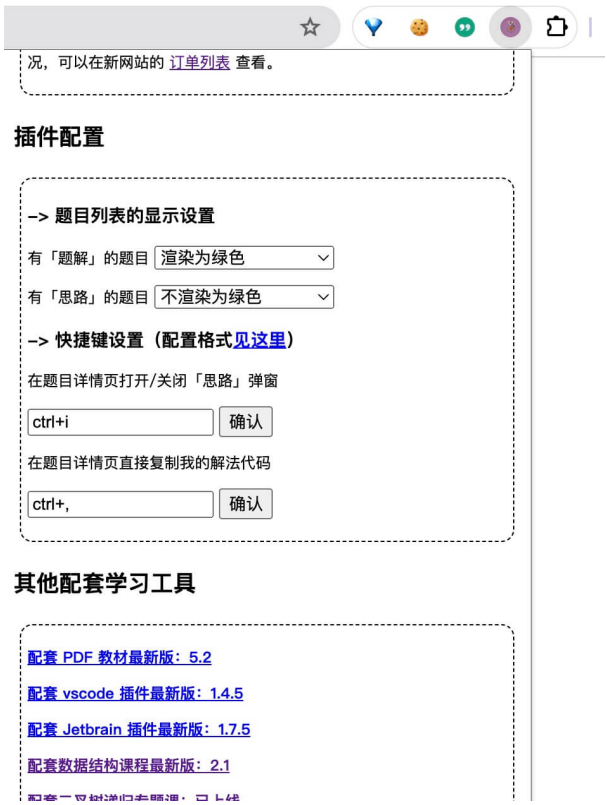
> 任何时候，都推荐你使用最新版本的插件，因为我会不断优化插件的功能，修复 bug，所以如果你遇到了问题，也许更新到最新版本就能解决。

更新日志

详见 Chrome 插件更新日志。

插件配置方法

点击插件图标打开插件弹窗，下滑即可看到配置选项：



列表渲染设置可以选择是否把题目列表中有题解/思路的题目行渲染成绿色。

在题目详情页，可以使用自定义快捷键快速打开/关闭思路弹窗和复制解法代码。

常见问题的回复

安装插件后没有效果？

主要原因可能是网络问题，导致插件拉取初始数据时较慢。可以稍等一会儿，或者点击「手动刷新数据」按钮：

等待数据拉取完成后再尝试刷新网页，应该就能看到题解和思路按钮了。

无法成功刷新插件数据（显示 ❌ 标记）？

如果点击「手动刷新数据」也没有反应或全部显示 ❌ 标记，大概率是你的网络问题。「手动刷新数据」按钮右侧有一个下拉框，默认选项为 `Auto`，即插件会根据网速自动选择 GitHub 或 Gitee 拉取数据。

如果你的网络情况不稳定，可以尝试自己修改下拉框选项，选择 GitHub 或 Gitee，然后再点击「手动刷新数据」按钮，直到出现 ✅ 标记为止。

火狐浏览器可以安装吗?

不支持，因为火狐浏览器用的不是 chromium 内核。以前还有办法安装，但现在 chromium 内核接口升级了，所以除非火狐官方适配，否则无法安装 Chrome 插件。

macOS/Linux/Windows 都能安装吗?

是的，插件是寄生在浏览器里的，和操作系统无关。只要在你的操作系统安装 chromium 内核的浏览器，就能够正常安装使用插件。

插件会「读取和更改我在 xxx 网站上的数据」？

实际上插件不会读取你的任何账户信息，而是插件需要读取该网站的页面 HTML，结果 Chrome 浏览器给了这么一句很容易让人误会的提示语。

借此机会科普一下，Chrome/Edge 商店上架都要经过严格的审核的，如果有恶意插件，根本上不了架，要知道国外对隐私的保护可是比国内强得多。

另外，关于权限申请这块我是很规范的，仅仅申请几个必须的网站权限，所以如果更新的时候需要新权限，Chrome 都会提醒你；不规范的做法是直接用通配符 `https://*` 申请所有网站的权限，这样每次需要新权限

的时候也不会提醒你，但回头你也搞不清这个插件会在哪些网站上干什么事情。

所以下载插件一定要从正规的渠道下载，我的刷题插件的正规下载渠道目前只有 Chrome/Edge 商店，或者通过公众号后台的链接下载 crx 离线安装，其他的渠道很可能有安全问题。

bug 反馈

请转到我的 GitHub Discussion，查看一些常见问题的解决方案，如确定遇到 bug，按规则截图反馈：

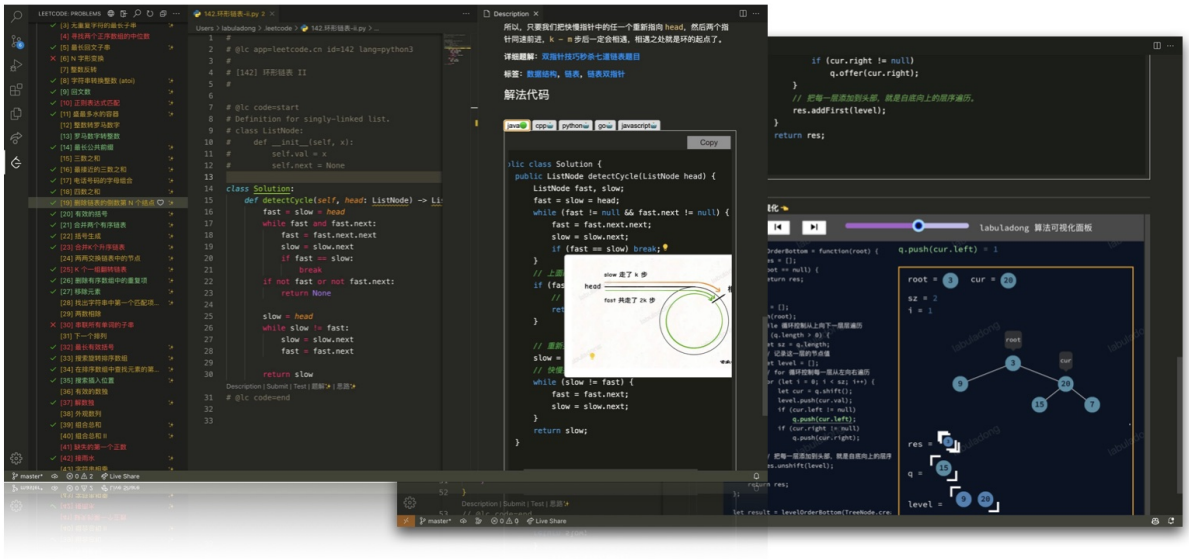
https://github.com/labuladong/fucking-algorithm/discussions/704

配套 vscode 刷题插件

> labuladong 的刷题全家桶 由学习网站、《算法秘籍》《刷题笔记》两本 PDF、Chrome/vscode/Jetbrain 三个不同平台的刷题插件组成，致力于为大家提供最丝滑的刷题体验。公众号后台回复关键词「**全家桶**」即可获取下载和使用手册。

由于我的 Chrome 刷题插件 收到很多小伙伴的好评，不过有的小伙伴反馈不喜欢在网页刷题，所以我就开发了 vscode 刷题插件，提供和 Chrome 插件类似的功能，大家可以在 vscode 中刷题。

labuladong 的 vscode 刷题插件：添加「思路」「题解」按钮，支持算法代码的可视化



视频介绍

最近录了一个视频介绍 vscode 插件的主要功能，喜欢看视频的读者可以去 B 站观看：

使用方法

基础功能

本插件是我基于 LeetCode 官方的开源插件改写的：

https://github.com/LeetCode-OpenSource/vscode-leetcode

所以本插件包含官方插件所有的功能，比如 LeetCode/力扣 账号的登录、题目搜索、代码的测试和提交等，中文文档见这里：

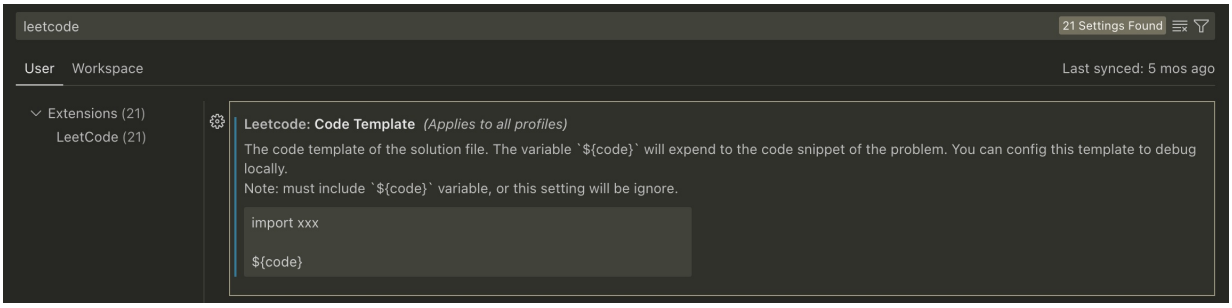
https://github.com/LeetCode-OpenSource/vscode-leetcode/blob/master/docs/README_zh-CN.md

官方插件的问题是，对英文版 LeetCode 适配比较好，但是对中文力扣的支持一般，而且好久都不维护了，连登录都会报错。

我把这些 bug 全部修复了，而且额外添加了一些好用的功能。

自定义代码模板

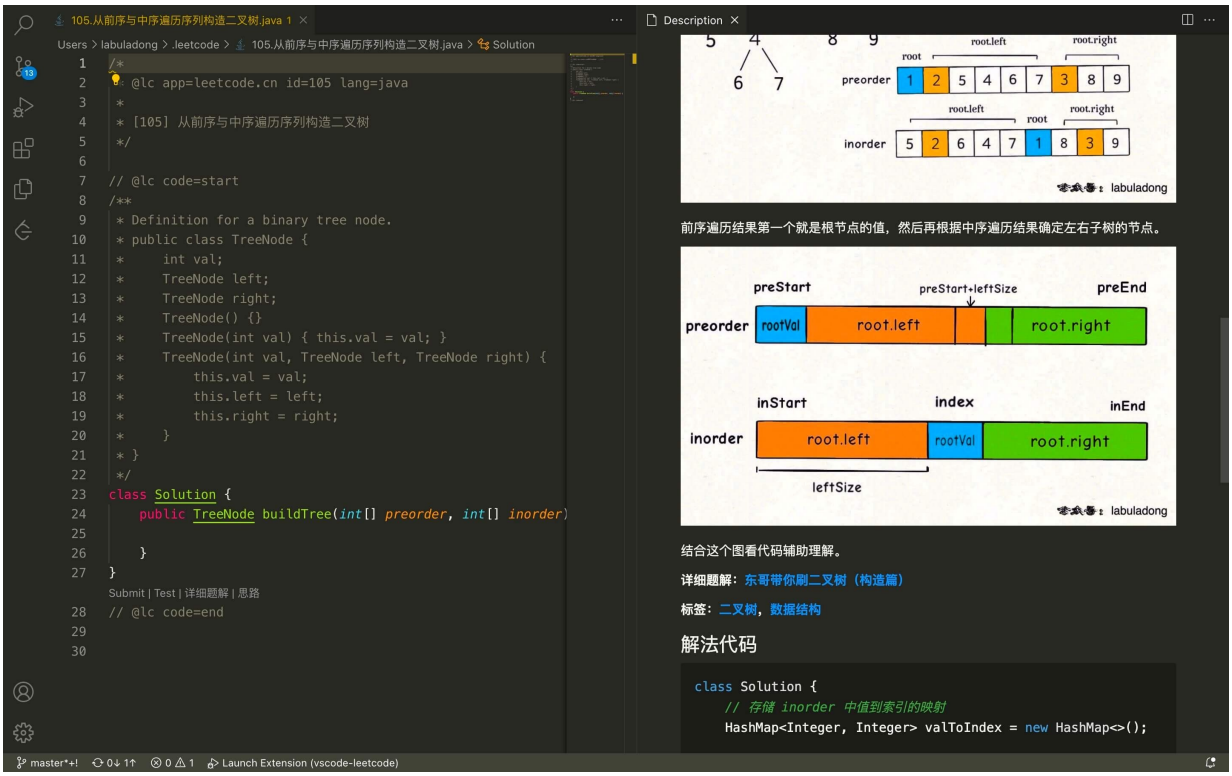
首先一个实用功能是可以配置代码模板，这样你就可以很方便地在本地编译和调试代码了：



题解/思路辅助刷题

另外一个重要的功能，是方便读者查看我的解题思路和详细题解。题目列表中带有 ✨ 标记的题目都是我在公众号讲解过的，可以查看题解或者思路：

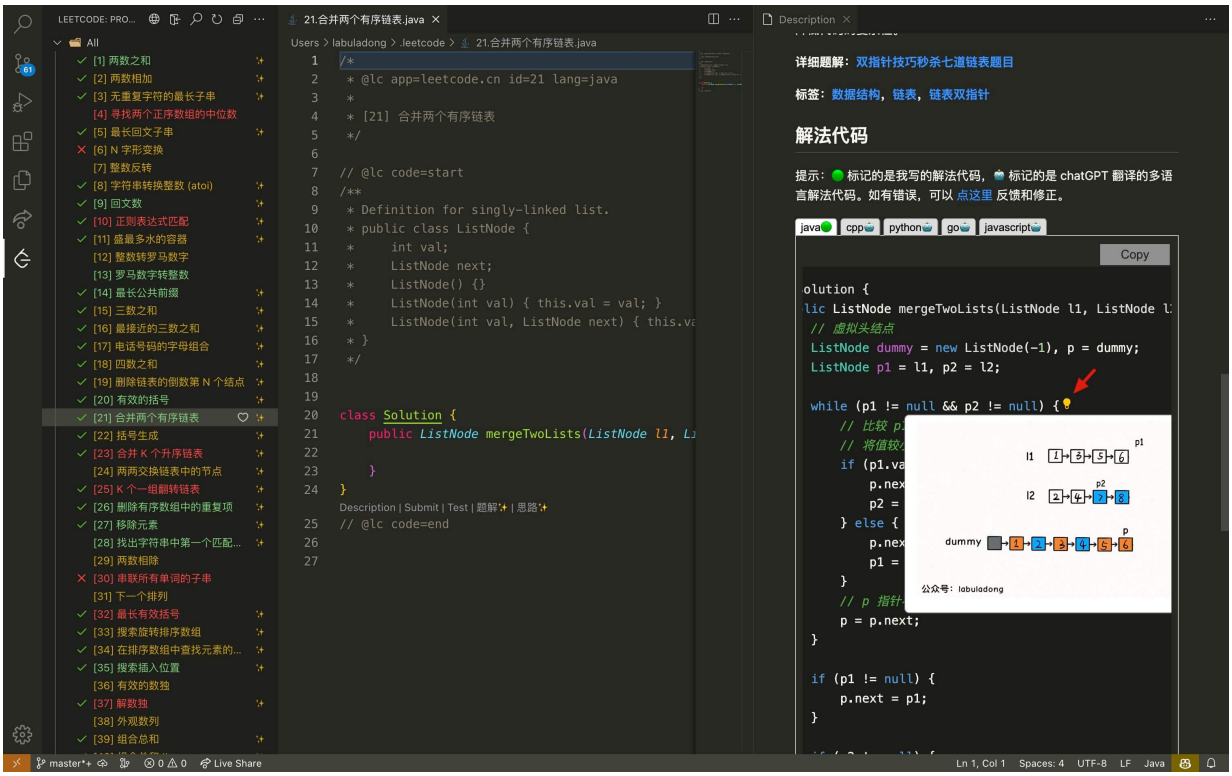
你可以一边写代码一边查看我的思路讲解：



我自己一直在坚持刷算法题并总结解题套路，所以插件中标 ✨ 的题目将会越来越多，Chrome 插件和 vscode 插件都会同步更新。

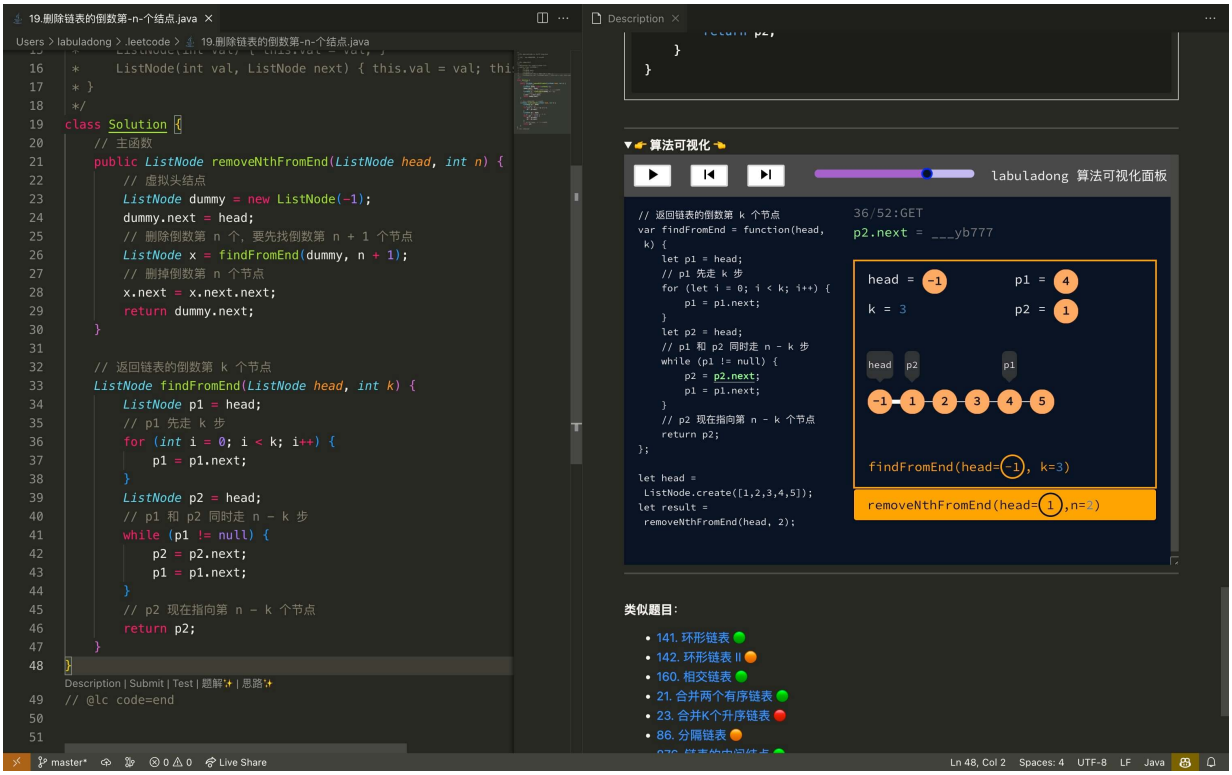
代码图片注释

「labuladong 思路」中的代码支持直接复制，且代码中的小灯泡图标会弹出图片辅助理解代码逻辑：



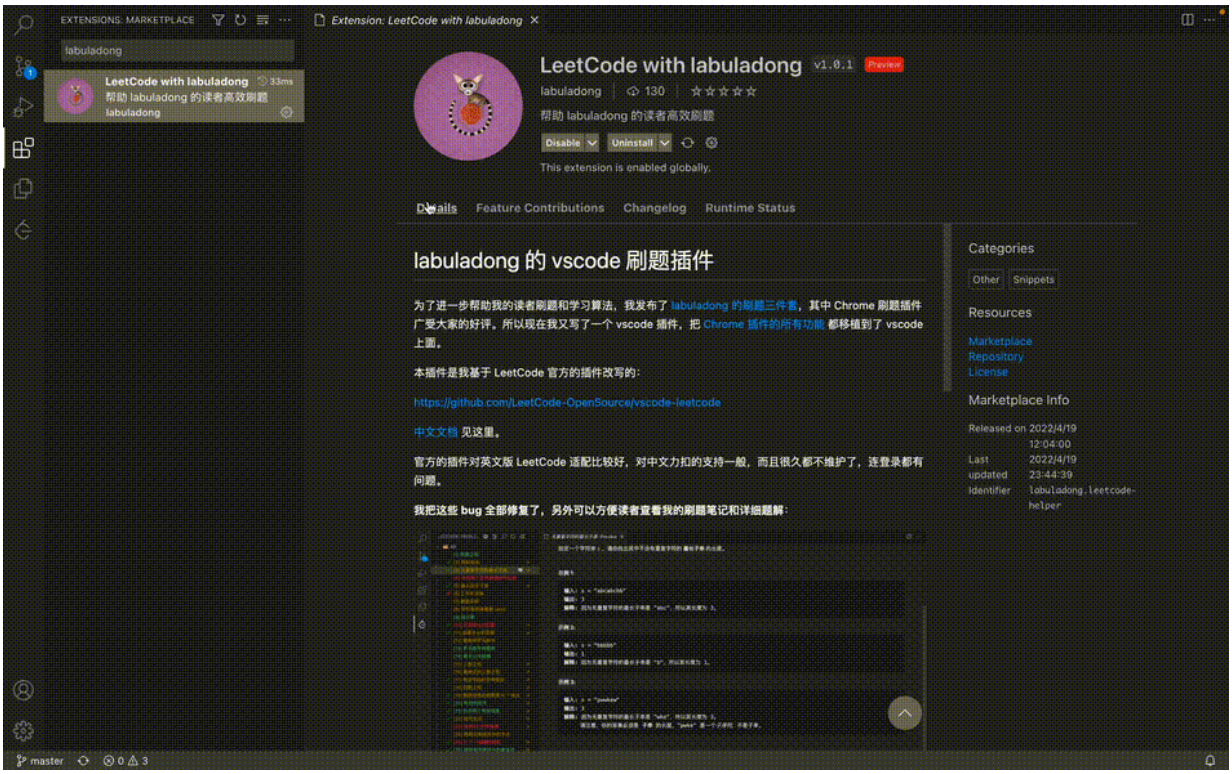
算法可视化面板

「labuladong 思路」展开后，解法代码下方会显示一个可交互的算法可视化面板，帮助理解算法的执行过程：



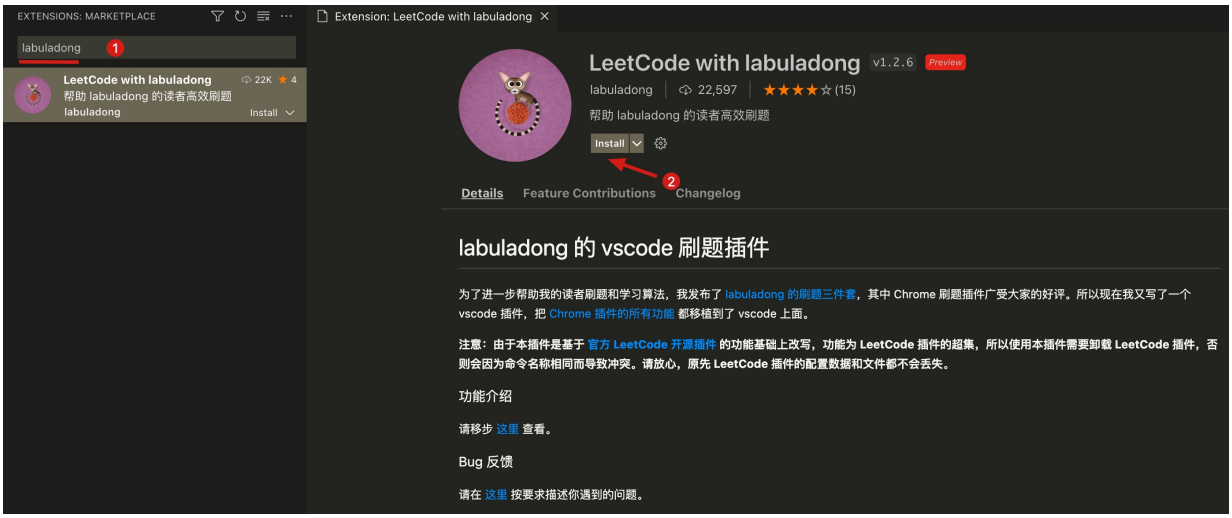
可视化面板的具体功能请参考 算法可视化面板简介。

用一个简短的 GIF 看下这个插件有多好用：



安装方法

微软插件商店在国内也可以正常访问，直接在 vscode 的插件商店中搜索关键词「labuladong」即可搜到插件，点击安装即可：



如果搜不到，可以从 vscode 插件商店的网页安装：

https://marketplace.visualstudio.com/items?itemName=labuladong.leetcode-helper

如果你已经安装了 LeetCode 官方插件，需要先卸载。因为本插件基于官方插件改写，同时开启的话会因为共用了相同的配置而产生冲突。请放心，因为我的插件功能是官方插件的超集，所以卸载原插件也完全不会影响之前的插件配置和代码文件。

更新方式

默认情况下，vscode 会自动检测和更新插件。

更新日志

详见 vscode 插件更新日志。

bug 反馈

如果你在使用过程中遇到问题，可以在我的 GitHub Discussion 中按要求进行反馈，我会定期处理和修复 bug：

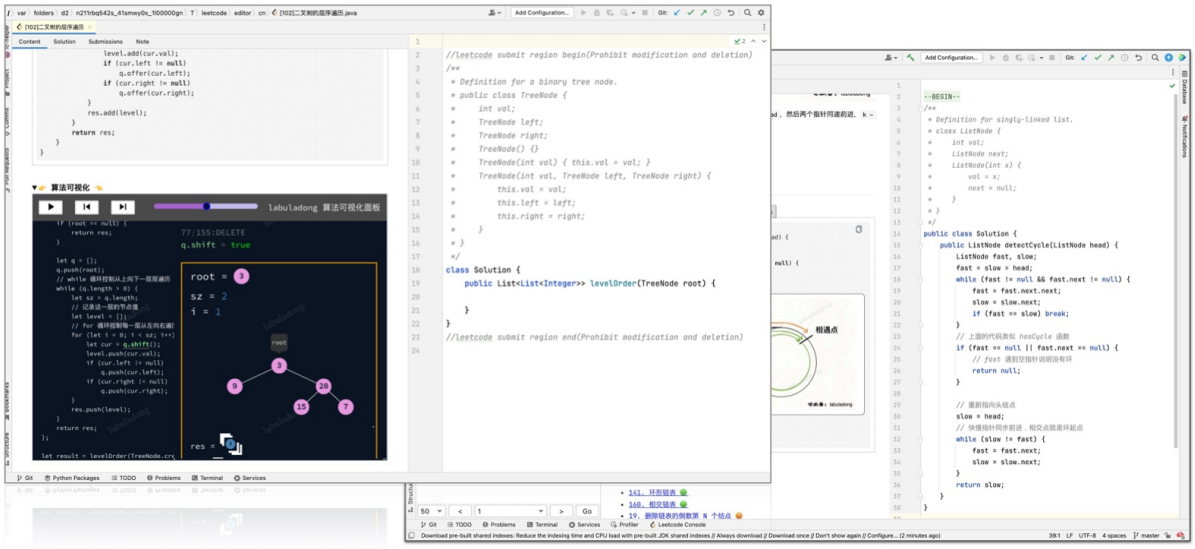
https://github.com/labuladong/fucking-algorithm/discussions/910

配套 JetBrains 刷题插件

> labuladong 的刷题全家桶 由学习网站、《算法秘籍》《刷题笔记》两本 PDF、Chrome/vscode/Jetbrain 三个不同平台的刷题插件组成，致力于为大家提供最丝滑的刷题体验。公众号后台回复关键词「**全家桶**」即可获取下载和使用手册。

由于我的 Chrome 刷题插件 收到很多小伙伴的好评，不过有的小伙伴反馈不喜欢在网页刷题，所以我就开发了 JetBrains 刷题插件，提供和 Chrome 插件类似的功能，大家可以在 JetBrains 全家桶的所有 IDE（比如 Intellij，Pycharm 等等）中刷题。

labuladong 的 Jetbrains 刷题插件：添加「思路」「题解」按钮，支持算法代码的可视化



视频介绍

最近录了一个视频介绍 Jetbrains 插件的主要功能，喜欢看视频的读者可以去 B 站观看：

使用指南

基本功能

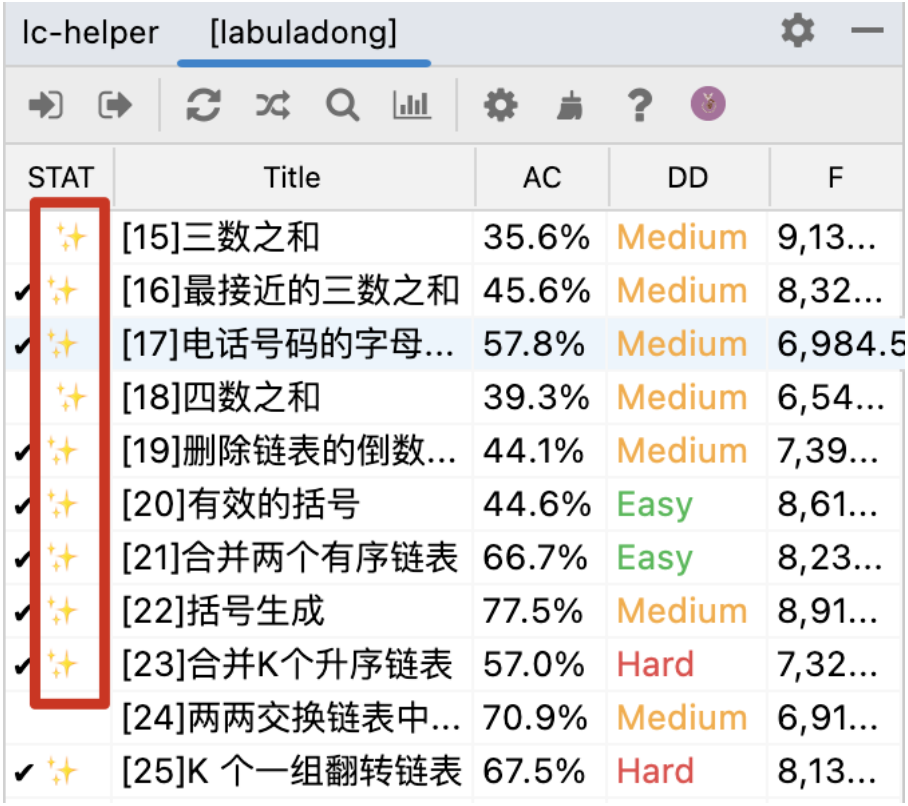
本插件基于开源插件 LeetCode Editor 开发，所以继承了该插件的所有功能，比如 LeetCode/力扣 账号的登录、题目搜索、代码的测试和提交、自定义代码模板等，说明文档如下：

https://github.com/shuzijun/leetcode-editor/blob/master/README_ZH.md

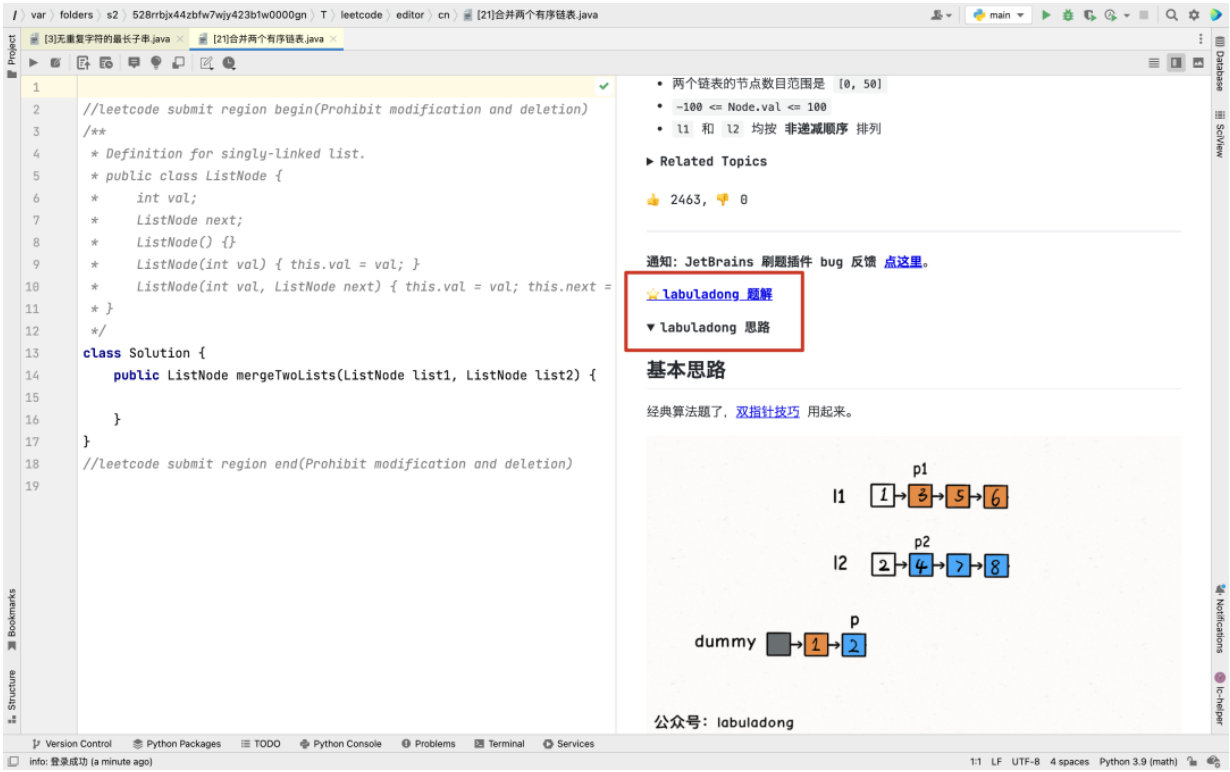
除了 LeetCode Editor 的基本功能，我还添加了很多实用的功能，下面简单介绍一下。

题解/思路辅助刷题

登录成功后，有我的题解或思路的题目会标记 ✨ ：

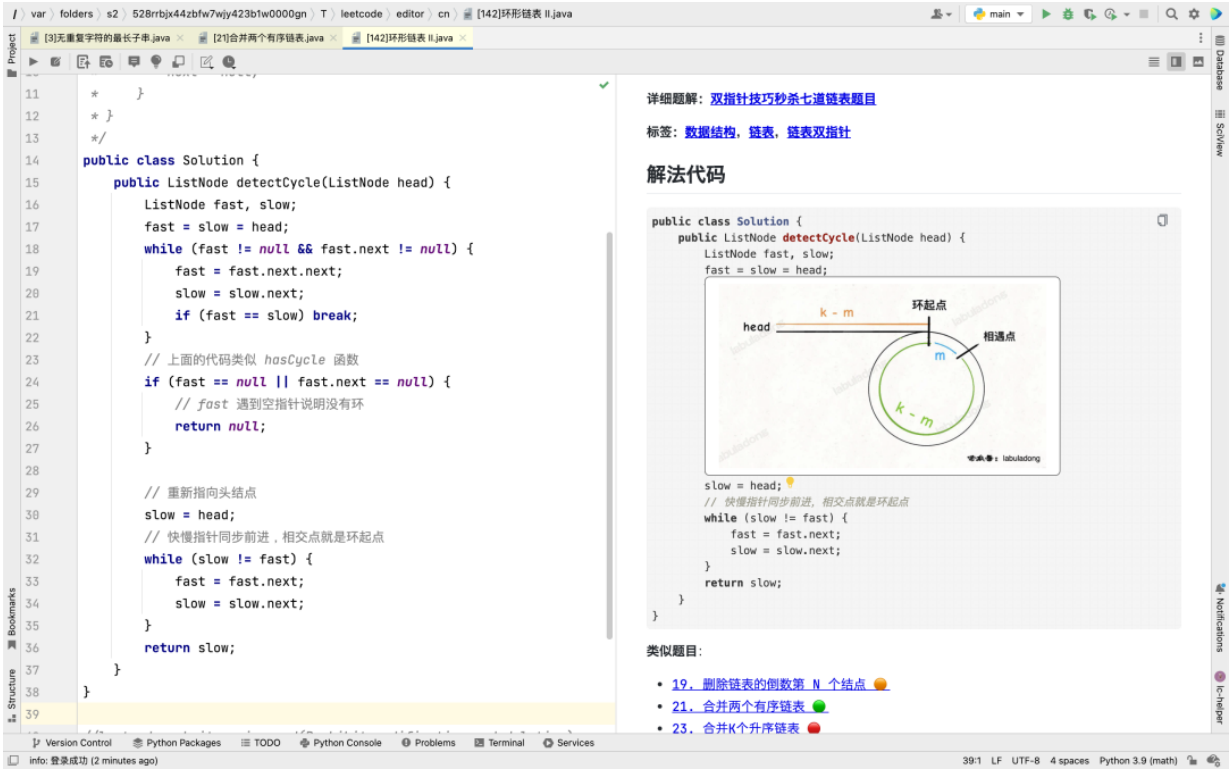


点开带 ✨ 标记的题目详情页会显示「labuladong 题解」和「labuladong 思路」：



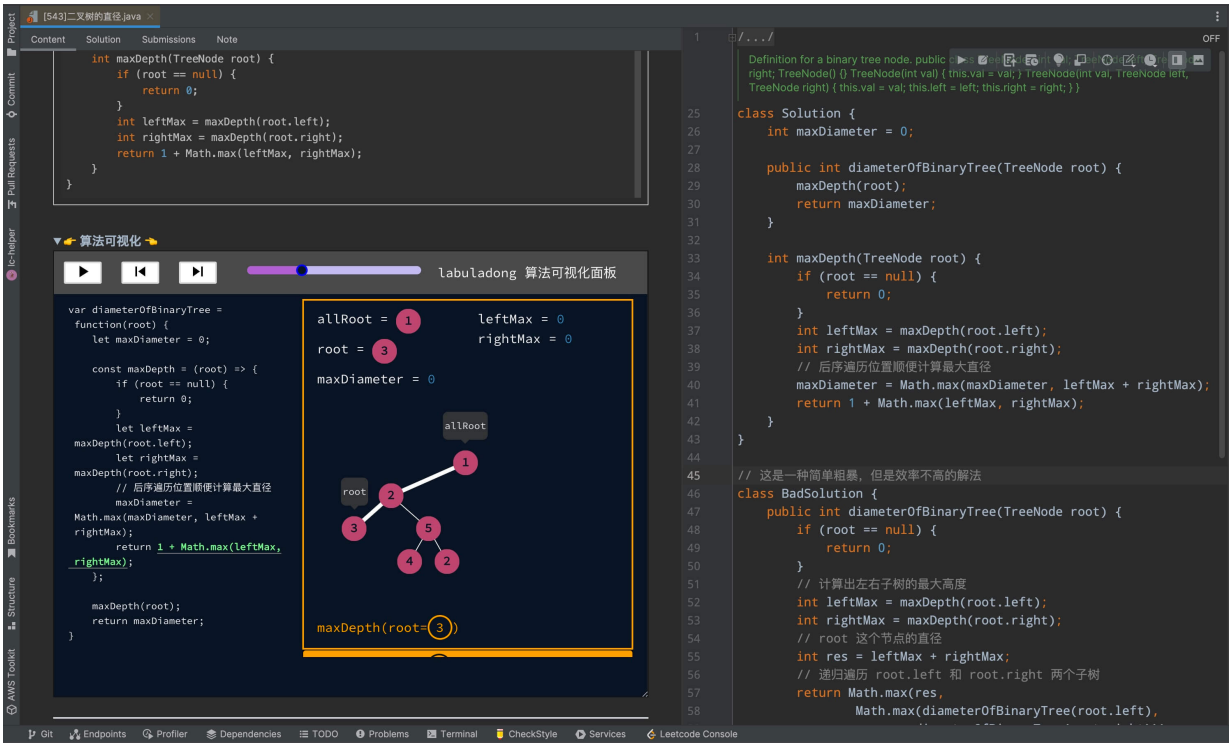
代码图片注释

「labuladong 思路」中的代码支持直接复制，且代码中的小灯泡图标会弹出图片辅助理解代码逻辑：



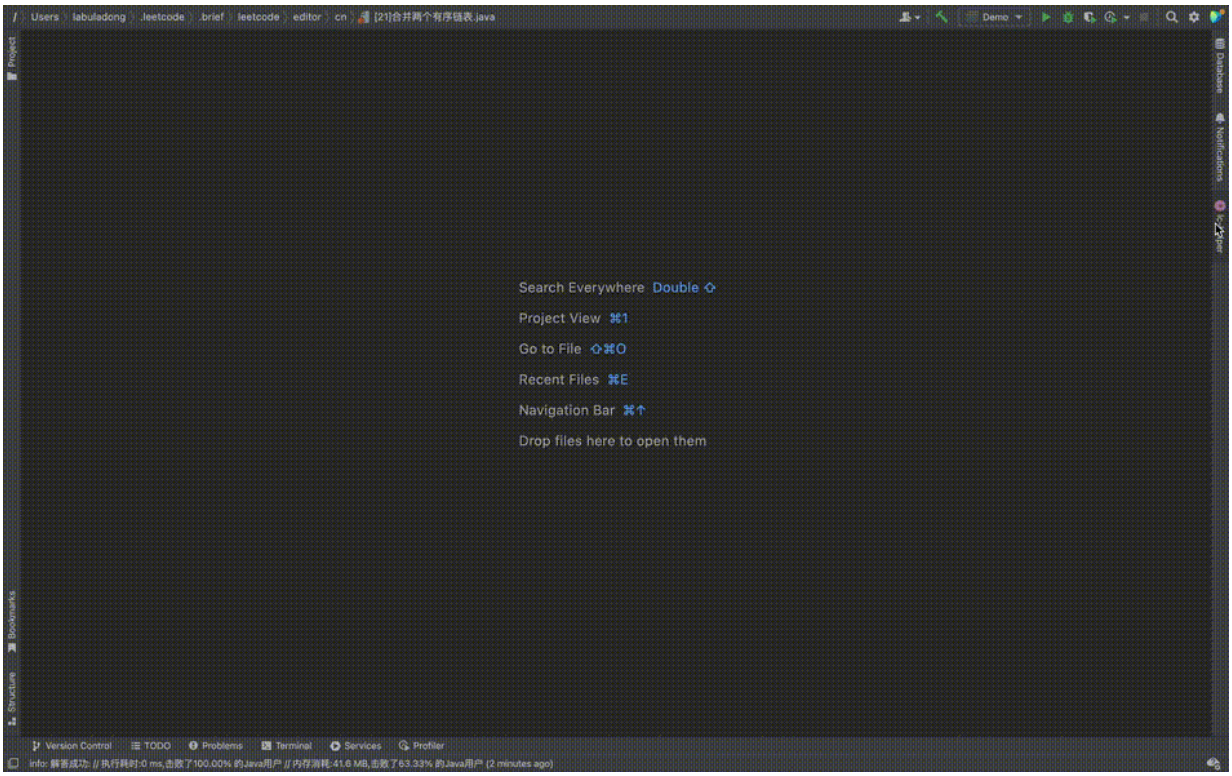
算法可视化面板

「labuladong 思路」展开后，解法代码下方会显示一个可交互的算法可视化面板，帮助理解算法的执行过程：



可视化面板的具体功能请参考 算法可视化面板简介。

用一个简短的 GIF 看下这个插件有多好用：



常见问题

如何本地调试代码

你写算法题的文件就是一个代码文件，在对应的 IDE 里面肯定是可以本地调试的。

比方说我在 Intellij 用 Java 刷题，除了题目给的 Solution 类外，我需要自己写一个类，比方说名为 Test，然后在其中添加 main 函数，然后构造测试用例，调用执行 Solution 类里面的算法函数，这样就可以本地调试了。

> 你可以把 Test 类、main 函数、`TreeNode, ListNode` 这种公用的代码实现统一放到 Code Template 里面，这样每次新打开题目的时候，这些代码就会自动添加到代码文件中，不用你每次手动添加了。

中文乱码?

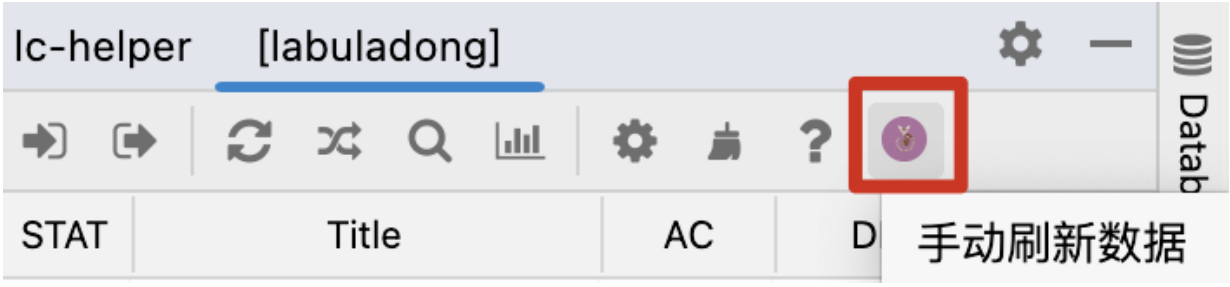
对于比较新的 IDE 版本和操作系统来说，一般不会出现这个问题。如果出现了，可以参考 这个帖子 修改 IDE 的编码为 utf-8。

题目页面会突然变成空白?

你的 IDE 是否已经安装使用了很久？只有 IDE 重度使用者才会遇到这个 bug，原因很难排查，大概是 IDE 升级过程中的某些缓存/内部配置的问题导致的。一个最简单的解决办法是：去官网重新下载最新版 IDE，覆盖安装本地的 IDE（不用担心，并不会覆盖已有的配置），这样一来所有问题都消失了。

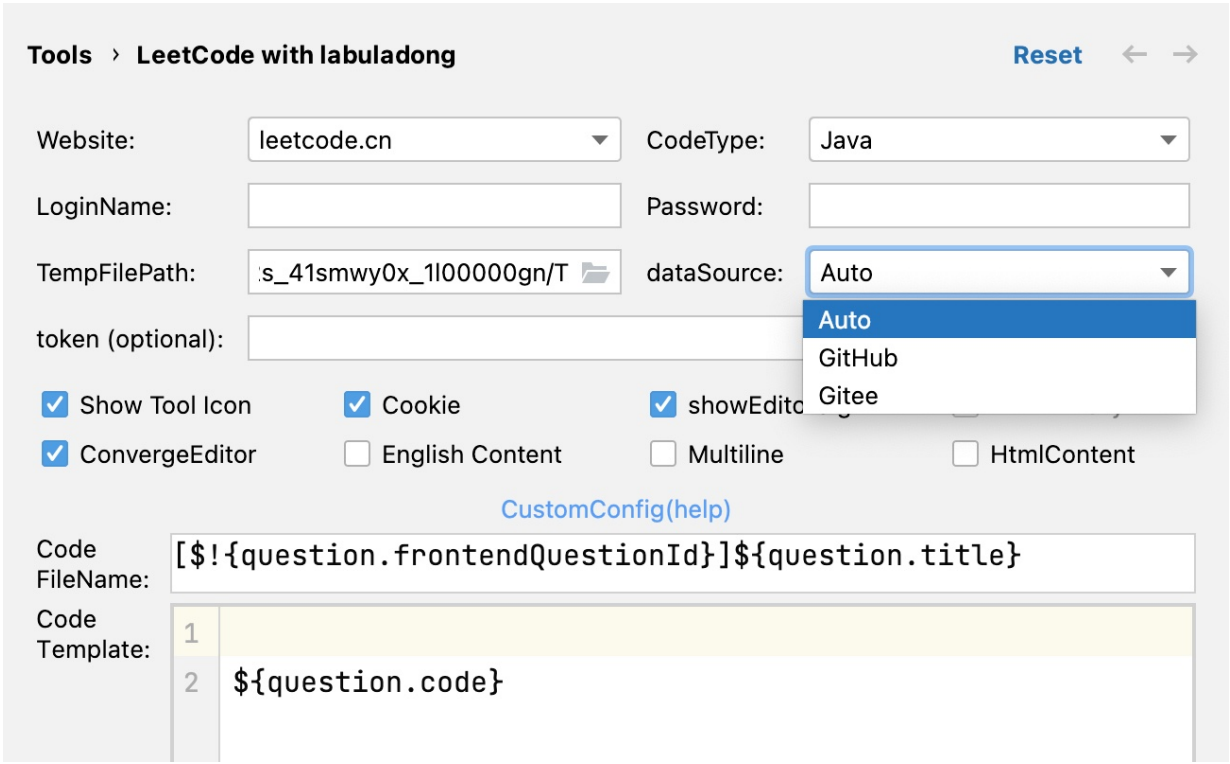
题目列表没有 ✨ 标记?

如果登录账号超过一分钟，题目列表还没有出现 ✨ 标记，可以点击工具栏最右侧的公众号图标手动刷新 labuladong 的题解数据：



等待十几秒左右就会看到通知栏显示「手动刷新 labuldong 数据成功」，✨ 标记就会出现。

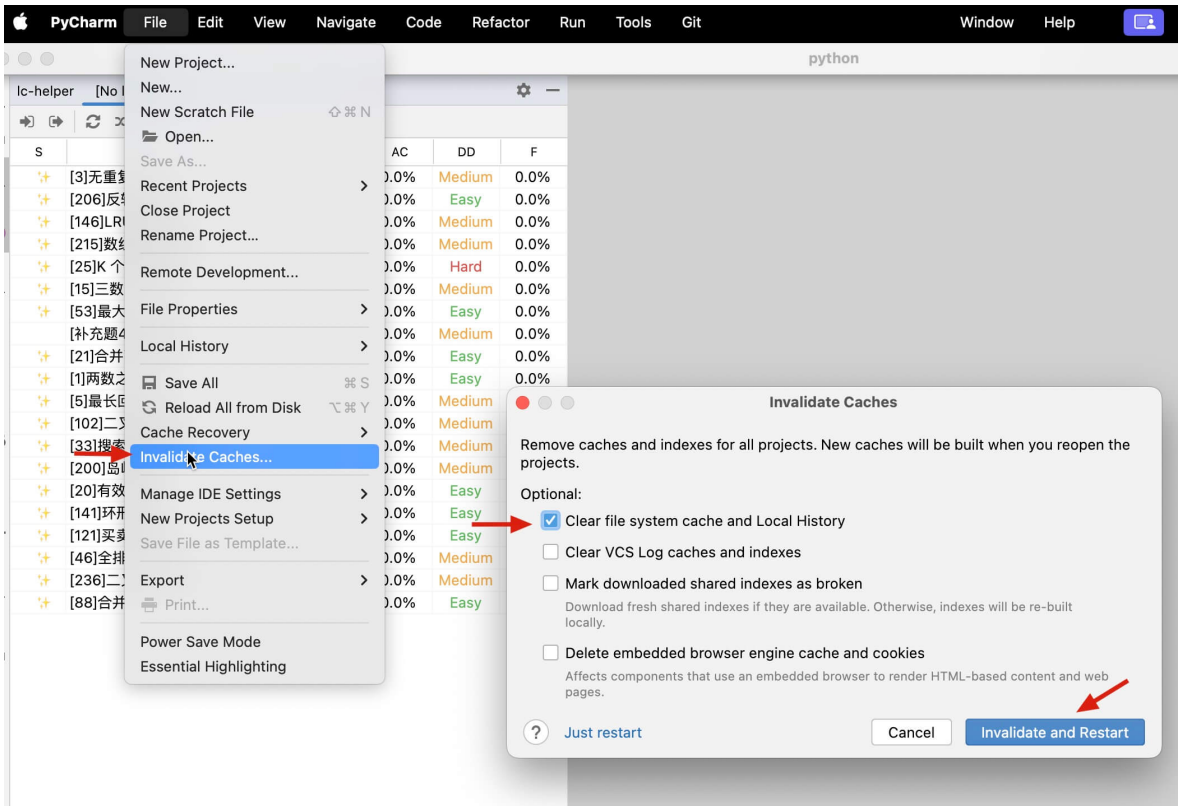
如果依然没有出现，可能是网络问题。因为默认优先去 GitHub 上拉取数据，国内访问可能不稳定，可以在设置中修改 `dataSource` 到国内的 Gitee 源：



有 ✨ 标记但是没有思路和题解按钮?

如果显示数据拉取成功，但是题目详情页没有「labuladong 题解」和「labuladong 思路」按钮，是因为 IDE 的文件系统缓存没有刷新。

你可以尝试手动清除 IDE 的缓存并重启 IDE：



没有代码自动补全?

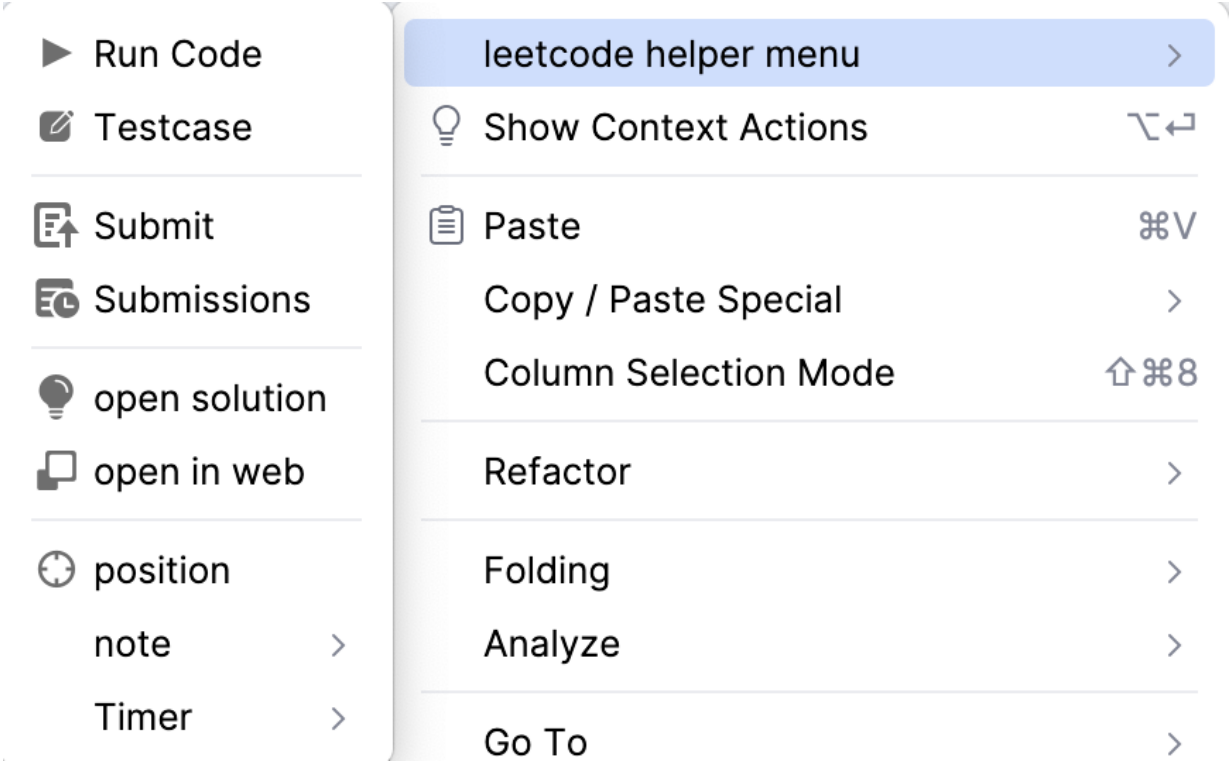
代码补全是 IDE 的基础功能，和插件无关。如果没有代码补全，可能是你的 IDE 没有配置好，或者是你的代码文件无法被 IDE 识别。

比如对于 Go 语言来说，需要在代码文件的第一行加上 `package main` 才能被 Goland IDE 识别，你可以使用 Code Template 功能来自动添加这一行。

类似的，再比如 Java 文件，需要在一个项目中才能被 IDE 识别。你可以把 `TempFilePath` 设置为你的项目路径，并设置 Code Template 自动添加 package 名称，这样代码文件就会被保存到项目中，IDE 就能识别并给出代码补全了。

没有代码提交按钮?

目前插件没有很好地适配新 UI，如果你使用的 Jetbrain 新 UI，可能找不到代码提交按钮。你可以使用右键进行代码提交：



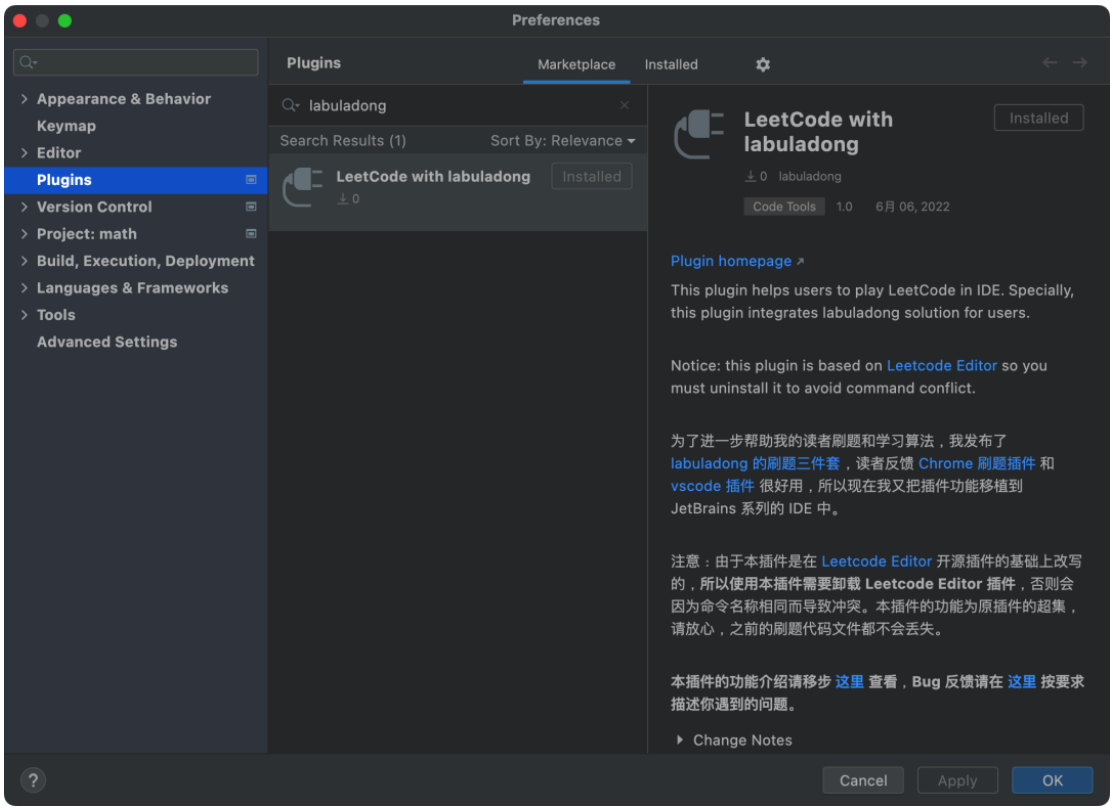
安装方式

注意：由于本插件基于 LeetCode Editor 开源插件改写：

https://github.com/shuzijun/leetcode-editor

所以如果你之前安装了 Leetcode Editor 插件，需要先将其卸载，否则会因为命令名称相同而导致冲突。本插件的功能为原插件的超集，请放心，之前的刷题代码文件都不会丢失。

我的插件全名为「**LeetCode with labuladong**」，在 JetBrains 系列 IDE 的插件商店中搜索关键词「labuladong」即可下载：



如果无法搜索到插件，可能是网络的问题。可以在 JetBrains 插件网页端按照指示下载安装：

https://plugins.jetbrains.com/plugin/19317-leetcode-with-labuladong

更新方式

JetBrains 家的 IDE 会自动检测更新，有更新时会有提示。建议及时更新最新版，以获得最流畅的体验。

更新日志

详见 Jetbrain 插件更新日志。

bug 反馈

如果你在使用中遇到问题，可以在这里按要求反馈 bug，我会定期回复和处理：

https://github.com/labuladong/fucking-algorithm/discussions/939

番外：用算法打败算法

经常有读者问我学算法有什么用，我觉得算法是一种抽象的思维能力。现实中的很多问题只要稍加抽象，就能联想到算法题中的编程技巧，然后得心应手地解决它们。

就比如说 我的刷题全家桶 吧，从去年年底到目前已经有 20 多万次的下载：

这套 PDF 教程和刷题插件不仅沉淀了我这些年学算法的心得体会，而且还把算法的思维运用到了制作过程中。本文简单介绍一下我制作教程以及插件时用到的算法，看看算法如何辅助大家更顺畅地学习。

计算相关文章/题目

我在前文 近期的大更新 说到了近期我对网站、PDF 以及插件功能的更新，其中有几个很实用的功能：

每篇文章的末尾添加了「相关文章」和「相关题目」的功能：

每道题目的解法思路底下也添加了「相关题目」的功能：

```
                // 做选择
                track.add(nums[i]);
                used[i] = true;
                // 进入下一层决策树
                backtrack(nums, track, used);
                // 取消选择
                track.removeLast();
                used[i] = false;
            }
        }
    }
```

类似题目：

- 216. 组合总和 III 🟠
- 39. 组合总和 🟠
- 40. 组合总和 II 🟠
- 47. 全排列 II 🟠
- 51. N 皇后 🔴
- 77. 组合 🟠
- 78. 子集 🟠
- 90. 子集 II 🟠
- 剑指 Offer II 079. 所有子集 🟠

如果要实现这几个功能，我要维护三个映射：

1、文章到相关题目列表的映射。

2、文章到相关文章列表的映射。

3、题目到相关题目列表的映射。

我手动维护了一个文章到相关题目的映射：

```
Map<Article, List<Question>> map;
```

所以第 1 个功能可以直接实现，但其他两个功能怎么实现呢？

文章之间直接的引用肯定是一种相关关系，但如果多篇文章能够同时解决同一道题目，也可以说明这些文章之间存在相关关系。

因为我一般会在一篇文章里讲解多道题目，那么同一篇文章讲解的题目肯定有相关关系。同时，如果两篇文章相关，那么这两篇文章涉及的题目之间也应该是相关的。

想把上述思路写成代码，我们可以把上述的 `map` 转化成 图模型：

把「文章」和「题目」理解成一幅图中的两种节点，关联关系理解成图中的边，那么「文章」节点的相邻节点一定都是「题目」节点，「题目」节点的相邻节点一定都是「文章」节点，不可能有两个相同类型的节点相邻，这是一幅典型的 二分图。

一旦把问题抽象成图模型，就可以运用所有图论算法，我随便举几个例子：

1、「文章」节点的邻居节点就是相关题目，「题目」节点的相邻节点就是能够解决该题目的文章，这是 二分图 的特性。

2、可以利用 Union Find 并查集算法 判断图中的两个节点是否连通。

具体来说，可以在 O(1) 时间判断两道题是否相关、两篇文章是否相关、某道题目和某篇文章是否相关。

3、可以把图中的某个节点作为起点执行 DFS/BFS 遍历算法，所有可达的节点即为相关节点，且距离越近，相关性越高。

具体来说，给一个「题目」节点，我用 DFS/BFS 算法计算所有可达的节点中的「题目」节点就是相关题目；类似的，「文章」节点周围所有可达节点中的「文章」节点就是相关文章。

这样，之前提出的三个相关关系的映射就能算出来了。

计算合理的目录顺序

很多读者反馈我的 PDF 教程的难度设计由浅入深，读起来酣畅淋漓，那是因为我在目录的设计上也使用了算法辅助，让学习曲线变得尽可能平滑。

首先，我给每道题目都打了 tag，这样只需把对应 tag 的题目丢到对应的章节里就行了。比如我可以把「基本二分搜索」「二分搜索运用」等多个 tag 的题目都丢到二分搜索的章节。

但是同一章节的题目难度也应该循序渐进。所以，我维护了题目之间的依赖关系，并根据这个依赖关系生成了一幅以题目为节点，依赖关系为边的 有向图，并在这幅有向图中进行了 环检测和拓扑排序算法，保证做每道题之前已经具备相关的前置知识。

接下来遇到一个新问题：

之前我的插件和 PDF 支持了 手把手刷《剑指 offer》的功能，所以算法笔记中包含很多《剑指 offer》的题目。

但《剑指 offer》的一些题目和力扣主站的题目有重复，力扣本身也有一些题目是重复的，所以现在需要对每个章节的题目进行去重。

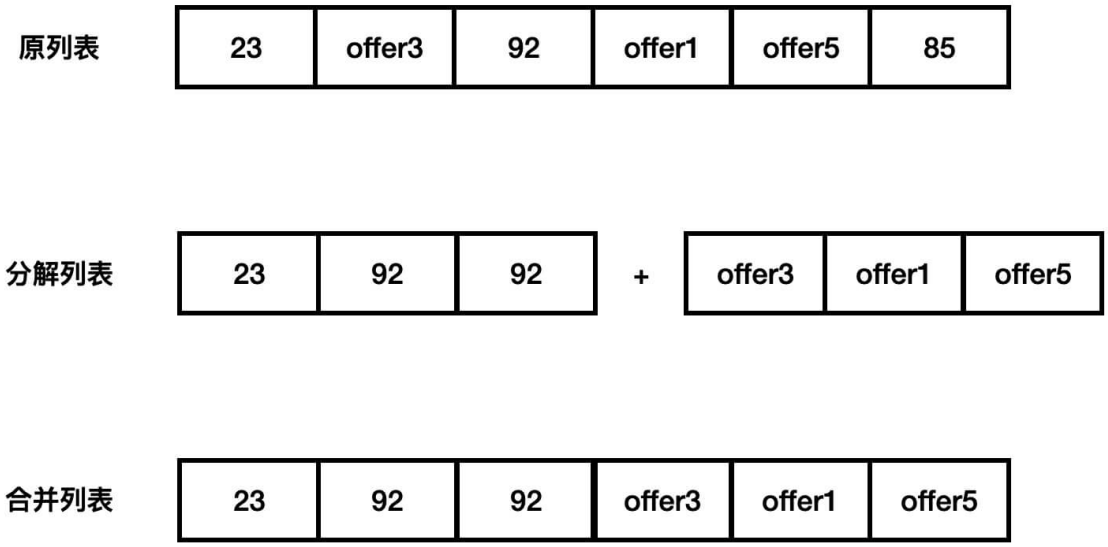
由于章节中题目的顺序是经过拓扑排序的，所以我们希望**去重时不改变题目之间的相对顺序**。

我们可以用简单直接的方法，不过既然是一套算法教程，那当然要秀一下算法技巧喽。所以这里可以用后文 数组双指针技巧 中的快慢指针进行数组的原地去重。

另外，我希望《剑指 offer》的题目和原题有所区分，比如对于同一 tag 下的题目，让主站的题目排在前面，《剑指 offer》的题目排在后面。

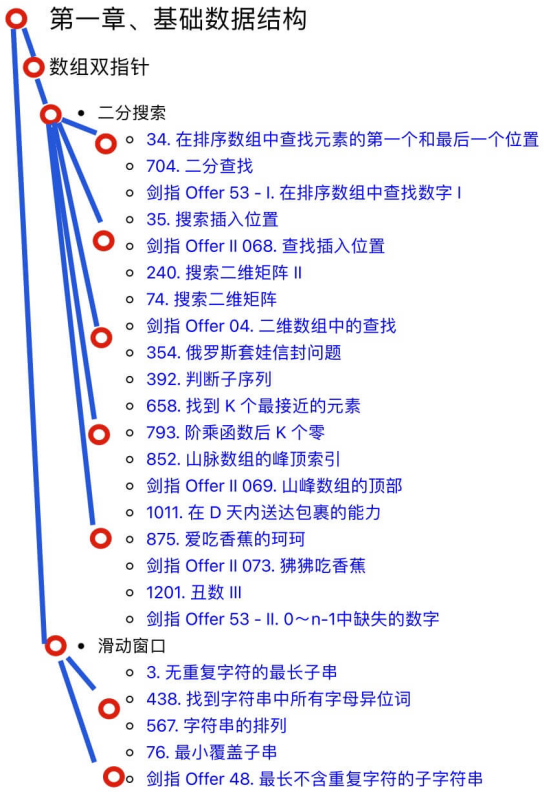
类似去重需求，因为已经进行了拓扑排序，所以重排不应该不改变主站和剑指 offer 题目之间的相对顺序。

这里可以用后文 链表双指针技巧 讲到的分解链表的技巧，把剑指 offer的题目分解出来再合并到末尾：

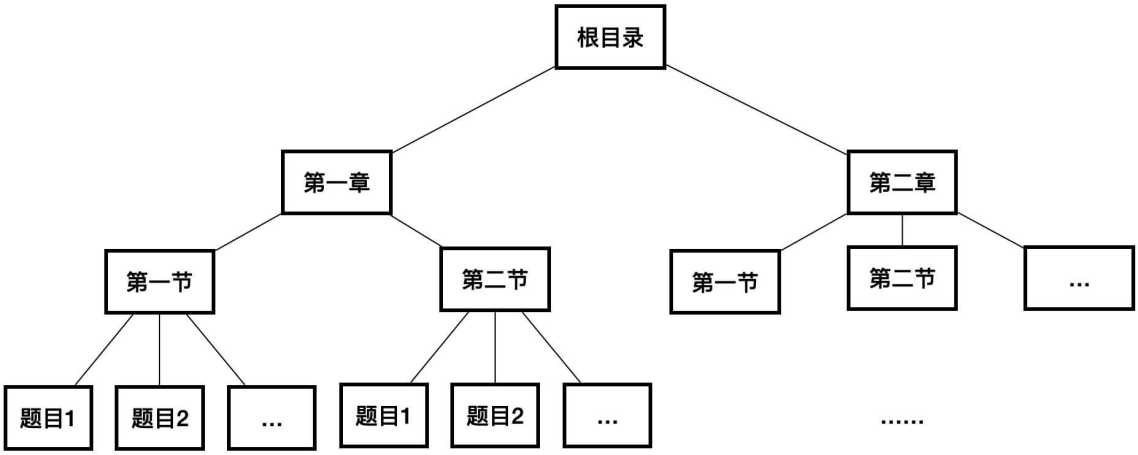


到这里，题目的顺序就定下来了。但由于目录包含章节、小节、文章等多个层级，需要一个算法来为章节名、小节名、题目名生成正确的缩进。

实际上目录是一个树形结构，叶子节点是每道题目的内容和思路，非叶子结点是章节、小节的名称：



从树的角度来看，节点的层数可以区别章节、小节和题目，而且注意**这棵树的前序遍历结果就是生成目录的顺序**：



但既然咱学了这么久算法，直接用前序遍历就显得格局低了。这里可以使用前文 嵌套迭代器 的思路，用迭代器的形式遍历多叉树：

迭代器中的元素可能是一个单独的元素（题目），也可能是一个迭代器（章节、小节）。初始迭代器中只有 5 个元素（因为共有 5 个章节），然后迭代器可以自动处理和展开每个列表元素，进而生成完整的 PDF 目录。

以上这些算法结合起来，也就得到了《算法笔记》的目录：

目录

开篇、刷题笔记阅读指南

第一章、基础数据结构

数组双指针

- 二分搜索
  - 34. 在排序数组中查找元素的第一个和最后一个位置
  - 704. 二分查找
  - 剑指 Offer 53 - I. 在排序数组中查找数字 I
  - 35. 搜索插入位置
  - 剑指 Offer II 068. 查找插入位置
  - 240. 搜索二维矩阵 II
  - 74. 搜索二维矩阵
  - 剑指 Offer 04. 二维数组中的查找
  - 354. 俄罗斯套娃信封问题
  - 392. 判断子序列
  - 658. 找到 K 个最接近的元素
  - 793. 阶乘函数后 K 个零
  - 852. 山脉数组的峰顶索引
  - 剑指 Offer II 069. 山峰数组的顶部
  - 1011. 在 D 天内送达包裹的能力
  - 875. 爱吃香蕉的珂珂
  - 剑指 Offer II 073. 狒狒吃香蕉
  - 1201. 丑数 III
  - 剑指 Offer 53 - II. 0～n-1中缺失的数字
- 滑动窗口
  - 3. 无重复字符的最长子串
  - 438. 找到字符串中所有字母异位词
  - 567. 字符串的排列
  - 76. 最小覆盖子串
  - 剑指 Offer 48. 最长不含重复字符的子字符串
  - 剑指 Offer II 014. 字符串中的变位词
  - 剑指 Offer II 015. 字符串中的所有变位词
  - 剑指 Offer II 016. 不含重复字符的最长子字符串
  - 剑指 Offer II 017. 含有所有字符的最短字符串
  - 239. 滑动窗口最大值
  - 26. 删除有序数组中的重复项
  - 27. 移除元素
  - 283. 移动零
  - 80. 删除有序数组中的重复项 II
  - 83. 删除排序链表中的重复元素
  - 剑指 Offer 57. 和为s的两个数字
  - 88. 合并两个有序数组
  - 977. 有序数组的平方
  - 1260. 二维网格迁移
  - 151. 颠倒字符串中的单词
  - 82. 删除排序链表中的重复元素 II
  - 剑指 Offer II 007. 数组中和为 0 的三个数
  - 15. 三数之和
  - 18. 四数之和
  - 870. 优势洗牌
  - 剑指 Offer 21. 调整数组顺序使奇数位于偶数前面
  - 11. 盛最多水的容器
  - 42. 接雨水
  - 360. 有序转化数组

链表双指针

- 2. 两数相加
- 141. 环形链表
- 142. 环形链表 II
- 160. 相交链表
- 19. 删除链表的倒数第 N 个结点
- 21. 合并两个有序链表
- 23. 合并 K 个升序链表
- 86. 分隔链表
- 876. 链表的中间结点
- 剑指 Offer 25. 合并两个排序的链表
- 剑指 Offer 52. 两个链表的第一个公共节点
- 剑指 Offer II 021. 删除链表的倒数第 n 个结点
- 剑指 Offer II 022. 链表中环的入口节点
- 剑指 Offer II 023. 两个链表的第一个重合节点
- 剑指 Offer II 078. 合并排序链表
- 1305. 两棵二叉搜索树中的所有元素
- 264. 丑数 II
- 313. 超级丑数

《算法秘籍》也用了类似的算法优化了目录的组织顺序，我这里就不赘述了。

当然，PDF 中用到的算法也被运用在了 Chrome 刷题插件、vscode 刷题插件、JetBrains 刷题插件 中，致力于给大家营造丝滑的刷题学习体验，公众号后台回复关键词「**全家桶**」即可打包下载。

14 天刷题打卡挑战

30 篇打卡内容都是选自 主站 上的算法教程，如果你时间充裕，且有那个动力坚持刷题学习，那直接刷主站的内容就可以了，没必要参与这个打卡挑战。

这个打卡主要针对的读者：

1、时间充裕，但是自制能力有限，容易半途而废。比如说你知道得开始刷题了，也有那个时间，但总是拖延。那么你可以借助打卡挑战的押金机制来督促自己迈出第一步。

2、时间不充裕，希望有一个外部的力量来适度逼迫一下自己坚持刷题，养成习惯。那么你也可以借助打卡挑战的押金机制来督促自己，每天学习一个算法技巧。

另外，因为打卡的内容只是网站上筛选出的部分文章，主要目的是帮你梳理出算法知识体系的一个框架，并培良好的学习习惯。所以即便你完成了本次 30 天打卡，还是需要继续保持精进的状态，学习网站上的其他内容并亲自动手实践运用，才能真正意义上搞定算法这个难关。

为什么要搞这个打卡挑战

经常有读者跟我说，我的公众号和网站总结的算法技巧已经非常详尽了，按理说只要照着刷一遍就可以。但问题是自己坚持不下来，希望有一个刷题打卡的活动督促，克服惰性，养成每天刷题进步的习惯。

我觉得这个事情确实值得做，因为像刷题这种短期没有回报的事情，很多时候需要外部给一点动力，才不容易放弃。所以我推出了一个 30 天刷题打卡训练营，先交押金，完成学习全额退押金，以此督促大家坚持学习。

老读者知道，我之前搞过二十多期的 14 天/ 21 天刷题打卡训练营，但是之前的打卡活动主要有如下两个问题：

问题一、有的参与者非常敷衍，直接复制我的思路，或者只粘贴代码，一个字都不改，完全没有自己的理解和总结。这样很难提高自己的算法能力，我就不明白，非要这样自欺欺人，又何必参加打卡活动呢？

问题二、每一期需要固定的起止时间，有些读者想参与，但是错过了本期打卡的报名时间，就只能等下一期才能报名，等待周期较长，不够灵活。

这次的 30 天刷题打卡训练营可以说是升级版，不仅更新了一部分内容，还针对这两个问题做了一些改进：

改进一、我会设置 100 字的最低字数限制，且学员之间可以查看彼此的打卡总结，希望好的打卡总结给大家起到好的带头作用。我也会定期抽查打卡内容，对于不合格的打卡，我会置顶并撤销该打卡记录，督促大家认真对待每天的学习任务。

改进二、现在打卡挑战不再有固定的起止时间，任何读者任何时候都可以报名，挑战周期为报名的当天往后 36 天（30 篇打卡内容每天一篇，另外加上 6 天的补卡机会）。

打卡方式

如何最高效地打卡学习呢？我给大家说一个秘诀：一边自己学，一边教别人，也就是一边输入一边输出，效果最好。

很多时候你觉得自己会了，实际上你不是真的会，否则就不会有那么多人说自己一上手就不会做题了。如果你试图把自己的理解表达出来，就会发现自己的知识盲点，从而进行更深入的思考，真正理解这个知识点。

所以我的打卡挑战不能仅仅是学习我的算法教程和做题，而且要有一定的总结输出，发送到网站下方的评论区作为每天的打卡内容。你只需要就当天的学习内容做 100 字以上的总结就可以，这个要求很容易完成吧，稍微认真写一写就够了。

对于打卡，重要的是对自己负责态度。如果遇到态度敷衍，直接复制粘贴我的代码或思路的情况，当天的打卡将被判定为无效，我会私信通知并给机会改正，以此来督促大家认真学习，对自己负责。

报名注意事项

参与我的打卡挑战是免费的，但如果完全没有门槛，大家都做看客了，效果不会好。所以我的打卡挑战是押金形式，劝退伸手党：**先交 299 元押金，按要求完成每日打卡（每天学习一篇文章，缺卡不超过 6 天），押金全额原路退还**。

在支付押金之前，请先阅读以下注意事项。

支付押金后，打卡就开始了，当天算作第一天打卡，所以付款后请立即完成第一天的打卡任务。第一天的任务很简单，就是带你走一遍打卡流程，预计花费 5 分钟，请务必认真阅读规则。

打卡的结算和刷新全部按照北京时间，且每天只允许打卡一次，北京时间 00:00 打卡次数刷新。

比方说，你完成 Day01 的打卡任务之后，不能立即查看 Day02 的打卡任务，需要等到北京时间第二天 00:00 才能解锁 Day02 的内容。

考虑到这个时间机制，不建议在北京时间 23:50 分之后报名参与打卡，因为如果你不能在 10 分钟内完成第一天的打卡任务的话，第一天就会被算作缺卡。

当然，我也考虑到这个情况，所以第一天的打卡任务很简单，几分钟即可完成，不过还是建议你等到北京时间 00:00 之后，或者在其他时段报名参与，避免不必要的缺卡。

面向新手的 Java 基础

> 我的网站解法代码现已支持了所有主流编程语言，包括 Java、Python、C++、JavaScript 和 Go，不过依然建议你简单了解一下 Java 语言，因为其他语言都是我用 chatGPT 从 Java 翻译过去的，如果偶尔遇到错误可能需要你对照理解 Java 的代码逻辑。

目前我的算法教程基本上都是用 Java 语言写的代码，主要有以下几个原因：

1、Java 是强类型语言。因为我们就是要学习运用各种数据结构写算法嘛，所以清楚地知道每个变量是什么类型非常重要，方便你 debug，也方便 IDE 进行语法检查。如果是 Python 这样的动态语言，每个变量的类型不明显，可能有碍大家的理解。

2、Java 这种语言中规中矩，没有什么花里胡哨的语言特性。即便你之前没学过 Java 语言，单看代码也能轻易地理解逻辑。所以如果你有其他比较熟悉的语言，完全可以把我的代码思路用自己的语言实现。

另外，抛开算法不谈，单就编程技术的学习来说，我也建议大家多学习几门语言，尤其是像 Java 这种使用非常广泛的语言。因为任何人的职业生涯都不可能只用一种编程语言的，一般都是换个工作就会换一套技术栈，所以主流编程语言最基本的语法要能看的懂，这对以后得工作也会有很大帮助。

当然了，对于一些不怎么熟悉 Java 且其他语言基础也比较差的读者，初学时肯定会有一点吃力。因为算法本身就比较烧脑了，再加上对语言特性不太熟悉，很可能会因为一些语言特性的坑而导致算法错误，这当然是我们不希望看到的。

不过不用担心，我的所有解法代码都会刻意避开 Java 的高级语言特性，用最朴素的、最容易看懂的方式写代码。

下面我还会带大家过一遍学习我的算法教程所需的 Java 基本用法，以便不了解 Java 的小伙也能伴顺畅地学习我的文章。

首先，Java 的基本知识网上有很多，我就不重复造轮子了，我就随便贴一个中文教程吧，你如果有更喜欢的 Java 教程也可以看你喜欢的：

https://www.runoob.com/java/java-tutorial.html

我圈出的这一部分是 Java 的基本用法，你需要看一下。当然这个网站也有其他的 Java 基础知识，你有空也可以快速浏览一下：

下面我具体介绍一下我在教程中会用到的 Java 的标准库的数据结构以及一些可能踩坑的语言特性。

Java 标准库数据结构的基本用法

Java 中最基本的数据类型叫 Primitive Type（原始类型），比如 `int, char, long, boolean` 这种小写字母的关键字。大家应该都学过 C 语言，所以对于原始类型应该不陌生，因为 C 语言里几乎只有原始类型，连字符串都只能用 `char[]` 字符数组来表示，只能使用指针进行操作，使用起来非常不方便。

当然，作为高级编程语言，Java 提供了很多高级数据类型，都封装成了标准库中的**类**（Java 中类的名字都以大写字母开头），比如 Java 中的字符串就是 `String` 类，这个类有 `length(), substring()` 等方法，这样我们就不用管底层的操作细节，使用起来方便多了。

以下是一些基本的 Java 类型。

1、数组。

初始化方法：

```
int m = 5, n = 10;

// 初始化一个大小为 10 的 int 数组
// 其中的值默认初始化为 0
int[] nums = new int[n]

// 初始化一个 m * n 的二维布尔数组
// 其中的元素默认初始化为 false
boolean[][] visited = new boolean[m][n];
```

作为原始类型，这就类似 C 语言的 `int` 数组，如果涉及到比较复杂的操作，用起来比较麻烦，所以我们更多地使用 `ArrayList` 动态数组。

2、字符串 String

Java 的字符串处理起来挺麻烦的，因为它不支持用 `[]` 直接访问其中的字符，而且不能直接修改，要转化成 `char[]` 类型才能修改。主要说下 `String` 中我们会用到的一些特性：

```
String s1 = "hello world";
// 获取 s1[2] 那个字符 l
char c = s1.charAt(2);

char[] chars = s1.toCharArray();
chars[1] = 'a';
String s2 = new String(chars);
// 输出：hallo world
System.out.println(s2);

// 注意，一定要用 equals 方法判断字符串是否相同
if (s1.equals(s2)) {
    // s1 和 s2 相同
} else {
    // s1 和 s2 不相同
}

// 字符串可以用加号进行拼接
String s3 = s1 + "!";
// 输出：hello world!
System.out.println(s3);
```

Java 的字符串不能直接修改，要用 `toCharArray` 转化成 `char[]` 的数组进行修改，然后再转换回 `String` 类型。

另外，虽然字符串支持用 `+` 进行拼接，但是效率并不高，并不建议在 for 循环中使用。如果需要进行频繁的字符串拼接，推荐使用 `StringBuilder/StringBuffer`：

```
StringBuilder sb = new StringBuilder();

for (char c = 'a'; c <= 'f'; c++) {
    sb.append(c);
}

// append 方法支持拼接字符、字符串、数字等类型
sb.append('g').append("hij").append(123);

String res = sb.toString();
// 输出：abcdefghij123
System.out.println(res);
```

还有一个重要的问题就是字符串的相等性比较，这个问题涉及语言特性，简单说就是一定要用字符串的 `equals` 方法比较两个字符串是否相同，不要用 `==` 比较，否则可能出现不易察觉的 bug。

3、动态数组 ArrayList

`ArrayList` 相当于把 Java 内置的数组类型做了包装，初始化方法：

```
// 初始化一个存储 String 类型的动态数组
ArrayList<String> strings = new ArrayList<>();

// 初始化一个存储 int 类型的动态数组
ArrayList<Integer> nums = new ArrayList<>();
```

常用的方法如下（`E` 代表元素类型）：

```
// 判断数组是否为空
boolean isEmpty()

// 返回数组的元素个数
int size()

// 返回索引 index 的元素
E get(int index)

// 在数组尾部添加元素 e
boolean add(E e)
```

我们做算法题时这些最简单的方法就够用了，你应该看一眼就能明白。

在数据结构基础部分，我会在 动手实现动态数组 中带着大家实现一个 `ArrayList`，以便了解这种常见数据结构的底层原理。

4、双链表 LinkedList

`ArrayList` 列表底层是数组实现的，而 `LinkedList` 底层是双链表实现的，初始化方法也是类似的：

```
// 初始化一个存储 int 类型的双链表
LinkedList<Integer> nums = new LinkedList<>();

// 初始化一个存储 String 类型的双链表
LinkedList<String> strings = new LinkedList<>();
```

一般算法题中我们会用到以下方法（`E` 代表元素类型）：

```
// 判断链表是否为空
boolean isEmpty()
```

```
// 返回链表的元素个数
int size()

// 判断链表中是否存在元素 o
boolean contains(Object o)

// 在链表尾部添加元素 e
boolean add(E e)

// 在链表尾部添加元素 e
void addLast(E e)

// 在链表头部添加元素 e
void addFirst(E e)

// 删除链表头部第一个元素
E removeFirst()

// 删除链表尾部最后一个元素
E removeLast()
```

这些也都是最简单的方法，和 `ArrayList` 不同的是，我们更多地使用了 `LinkedList` 对于头部和尾部元素的操作，因为底层数据结构为链表，直接操作头尾的元素效率较高。其中只有 `contains` 方法的时间复杂度是 `O(N)`，因为必须遍历整个链表才能判断元素是否存在。

在数据结构基础部分，我会在 动手实现链表 中带着大家实现一个 `LinkedList`，以便了解这种常见数据结构的底层原理。

5、哈希表 `HashMap`

哈希表是非常常用的数据结构，用来存储键值对映射，初始化方法：

```
// 整数映射到字符串的哈希表
HashMap<Integer, String> map = new HashMap<>();

// 字符串映射到数组的哈希表
HashMap<String, int[]> map = new HashMap<>();
```

在算法题中，我们只会用以下几个基本方法（`K` 代表键的类型，`V` 代表值的类型）：

```
// 判断哈希表中是否存在键 key
boolean containsKey(Object key)

// 获得键 key 对应的值，若 key 不存在，则返回 null
V get(Object key)

// 将 key, value 键值对存入哈希表
V put(K key, V value)
```

```
// 如果 key 存在，删除 key 并返回对应的值
V remove(Object key)
```

6、哈希集合 HashSet

初始化方法：

```
// 新建一个存储 String 的哈希集合
Set<String> set = new HashSet<>();
```

我们可能在算法题中用到的方法（E 表示元素类型）：

```
// 如果 e 不存在，则添加 e 到哈希集合
boolean add(E e)

// 判断元素 o 是否存在于哈希集合中
boolean contains(Object o)

// 如果元素 o 存在，在删除元素 o
boolean remove(Object o)
```

等你实现了 MyHashMap，就知道 HashSet 底层和 HashMap 其实是一样的。

Java 类的一些基本用法

首先说一下泛型编程。泛型是 Java 提供的一种模板，能够将数据结构的实现和数据类型解耦。

比如说我们在使用 LinkedList 双链表的时候，可以随意设置其中的元素类型。不过需要注意，在泛型中只能使用类，不能使用原始类型：

```
// 装整数的双链表
LinkedList<Integer> list1 = new LinkedList<>();
// 报错，不能用 int 这种原始类型作为泛型
LinkedList<int> list2 = new LinkedList<>();

// 装字符串的双链表
LinkedList<String> list3 = new LinkedList<>();
```

我们在实现自己的数据结构类时，也需要使用泛型，以便我们的数据结构能够装任何类型。

比如在 手把手带你实现 LinkedList 中实现的 MyLinkedList，在 new 的时候传入什么类型，那么这个 E 就会变成什么类型：

```
public class MyLinkedList<E> {

    // 在链表尾部添加元素
    public void addLast(E e) {
        // ...
    }
}

// 使用方法：
MyLinkedList<Integer> list1 = new MyLinkedList<>();
MyLinkedList<String> list2 = new MyLinkedList<>();
```

当然，某些特殊数据结构对存储的数据类型有要求。比如 TreeMap 这种数据结构，由于底层是用 BST（二叉搜索树）来存储键值对，所以 TreeMap 要求存入其中的键必须是「可比较的」，即对于任意两个键，必须能够知道它俩谁大谁小。

在 Java 中，可以给泛型变量添加 extends 来指定该泛型的某些特性：

```
// MyTreeMap 接收两个泛型 K 和 V，其中 K 必须实现 Comparable 接口
// 即必须实现 compareTo 方法，这样才可以比较大小
public class MyTreeMap<K extends Comparable<K>, V> {
    public V put(K key, V val) {
        // ...
    }
}

// 使用方法：
MyTreeMap<Integer, Integer> map1 = new MyTreeMap<>();
MyTreeMap<String, Integer> map2 = new MyTreeMap<>();
```

这个 Comparable 是 Java 标准库提供的一个接口，实现如下：

```
public interface Comparable<T> {
    public int compareTo(T o);
}
```

所以 K extends Comparable<K> 的意思就是说，泛型 K 实现了这个接口，即类型 K 有 compareTo 这个方法，这意味着两个 K 类型的数据可以比较大小。

另外再说下 Java 的接口，免得有些读者疑惑。我们有时候会看到这样的写法：

```
Queue<String> q = new LinkedList<>();
List<String> list = new LinkedList<>();
```

实际 new 出来的是 LinkedList 类型，但为什么用 Queue 类型和 List 类型接收呢？因为 Queue 和 List 都是 Java 标准库中的接口类型：

```
public interface Queue<E> extends Collection<E> {
    boolean offer(E e);
    E poll();
    E peek();
    // 还有若干方法...
}

public interface List<E> extends Collection<E> {
    // 若干方法...
}
```

所谓接口，就是一组方法的集合，只要一个类使用 implements 关键词申明自己实现了接口中的所有方法，那么就可以用这个接口的类型来接收这个类的实例化对象。

具体地，标准库提供的 LinkedList 类实现了 List 接口中的所有方法：

```
// Deque 是 Queue 的子接口，包含了 Queue 接口的所有方法，所以实现了 Deque 就等于实现了 Queue 接口
// 还有若干接口，这里省略了
public class LinkedList<E> implements List<E>, Deque<E> {
    // ...

    // Queue 接口中声明的若干方法都会被实现
    boolean offer(E e) {...}
    E poll() {...}
    E peek() {...}
    // ...

    // List 接口的若干方法也都会被实现
    // ...
}
```

所以可以用 List 接口接收 LinkedList 类型，Queue 接口同理。

当然，编程语言的接口和继承往深里说有很多设计方法的学问，大家有兴趣可以自己搜索学习。因为我们当前的重点在数据结构和算法，所以掌握这些最最基本的知识完全足够你理解我写的 Java 算法代码了。

无剑篇、刷题心法

我每周在视频号直播的时候都有读者问我，如何高效刷题，刷完题目过几天又忘了怎么办之类的问题。

这些问题对于初学者来说肯定是难免的，但如果学了挺久算法还有这种问题，那大概率是方法有问题了。

什么是好的学习方式？能够做到刷一道题懂十道题，举一反十，这就是好的学习方式，不然的话现在力扣两千多道题，全给他刷完的话还干不干别的事情了？

我在公众号经常强调的**框架思维**，就是帮助大家培养举一反三的能力。

做题做错没关系，只要你能够跳出细节，从整体上理解各种技巧的底层逻辑，那不仅下一次能作对，而且再把题目给你变十个花样，你还是能做对，爽不爽？

第一章不会列举什么具体的算法技巧，就是单纯的思维模式，也许对于初学者来说不太能理解其中的奥妙，相信在之后的题目实践中会逐渐体会出一点意思的。

学习算法和刷题的框架思维

Stars 123k 精品课程 查看 知乎 @labuladong B站 @labuladong

微信搜一搜 labuladong公众号

学算法认准 labuladong，致力于把算法讲清楚！网页版 点这里。

> tip：本文有视频版：学习数据结构和算法的框架思维。建议关注我的 B 站账号，我会用视频领读的方式带大家学习那些稍有难度的算法技巧。

这是好久之前的一篇文章 学习数据结构和算法的框架思维 的修订版。之前那篇文章收到广泛好评，没看过也没关系，这篇文章会涵盖之前的所有内容，并且会举很多代码的实例，教你如何使用框架思维。

首先，这里讲的都是普通的数据结构，咱不是搞算法竞赛的，咱的目的是迅速提升算法能力，培养算法思维，真没必要整太偏太怪的题目。另外，以下是我个人的经验的总结，没有哪本算法书会写这些东西，所以请读者试着理解我的角度，别纠结于细节问题，因为这篇文章就是希望帮你对数据结构和算法建立一个框架性的认识。

从整体到细节，自顶向下，从抽象到具体的框架思维是通用的，不只是学习数据结构和算法，学习其他任何知识都是高效的。

一、数据结构的存储方式

数据结构的存储方式只有两种：数组（顺序存储）和链表（链式存储）。

这句话怎么理解，不是还有散列表、栈、队列、堆、树、图等等各种数据结构吗？

我们分析问题，一定要有递归的思想，自顶向下，从抽象到具体。你上来就列出这么多，那些都属于「上层建筑」，而数组和链表才是「结构基础」。因为那些多样化的数据结构，究其源头，都是在链表或者数组上的特殊操作，API 不同而已。

比如说「队列」、「栈」这两种数据结构既可以使用链表也可以使用数组实现。用数组实现，就要处理扩容缩容的问题；用链表实现，没有这个问题，但需要更多的内存空间存储节点指针。

「图」的两种表示方法，邻接表就是链表，邻接矩阵就是二维数组。邻接矩阵判断连通性迅速，并可以进行矩阵运算解决一些问题，但是如果图比较稀疏的话很耗费空间。邻接表比较节省空间，但是很多操作的效率上肯定比不过邻接矩阵。

「散列表」就是通过散列函数把键映射到一个大数组里。而且对于解决散列冲突的方法，拉链法需要链表特性，操作简单，但需要额外的空间存储指针；线性探查法就需要数组特性，以便连续寻址，不需要指针的存储空间，但操作稍微复杂些。

「树」，用数组实现就是「堆」，因为「堆」是一个完全二叉树，用数组存储不需要节点指针，操作也比较简单；用链表实现就是很常见的那种「树」，因为不一定是完全二叉树，所以不适合用数组存储。为此，在

这种链表「树」结构之上，又衍生出各种巧妙的设计，比如二叉搜索树、AVL 树、红黑树、区间树、B 树等等，以应对不同的问题。

了解 Redis 数据库的朋友可能也知道，Redis 提供列表、字符串、集合等等几种常用数据结构，但是对于每种数据结构，底层的存储方式都至少有两种，以便于根据存储数据的实际情况使用合适的存储方式。

综上，数据结构种类很多，甚至你也可以发明自己的数据结构，但是底层存储无非数组或者链表，**二者的优缺点如下**：

数组由于是紧凑连续存储,可以随机访问，通过索引快速找到对应元素，而且相对节约存储空间。但正因为连续存储，内存空间必须一次性分配够，所以说数组如果要扩容，需要重新分配一块更大的空间，再把数据全部复制过去，时间复杂度 O(N)；而且你如果想在数组中间进行插入和删除，每次必须搬移后面的所有数据以保持连续，时间复杂度 O(N)。

链表因为元素不连续，而是靠指针指向下一个元素的位置，所以不存在数组的扩容问题；如果知道某一元素的前驱和后驱，操作指针即可删除该元素或者插入新元素，时间复杂度 O(1)。但是正因为存储空间不连续，你无法根据一个索引算出对应元素的地址，所以不能随机访问；而且由于每个元素必须存储指向前后元素位置的指针，会消耗相对更多的储存空间。

二、数据结构的基本操作

对于任何数据结构，其基本操作无非遍历 + 访问，再具体一点就是：增删查改。

数据结构种类很多，但它们存在的目的都是在不同的应用场景，尽可能高效地增删查改。话说这不就是数据结构的使命么？

如何遍历 + 访问？我们仍然从最高层来看，各种数据结构的遍历 + 访问无非两种形式：线性的和非线性的。

线性就是 for/while 迭代为代表，非线性就是递归为代表。再具体一步，无非以下几种框架：

数组遍历框架，典型的线性迭代结构：

```
void traverse(int[] arr) {
    for (int i = 0; i < arr.length; i++) {
        // 迭代访问 arr[i]
    }
}
```

链表遍历框架，兼具迭代和递归结构：

```
/* 基本的单链表节点 */
class ListNode {
    int val;
    ListNode next;
}

void traverse(ListNode head) {
    for (ListNode p = head; p != null; p = p.next) {
        // 迭代访问 p.val
```

```
    }
}

void traverse(ListNode head) {
    // 递归访问 head.val
    traverse(head.next);
}
```

二叉树遍历框架，典型的非线性递归遍历结构：

```
/* 基本的二叉树节点 */
class TreeNode {
    int val;
    TreeNode left, right;
}

void traverse(TreeNode root) {
    traverse(root.left);
    traverse(root.right);
}
```

你看二叉树的递归遍历方式和链表的递归遍历方式，相似不？再看看二叉树结构和单链表结构，相似不？如果再多几条叉，N 叉树你会不会遍历？

二叉树框架可以扩展为 N 叉树的遍历框架：

```
/* 基本的 N 叉树节点 */
class TreeNode {
    int val;
    TreeNode[] children;
}

void traverse(TreeNode root) {
    for (TreeNode child : root.children)
        traverse(child);
}
```

N 叉树的遍历又可以扩展为图的遍历，因为图就是好几 N 叉棵树的结合体。你说图是可能出现环的？这个很好办，用个布尔数组 visited 做标记就行了，这里就不写代码了。

所谓框架，就是套路。不管增删查改，这些代码都是永远无法脱离的结构，你可以把这个结构作为大纲，根据具体问题在框架上添加代码就行了，下面会具体举例。

三、算法刷题指南

首先要明确的是，数据结构是工具，算法是通过合适的工具解决特定问题的方法。也就是说，学习算法之前，最起码得了解那些常用的数据结构，了解它们的特性和缺陷。

所以我建议的刷题顺序是：

1、先学习像数组、链表这种基本数据结构的常用算法，比如单链表翻转，前缀和数组，二分搜索等。

因为这些算法属于会者不难难者不会的类型，难度不大，学习它们不会花费太多时间。而且这些小而美的算法经常让你大呼精妙，能够有效培养你对算法的兴趣。

2、学会基础算法之后，不要急着上来就刷回溯算法、动态规划这类笔试常考题，而应该先刷二叉树，先刷二叉树，先刷二叉树，重要的事情说三遍。

> 力扣上有专门的二叉树题目分类：
>
> https://leetcode.cn/tag/binary-tree/

这是我这刷题多年的亲身体会，下图是我刚开始学算法的提交截图：

公众号文章的阅读数据显示，大部分人对数据结构相关的算法文章不感兴趣，而是更关心动规回溯分治等等技巧。为什么要先刷二叉树呢，**因为二叉树是最容易培养框架思维的，而且所有的递归算法技巧，本质上都是树的遍历问题**。

刷二叉树看到题目没思路？根据很多读者的问题，其实大家不是没思路，只是没有理解我们说的「框架」是什么。

不要小看这几行破代码，几乎所有二叉树的题目都是一套这个框架就出来了：

```
void traverse(TreeNode root) {
    // 前序位置
    traverse(root.left);
    // 中序位置
    traverse(root.right);
```

```
    // 后序位置
}
```

比如说我随便拿几道题的解法出来，不用管具体的代码逻辑，只要看看框架在其中是如何发挥作用的就行。

力扣第 124 题，难度困难，让你求二叉树中最大路径和，主要代码如下：

```
int res = Integer.MIN_VALUE;
int oneSideMax(TreeNode root) {
    if (root == null) return 0;
    int left = max(0, oneSideMax(root.left));
    int right = max(0, oneSideMax(root.right));
    // 后序位置
    res = Math.max(res, left + right + root.val);
    return Math.max(left, right) + root.val;
}
```

注意递归函数的位置，这就是个后序遍历嘛，无非就是把 `traverse` 函数名字改成 `oneSideMax` 了。

力扣第 105 题，难度中等，让你根据前序遍历和中序遍历的结果还原一棵二叉树，很经典的问题吧，主要代码如下：

```
TreeNode build(int[] preorder, int preStart, int preEnd,
               int[] inorder, int inStart, int inEnd) {
    // 前序位置，寻找左右子树的索引
    if (preStart > preEnd) {
        return null;
    }
    int rootVal = preorder[preStart];
    int index = 0;
    for (int i = inStart; i <= inEnd; i++) {
        if (inorder[i] == rootVal) {
            index = i;
            break;
        }
    }
    int leftSize = index - inStart;
    TreeNode root = new TreeNode(rootVal);

    // 递归构造左右子树
    root.left = build(preorder, preStart + 1, preStart + leftSize,
                      inorder, inStart, index - 1);
    root.right = build(preorder, preStart + leftSize + 1, preEnd,
                       inorder, index + 1, inEnd);
    return root;
}
```

不要看这个函数的参数很多，只是为了控制数组索引而已。注意找递归函数 `build` 的位置，本质上该算法也就是一个前序遍历，因为它在前序遍历的位置加了一坨代码逻辑。

力扣第 230 题，难度中等，寻找二叉搜索树中的第 `k` 小的元素，主要代码如下：

```
int res = 0;
int rank = 0;
void traverse(TreeNode root, int k) {
    if (root == null) {
        return;
    }
    traverse(root.left, k);
    /* 中序遍历代码位置 */
    rank++;
    if (k == rank) {
        res = root.val;
        return;
    }
    /*****************/
    traverse(root.right, k);
}
```

这不就是个中序遍历嘛，对于一棵 BST 中序遍历意味着什么，应该不需要解释了吧。

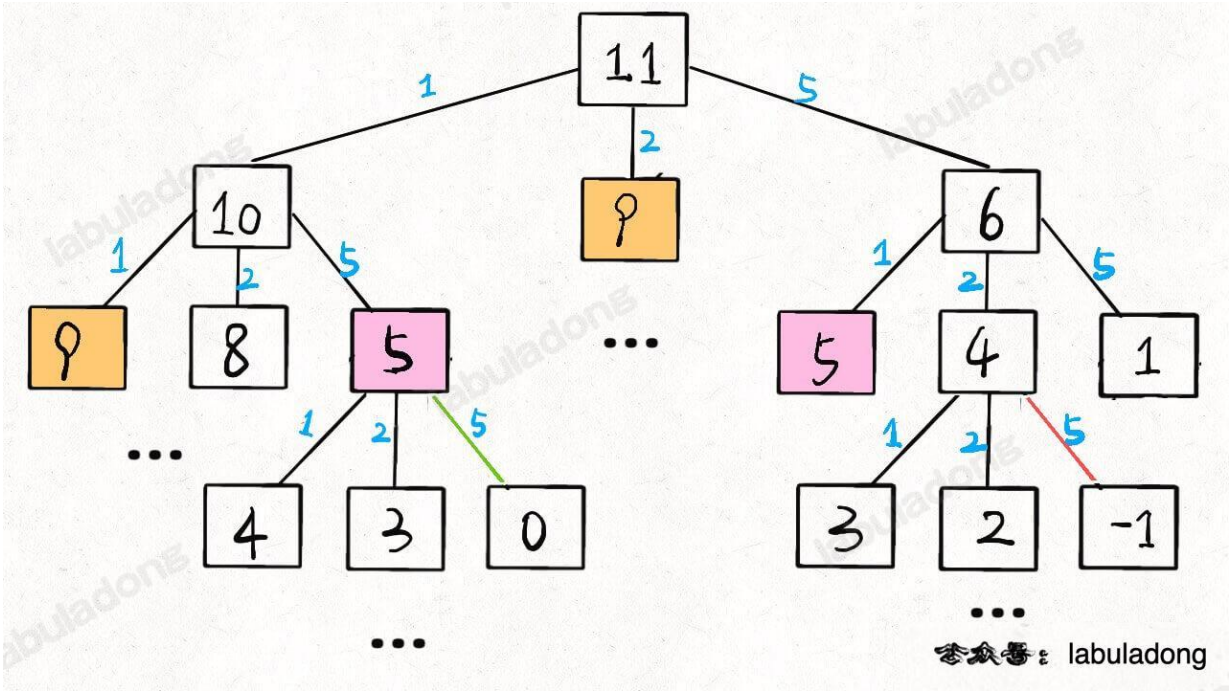
你看，二叉树的题目不过如此，只要把框架写出来，然后往相应的位置加代码就行了，这不就是思路吗。

对于一个理解二叉树的人来说，刷一道二叉树的题目花不了多长时间。那么如果你对刷题无从下手或者有畏惧心理，不妨从二叉树下手，前 10 道也许有点难受；结合框架再做 20 道，也许你就有点自己的理解了；刷完整个专题，再去做什么回溯动规分治专题，**你就会发现只要涉及递归的问题，都是树的问题**。

> 本站的 二叉树专项练习章节 按照固定的公式和思维模式讲解了 150 道二叉树题目，可以手把手带你刷完二叉树分类的题目，迅速掌握递归思维。

再举例吧，说几道我们之前文章写过的问题。

动态规划详解说过凑零钱问题，暴力解法就是遍历一棵 N 叉树：




```
int dp(int[] coins, int amount) {
    // base case
    if (amount == 0) return 0;
    if (amount < 0) return -1;

    int res = Integer.MAX_VALUE;
    for (int coin : coins) {
        int subProblem = dp(coins, amount - coin);
        // 子问题无解则跳过
        if (subProblem == -1) continue;
        // 在子问题中选择最优解，然后加一
        res = Math.min(res, subProblem + 1);
    }
    return res == Integer.MAX_VALUE ? -1 : res;
}
```

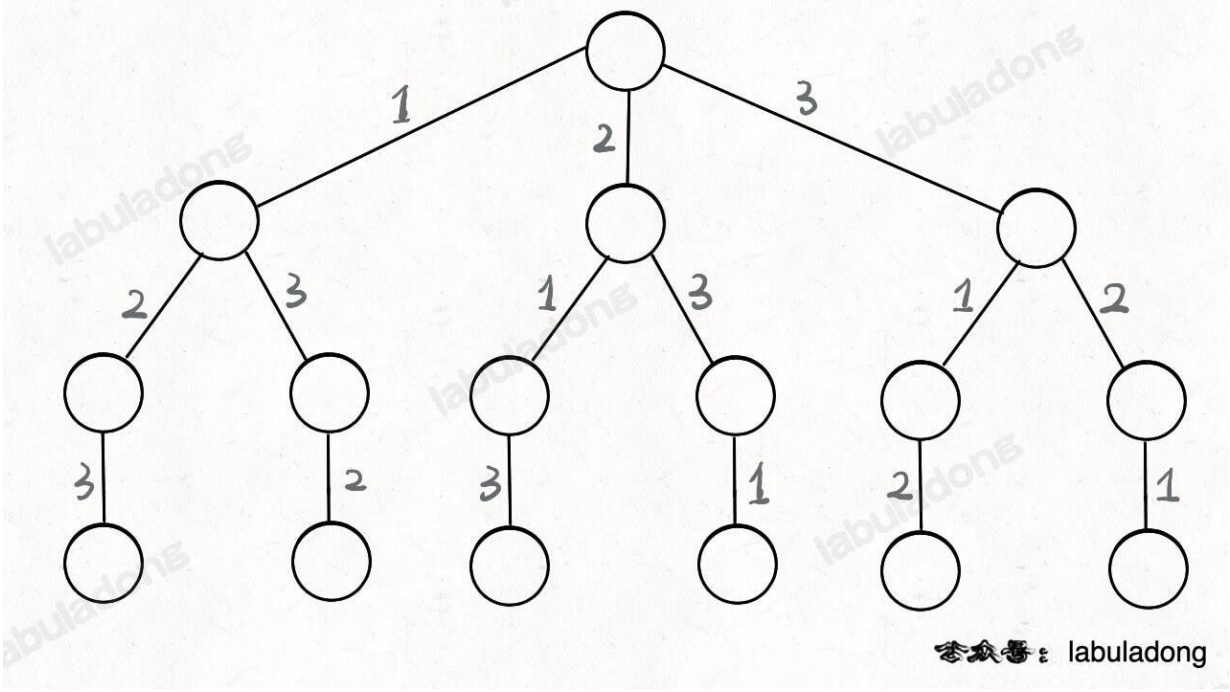
这么多代码看不懂咋办？直接提取出框架，就能看出核心思路了：

```
# 不过是一个 N 叉树的遍历问题而已
int dp(int amount) {
    for (int coin : coins) {
        dp(amount - coin);
    }
}
```

其实很多动态规划问题就是在遍历一棵树，你如果对树的遍历操作烂熟于心，起码知道怎么把思路转化成代码，也知道如何提取别人解法的核心思路。

再看看回溯算法，后文 回溯算法详解 干脆直接说了，回溯算法就是个 N 叉树的前后序遍历问题，没有例外。

比如全排列问题吧，本质上全排列就是在遍历下面这棵树，到叶子节点的路径就是一个全排列：



全排列算法的主要代码如下：

```
void backtrack(int[] nums, LinkedList<Integer> track) {
    if (track.size() == nums.length) {
        res.add(new LinkedList(track));
        return;
    }

    for (int i = 0; i < nums.length; i++) {
        if (track.contains(nums[i]))
            continue;
        track.add(nums[i]);
        // 进入下一层决策树
        backtrack(nums, track);
        track.removeLast();
    }
}
```

看不懂？没关系，把其中的递归部分抽取出来：

```
/* 提取出 N 叉树遍历框架 */
void backtrack(int[] nums, LinkedList<Integer> track) {
    for (int i = 0; i < nums.length; i++) {
        backtrack(nums, track);
}
```

N 叉树的遍历框架，找出来了吧？你说，树这种结构重不重要？

综上，对于畏惧算法的同学来说，可以先刷树的相关题目，试着从框架上看问题，而不要纠结于细节问题。

纠结细节问题，就比如纠结 `i` 到底应该加到 `n` 还是加到 `n - 1`，这个数组的大小到底应该开 `n` 还是 `n + 1`？

从框架上看问题，就是像我们这样基于框架进行抽取和扩展，既可以在看别人解法时快速理解核心逻辑，也有助于找到我们自己写解法时的思路方向。

当然，如果细节出错，你得不到正确的答案，但是只要有框架，你再错也错不到哪去，因为你的方向是对的。

但是，你要是心中没有框架，那么你根本无法解题，给了你答案，你也不会发现这就是个树的遍历问题。

这种思维是很重要的，动态规划详解 中总结的找状态转移方程的几步流程，有时候按照流程写出解法，可能自己都不知道为啥是对的，反正它就是对了。。。

这就是框架的力量，能够保证你在快睡着的时候，依然能写出正确的程序；就算你啥都不会，都能比别人高一个级别。

本文最后，总结一下吧：

数据结构的基本存储方式就是链式和顺序两种，基本操作就是增删查改，遍历方式无非迭代和递归。

学完基本算法之后，建议从「二叉树」系列问题开始刷，结合框架思维，把树结构理解到位，然后再去看回溯、动规、分治等算法专题，对思路的理解就会更加深刻。

如果你有高质量的问题，可以 点击这里 进入本文的讨论区。

▶ **引用本文的题目**

安装 我的 Chrome 刷题插件 点开下列题目可直接查看解题思路：

LeetCode	力扣
341. Flatten Nested List Iterator	341. 扁平化嵌套列表迭代器
589. N-ary Tree Preorder Traversal	589. N 叉树的前序遍历
590. N-ary Tree Postorder Traversal	590. N 叉树的后序遍历

▶ **引用本文的文章**

- Dijkstra 算法模板及应用
- labuladong 二叉树（递归）专题课
- 一文秒杀所有岛屿题目
- 东哥带你刷二叉树（序列化篇）
- 东哥带你刷二叉树（纲领篇）
- 二分图判定算法
- 二叉树的递归转迭代的代码框架
- 前缀树算法模板秒杀五道算法题
- 可视化代码编辑器使用指南
- 回溯算法秒杀所有排列/组合/子集问题

- 回溯算法解题套路框架
- 图论基础及遍历算法
- 如何 K 个一组反转链表
- 如何判断回文链表
- 归并排序详解及应用
- 我的刷题心得：算法的本质
- 数组（顺序存储）基本原理
- 浅谈存储系统：LSM 树设计原理
- 环检测及拓扑排序算法
- 用链表实现队列/栈
- 目标和问题：背包问题的变体
- 算法学习和心流体验
- 算法时空复杂度分析实用指南
- 题目不让我干什么，我偏要干什么

——————————————————

更多精品课程可查看 我的网站；扫码查看更多配套学习套件：

计算机算法的本质

Stars 123k 精品课程 查看 知乎 @labuladong B站 @labuladong

学算法认准 labuladong，致力于把算法讲清楚！网页版 点这里。

> tip：本文有视频版：学习数据结构和算法的框架思维。建议关注我的 B 站账号，我会用视频领读的方式带大家学习那些稍有难度的算法技巧。

两年前刚开这个公众号的时候，我写了一篇 学习数据结构和算法的框架思维，现在已经 5w 多阅读了，这对于一篇纯技术文来说是很牛逼的数据。

这两年在我自己不断刷题，思考和写公众号的过程中，我对算法的理解也是在逐渐加深，所以今天再写一篇，把我这两年的经验和思考浓缩成 4000 字，分享给大家。

本文主要有两部分，一是谈我对算法本质的理解，二是概括各种常用的算法。全文没有什么硬核的代码，都是我的经验之谈，也许没有多么高大上，但肯定能帮你少走弯路，更透彻地理解和掌握算法。

> 本文包含大量其他文章链接，第一次阅读本文的读者不必 DFS 学习本文，有不太理解的地方也完全可以跳过，只要对本文所总结的理论有些印象即可。等你读完本站的大部分文章后再回头来看，就可以明白我想表达的意思了。

算法的本质

> **如果要让我一句话总结，我想说算法的本质就是「穷举」。**

这么说肯定有人要反驳了，真的所有算法问题的本质都是穷举吗？没有例外吗？

例外肯定是有的，比如前几天我还发了 一行代码就能解决的算法题，这些题目类似脑筋急转弯，都是通过观察，发现规律，然后找到最优解法，不过这类算法问题较少，不必特别纠结。再比如，密码学算法、机器学习算法，它们的本质确实不是穷举，而是数学原理的编程实现，所以这类算法的本质是数学，不在我们所探讨的「数据结构和算法」的范畴之内。

顺便强调下，「算法工程师」做的这个「算法」，和「数据结构与算法」中的这个「算法」完全是两码事，免得一些初学读者误解。

对前者来说，重点在数学建模和调参经验，计算机真就只是拿来做计算的工具而已；而后者的重点是计算机思维，需要你能够站在计算机的视角，抽象、化简实际问题，然后用合理的数据结构去解决问题。

所以，你千万别以为学好了数据结构和算法就能去做算法工程师，也不要以为只要不做算法工程师就不需要学习数据结构和算法。坦白说，大部分开发岗位工作中都是基于现成的开发框架做事，不怎么会碰到底层数据结构和算法相关的问题，但另一个事实是，只要你想找技术相关的岗位，数据结构和算法的考察是绕不开的，因为这块知识点是公认的程序员基本功。

为了区分，不妨称算法工程师研究的算法为「数学算法」，称刷题面试的算法为「计算机算法」，我写的内容主要聚焦的是「计算机算法」。

这样解释应该很清楚了吧，我猜大部分人的目标是通过算法笔试，找一份开发岗位的工作，所以你真的不需要有多少数学基础，只要学会用计算机思维解决问题就够了。

其实计算机思维也没什么高端的，你想想计算机的特点是啥？不就是快嘛，你的脑回路一秒只能转一圈，人家 CPU 转几万圈无压力。所以计算机解决问题的方式大道至简，就是穷举。

我记得自己刚入门的时候，也觉得计算机算法是一个很高大上的东西，每见到一道题，就想着能不能推导出一个什么数学公式，啪的一下就能把答案算出来。

比如你和一个没学过计算机算法的人说你写了个计算排列组合的算法，他大概以为你发明了一个公式，可以直接算出所有排列组合。但实际上呢？没什么高大上的公式，后文 回溯算法秒杀排列组合子集问题 写了，其实就是把排列组合问题抽象成一棵多叉树结构，然后用回溯算法去暴力穷举。

对计算机算法的误解也许是以前学数学留下的「后遗症」，数学题一般都是你仔细观察，找几何关系，列方程，然后算出答案。如果说你需要进行大规模穷举来寻找答案，那大概率是你的解题思路出问题了。

而计算机解决问题的思维恰恰相反：有没有什么数学公式就交给你们人类去推导吧，如果能找到一些巧妙的定理那最好，但如果找不到，那就穷举呗，反正只要复杂度允许，没有什么答案是穷举不出来的，理论上讲只要不断随机打乱一个数组，总有一天能得到有序的结果呢！当然，这绝不是一个好算法，因为鬼知道它要运行多久才有结果。

技术岗笔试面试考的那些算法题，求个最大值最小值什么的，你怎么求？必须得把所有可行解穷举出来才能找到最值对吧，说白了不就这么点事儿么。

但是，你千万不要觉得穷举这个事儿很简单，穷举有两个关键难点：无遗漏、无冗余。

遗漏，会直接导致答案出错，比如让你求最小值，你穷举时恰好把那个答案漏掉了，这不就错了嘛；冗余，会拖慢算法的运行速度，比如你的代码把完全相同的计算流程重复了十遍，那你的算法不就满了十倍么，就有可能超过判题平台的时间限制。

所以，当你看到一道算法题，可以从这两个维度去思考：

1、如何穷举？即无遗漏地穷举所有可能解。

2、如何聪明地穷举？即避免所有冗余的计算，消耗尽可能少的资源求出答案。

不同类型的题目，难点是不同的，有的题目难在「如何穷举」，有的题目难在「如何聪明地穷举」。

什么算法的难点在「如何穷举」呢？一般是递归类问题，最典型的就是动态规划系列问题。

后文 动态规划核心套路 阐述了动态规划系列问题的核心原理，无非就是先写出暴力穷举解法（状态转移方程），加个备忘录就成自顶向下的递归解法了，再改一改就成自底向上的递推迭代解法了，动态规划的降维打击 里也讲过如何分析优化动态规划算法的空间复杂度。

上述过程就是在不断优化算法的时间、空间复杂度，也就是所谓「如何聪明地穷举」。这些技巧一听就会了，但很多读者留言说明白了这些原理，遇到动态规划题目还是不会做，因为想不出状态转移方程，第一步的暴力解法都写不出来。

这很正常，因为动态规划类型的题目可以千奇百怪，找状态转移方程才是难点，所以才有了 动态规划设计方法：数学归纳法 这篇文章，告诉你递归穷举的核心是数学归纳法，明确函数的定义，然后利用这个定义写递归函数，就可以穷举出所有可行解。

什么算法的难点在「如何聪明地穷举」呢？一些耳熟能详的非递归算法技巧，都可以归在这一类。

比如后文 Union Find 并查集算法详解 告诉你一种高效计算连通分量的技巧，理论上说，想判断两个节点是否连通，我用 DFS/BFS 暴力搜索（穷举）肯定可以做到，但人家 Union Find 算法硬是用数组模拟树结构，给你把连通性相关的操作复杂度给干到 `O(1)` 了。

这就属于聪明地穷举，大佬们把这些技巧发明出来，你学过就会用，没学过恐怕很难想出这种思路。

再比如贪心算法技巧，前文 当老司机学会贪心算法 就告诉你，所谓贪心算法就是在题目中发现一些规律（专业点叫贪心选择性质），使得你不用完整穷举所有解就可以得出答案。

人家动态规划好歹是无冗余地穷举所有解，然后找一个最值，你贪心算法可好，都不用穷举所有解就可以找到答案，所以前文 贪心算法解决跳跃游戏 中贪心算法的效率比动态规划还高。当然，并不是所有问题都存在贪心选择性质让你投机取巧，所以全量穷举虽然朴实无华且枯燥，但真的是任何情况下都可以用的。

再比如大名鼎鼎的 KMP 算法，你写个字符串暴力匹配算法很容易，但你发明个 KMP 算法试试？KMP 算法的本质是聪明地缓存并复用一些信息，减少了冗余计算，前文 KMP 字符匹配算法 就是使用状态机的思路实现的 KMP 算法。

下面我概括性地列举一些常见的算法技巧，供大家学习参考。

数组/单链表系列算法

单链表常考的技巧就是双指针，后文 单链表六大技巧 全给你总结好了，这些技巧就是会者不难，难者不会。

比如判断单链表是否成环，拍脑袋的暴力解是什么？就是用一个 `HashSet` 之类的数据结构来缓存走过的节点，遇到重复的就说明有环对吧。但我们用快慢指针可以避免使用额外的空间，这就是聪明地穷举嘛。

当然，对于找链表中点这种问题，使用双指针技巧只是显示你学过这个技巧，和遍历两次链表的常规解法从时间空间复杂度的角度来说都是差不多的。

数组常用的技巧有很大一部分还是双指针相关的技巧，说白了是教你如何聪明地进行穷举。

首先说二分搜索技巧，可以归为两端向中心的双指针。如果让你在数组中搜索元素，一个 for 循环穷举肯定能搞定对吧，但如果数组是有序的，二分搜索不就是一种更聪明的搜索方式么。

后文 二分搜索框架详解 给你总结了二分搜索代码模板，保证不会出现搜索边界的问题。后文 二分搜索算法运用 给你总结了二分搜索相关题目的共性以及如何将二分搜索思想运用到实际算法中。

类似的两端向中心的双指针技巧还有力扣上的 N 数之和系列问题，前文 一个函数秒杀所有 nSum 问题 讲了这些题目的共性，甭管几数之和，解法肯定要穷举所有的数字组合，然后看看那个数字组合的和等于目标和嘛。比较聪明的方式是先排序，利用双指针技巧快速计算结果。

再说说 滑动窗口算法技巧，典型的快慢双指针，快慢指针中间就是滑动的「窗口」，主要用于解决子串问题。

文中最小覆盖子串这道题，让你寻找包含特定字符的最短子串，常规拍脑袋解法是什么？那肯定是类似字符串暴力匹配算法，用嵌套 for 循环穷举呗，平方级的复杂度。而滑动窗口技巧告诉你不用这么麻烦，可以用快慢指针遍历一次就求出答案，这就是教你聪明的穷举技巧。

还有回文串相关技巧，如果判断一个串是否是回文串，使用双指针从两端向中心检查，如果寻找回文子串，就从中心向两端扩散。后文 最长回文子串 使用了一种技巧同时处理了回文串长度为奇数或偶数的情况。

当然，寻找最长回文子串可以有更精妙的马拉车算法（Manacher 算法），不过，学习这个算法的性价比不高，有兴趣的读者可以自己了解一下。

最后说说 前缀和技巧 和 差分数组技巧。

如果频繁地让你计算子数组的和，每次用 for 循环去遍历肯定没问题，但前缀和技巧预计算一个 `preSum` 数组，就可以避免循环。

类似的，如果频繁地让你对子数组进行增减操作，也可以每次用 for 循环去操作，但差分数组技巧维护一个 `diff` 数组，也可以避免循环。

数组链表的技巧差不多就这些了，都比较固定，只要你都见过，运用出来的难度不算大，下面来说一说稍微有些难度的算法。

二叉树系列算法

老读者都知道，二叉树的重要性我之前说了无数次，因为二叉树模型几乎是所有高级算法的基础，尤其是那么多人说对递归的理解不到位，更应该好好刷二叉树相关题目。

> 在本站的二叉树章节，我会按照固定的公式和思维模式讲解了 150 道二叉树题目，可以手把手带你刷完二叉树分类的题目，迅速掌握递归思维。

东哥带你刷二叉树（纲领篇） 说过，二叉树题目的递归解法可以分两类思路，第一类是遍历一遍二叉树得出答案，第二类是通过分解问题计算出答案，这两类思路分别对应着 回溯算法核心框架 和 动态规划核心框架。

什么叫通过遍历一遍二叉树得出答案？

就比如说计算二叉树最大深度这个问题让你实现 `maxDepth` 这个函数，你这样写代码完全没问题：

```
class Solution {

    // 记录最大深度
    int res = 0;
    int depth = 0;

    // 主函数
    int maxDepth(TreeNode root) {
        traverse(root);
        return res;
```

```
    }

    // 二叉树遍历框架
    void traverse(TreeNode root) {
        if (root == null) {
            // 到达叶子节点
            res = Math.max(res, depth);
            return;
        }
        // 前序遍历位置
        depth++;
        traverse(root.left);
        traverse(root.right);
        // 后序遍历位置
        depth--;
    }
}
```

这个逻辑就是用 `traverse` 函数遍历了一遍二叉树的所有节点，维护 `depth` 变量，在叶子节点的时候更新最大深度。

你看这段代码，有没有觉得很熟悉？能不能和回溯算法的代码模板对应上？

不信你照着 回溯算法核心框架 中全排列问题的代码对比下：

```
class Solution {

    // 记录所有全排列
    List<List<Integer>> res = new LinkedList<>();
    LinkedList<Integer> track = new LinkedList<>();

    /* 主函数，输入一组不重复的数字，返回它们的全排列 */
    List<List<Integer>> permute(int[] nums) {
        backtrack(nums);
        return res;
    }

    // 回溯算法框架
    void backtrack(int[] nums) {
        if (track.size() == nums.length) {
            // 穷举完一个全排列
            res.add(new LinkedList(track));
            return;
        }

        for (int i = 0; i < nums.length; i++) {
            if (track.contains(nums[i]))
                continue;
            // 前序遍历位置做选择
            track.add(nums[i]);
            backtrack(nums);
            // 后序遍历位置取消选择
```

```
                track.removeLast();
            }
        }
    }
```

前文讲回溯算法的时候就告诉你回溯算法本质就是遍历一棵多叉树，连代码实现都如出一辙有没有？

而且我之前经常说，回溯算法虽然简单粗暴效率低，但特别有用，因为如果你对一道题无计可施，回溯算法起码能帮你写一个暴力解捞点分对吧。

那什么叫通过分解问题计算答案？

同样是计算二叉树最大深度这个问题，你也可以写出下面这样的解法：

```
// 定义：输入根节点，返回这棵二叉树的最大深度
int maxDepth(TreeNode root) {
    if (root == null) {
        return 0;
    }
    // 递归计算左右子树的最大深度
    int leftMax = maxDepth(root.left);
    int rightMax = maxDepth(root.right);
    // 整棵树的最大深度
    int res = Math.max(leftMax, rightMax) + 1;

    return res;
}
```

你看这段代码，有没有觉得很熟悉？有没有觉得有点动态规划解法代码的形式？

不信你看 动态规划核心框架 中凑零钱问题的暴力穷举解法：

```
// 定义：输入金额 amount，返回凑出 amount 的最少硬币个数
int coinChange(int[] coins, int amount) {
    // base case
    if (amount == 0) return 0;
    if (amount < 0) return -1;

    int res = Integer.MAX_VALUE;
    for (int coin : coins) {
        // 递归计算凑出 amount - coin 的最少硬币个数
        int subProblem = coinChange(coins, amount - coin);
        if (subProblem == -1) continue;
        // 凑出 amount 的最少硬币个数
        res = Math.min(res, subProblem + 1);
    }

    return res == Integer.MAX_VALUE ? -1 : res;
}
```

这个暴力解法加个 memo 备忘录就是自顶向下的动态规划解法，你对照二叉树最大深度的解法代码，有没有发现很像？

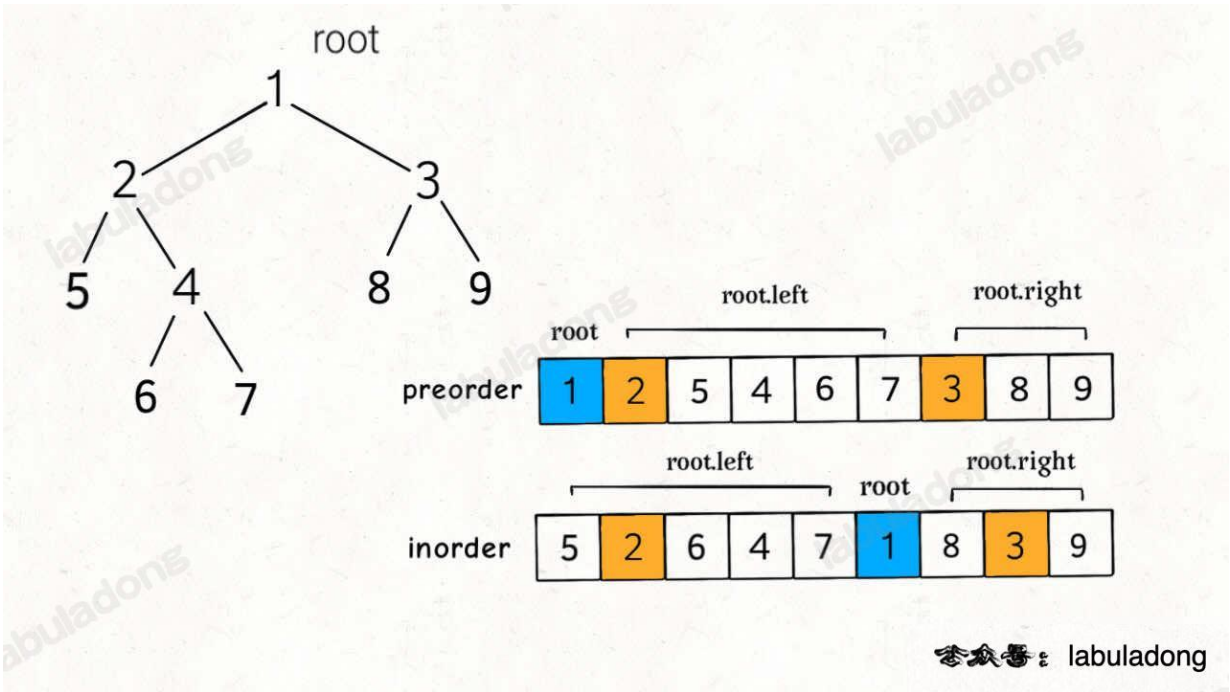
如果你感受到最大深度这个问题两种解法的区别，那就趁热打铁，我问你，二叉树的前序遍历怎么写？

我相信大家都会对这个问题嗤之以鼻，毫不犹豫就可以写出下面这段代码：

```
List<Integer> res = new LinkedList<>();

// 返回前序遍历结果
List<Integer> preorder(TreeNode root) {
    traverse(root);
    return res;
}

// 二叉树遍历函数
void traverse(TreeNode root) {
    if (root == null) {
        return;
    }
    // 前序遍历位置
    res.add(root.val);
    traverse(root.left);
    traverse(root.right);
}
```

但是，你结合上面说到的两种不同的思维模式，二叉树的遍历是否也可以通过分解问题的思路解决呢？

我们后文 手把手刷二叉树（第二期） 说过前中后序遍历结果的特点：



你注意前序遍历的结果，根节点的值在第一位，后面接着左子树的前序遍历结果，最后接着右子树的前序遍历结果。

有没有体会出点什么来？其实完全可以重写前序遍历代码，用分解问题的形式写出来，避免外部变量和辅助函数：

```
// 定义：输入一棵二叉树的根节点，返回这棵树的前序遍历结果
List<Integer> preorder(TreeNode root) {
    List<Integer> res = new LinkedList<>();
    if (root == null) {
        return res;
    }
    // 前序遍历的结果，root.val 在第一个
    res.add(root.val);
    // 后面接着左子树的前序遍历结果
    res.addAll(preorder(root.left));
    // 最后接着右子树的前序遍历结果
    res.addAll(preorder(root.right));
    return res;
}
```

你看，这就是用分解问题的思维模式写二叉树的前序遍历，如果写中序和后序遍历也是类似的。

当然，动态规划系列问题有「最优子结构」和「重叠子问题」两个特性，而且大多是让你求最值的。很多算法虽然不属于动态规划，但也符合分解问题的思维模式。

比如 分治算法详解 中说到的运算表达式优先级问题，其核心依然是大问题分解成子问题，只不过没有重叠子问题，不能用备忘录去优化效率罢了。

当然，除了动归、回溯（DFS）、分治，还有一个常用算法就是 BFS 了，后文 BFS 算法核心框架 就是根据下面这段二叉树的层序遍历代码改装出来的：

```
// 输入一棵二叉树的根节点，层序遍历这棵二叉树
void levelTraverse(TreeNode root) {
    if (root == null) return 0;
    Queue<TreeNode> q = new LinkedList<>();
    q.offer(root);

    int depth = 1;
    // 从上到下遍历二叉树的每一层
    while (!q.isEmpty()) {
        int sz = q.size();
        // 从左到右遍历每一层的每个节点
        for (int i = 0; i < sz; i++) {
            TreeNode cur = q.poll();

            if (cur.left != null) {
                q.offer(cur.left);
            }
            if (cur.right != null) {
```

```
                q.offer(cur.right);
            }
        }
        depth++;
    }
}
```

更进一步，图论相关的算法也是二叉树算法的延续。

比如 图论基础，环判断和拓扑排序 和 二分图判定算法 就用到了 DFS 算法；再比如 Dijkstra 算法模板，就是改造版 BFS 算法加上一个类似 dp table 的数组。

好了，说的差不多了，上述这些算法的本质都是穷举二（多）叉树，有机会的话通过剪枝或者备忘录的方式减少冗余计算，提高效率，就这么点事儿。

最后总结

上周在视频号直播的时候，有读者问我什么刷题方式是正确的，我说正确的刷题方式应该是刷一道题能获得刷十道题的效果，不然力扣现在 2000 道题目，你都打算刷完么？

那么怎么做到呢？学习数据结构和算法的框架思维 说了，要有框架思维，学会提炼重点，一个算法技巧可以包装出一百道题，如果你能一眼看穿它的本质，那就没必要浪费时间刷了嘛。

同时，在做题的时候要思考，联想，进而培养举一反三的能力。

后文 Dijkstra 算法模板 并不是真的是让你去背代码模板，不然的话直接甩出来那一段代码不就行了，我从层序遍历讲到 BFS 讲到 Dijkstra，说这么多废话干什么？

说到底我还是希望爱思考的读者能培养出成体系的算法思维，最好能爱上算法，而不是单纯地看题解去做题，授人以鱼不如授人以渔嘛。

本文就到这里吧，**算法真的没啥难的，只要有心，谁都可以学好**。分享是一种美德，如果本文对你有启发，欢迎分享给需要的朋友。

如果你有高质量的问题，可以 点击这里 进入本文的讨论区。

▶ **引用本文的题目**

安装 我的 Chrome 刷题插件 点开下列题目可直接查看解题思路：

LeetCode	力扣
104. Maximum Depth of Binary Tree	104. 二叉树的最大深度
112. Path Sum	112. 路径总和
117. Populating Next Right Pointers in Each Node II	117. 填充每个节点的下一个右侧节点指针 II
1214. Two Sum BSTs🔒	1214. 查找两棵二叉搜索树之和🔒
294. Flip Game II🔒	294. 翻转游戏 II🔒
301. Remove Invalid Parentheses	301. 删除无效的括号

LeetCode	力扣
365. Water and Jug Problem	365. 水壶问题
395. Longest Substring with At Least K Repeating Characters	395. 至少有 K 个重复字符的最长子串
653. Two Sum IV - Input is a BST	653. 两数之和 IV - 输入二叉搜索树
94. Binary Tree Inorder Traversal	94. 二叉树的中序遍历
-	剑指 Offer 55 - I. 二叉树的深度
-	剑指 Offer II 056. 二叉搜索树中两个节点之和

▶ 引用本文的文章

- 东哥带你刷二叉树（纲领篇）
- 动态规划穷举的两种视角
- 算法学习和心流体验

———————————————

更多精品课程可查看 我的网站；扫码查看更多配套学习套件：

学剑篇、基础数据结构

基础数据结构包括数组、链表、队列、栈等，因为它们都比较类似，而且操作过程中不怎么涉及递归，所以我把它们归为较基础的数据结构。

公众号标签：手把手刷数据结构

1.1 数组/链表

数组链表代表着计算机最基本的两种存储形式：顺序存储和链式存储，所以他俩可以算是最基本的数据结构。

数组链表的主要算法技巧是双指针，双指针又分为中间向两端扩散的双指针、两端向中间收缩的双指针、快慢指针。

此外，数组还有前缀和和差分数组也属于必知必会的算法技巧。

公众号标签：链表双指针，数组双指针

名称	最新版本号	详情
PDF 教材	V5.2	下载
刷题打卡挑战	开放报名	报名
网站会员	V已上线	购买
Chrome 刷题插件	V4.4.3	使用手册
vscode 刷题插件	V1.5.4	使用手册
JetBrains IDE 刷题插件	V1.8.6	使用手册

小而美的算法技巧：前缀和数组

Stars 123k 精品课程 查看 知乎 @labuladong B站 @labuladong

微信搜一搜 labuladong公众号

学算法认准 labuladong，致力于把算法讲清楚！网页版 点这里。

读完本文，你不仅学会了算法套路，还可以顺便解决如下题目：

LeetCode	力扣	难度
303. Range Sum Query - Immutable	303. 区域和检索 - 数组不可变	🟢
304. Range Sum Query 2D - Immutable	304. 二维区域和检索 - 矩阵不可变	🟠
-	剑指 Offer II 013. 二维子矩阵的和	🟠

> tip：本文有视频版：前缀和/差分数组技巧精讲。建议关注我的 B 站账号，我会用视频领读的方式带大家学习那些稍有难度的算法技巧。

前缀和技巧适用于快速、频繁地计算一个索引区间内的元素之和。

一维数组中的前缀和

先看一道例题，力扣第 303 题「区域和检索 - 数组不可变」，让你计算数组区间内元素的和，这是一道标准的前缀和问题：

▼ 303. 区域和检索 - 数组不可变 Leetcode | 力扣

给定一个整数数组 `nums`，处理以下类型的多个查询:

1. 计算索引 `left` 和 `right` （包含 `left` 和 `right`）之间的 `nums` 元素的 **和**，其中 `left <= right`

实现 `NumArray` 类：

- `NumArray(int[] nums)` 使用数组 `nums` 初始化对象
- `int sumRange(int i, int j)` 返回数组 `nums` 中索引 `left` 和 `right` 之间的元素的 **总和**，包含 `left` 和 `right` 两点（也就是 `nums[left] + nums[left + 1] + ... + nums[right]`）

示例 1：

```
输入：
["NumArray", "sumRange", "sumRange", "sumRange"]
[[[-2, 0, 3, -5, 2, -1]], [0, 2], [2, 5], [0, 5]]
输出：
```

```
[null, 1, -1, -3]

解释:
NumArray numArray = new NumArray([-2, 0, 3, -5, 2, -1]);
numArray.sumRange(0, 2); // return 1 ((-2) + 0 + 3)
numArray.sumRange(2, 5); // return -1 (3 + (-5) + 2 + (-1))
numArray.sumRange(0, 5); // return -3 ((-2) + 0 + 3 + (-5) + 2 + (-1))
```

提示:

- $1 <= nums.length <= 10^4$
- $-10^5 <= nums[i] <= 10^5$
- $0 <= i <= j < nums.length$
- 最多调用 10^4 次 sumRange 方法

题目要求你实现这样一个类:

```
class NumArray {

    public NumArray(int[] nums) {}

    /* 查询闭区间 [left, right] 的累加和 */
    public int sumRange(int left, int right) {}
}
```

sumRange 函数需要计算并返回一个索引区间之内的元素和，没学过前缀和的人可能写出如下代码:

```
class NumArray {

    private int[] nums;

    public NumArray(int[] nums) {
        this.nums = nums;
    }

    public int sumRange(int left, int right) {
        int res = 0;
        for (int i = left; i <= right; i++) {
            res += nums[i];
        }
        return res;
    }
}
```

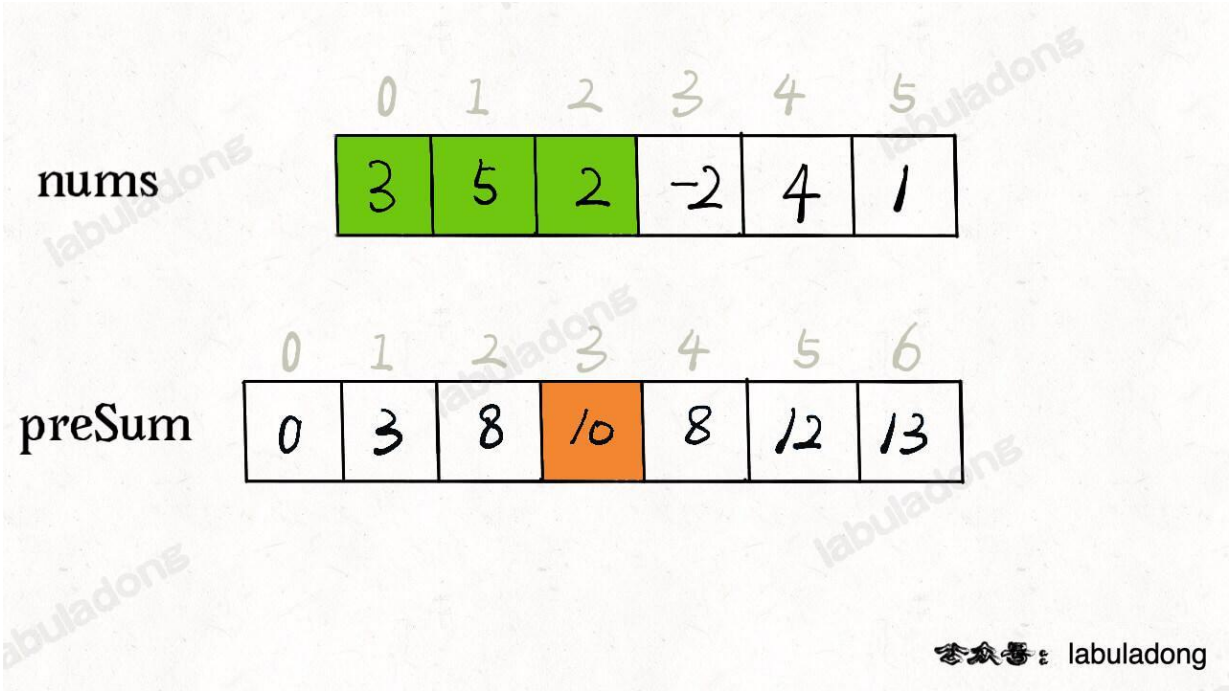
这样，可以达到效果，但是效率很差，因为 sumRange 方法会被频繁调用，而它的时间复杂度是 O(N)，其中 N 代表 nums 数组的长度。

这道题的最优解法是使用前缀和技巧，将 `sumRange` 函数的时间复杂度降为 `O(1)`，说白了就是不要在 `sumRange` 里面用 for 循环，咋整？

直接看代码实现：

```
class NumArray {
    // 前缀和数组
    private int[] preSum;

    /* 输入一个数组，构造前缀和 */
    public NumArray(int[] nums) {
        // preSum[0] = 0，便于计算累加和
        preSum = new int[nums.length + 1];
        // 计算 nums 的累加和
        for (int i = 1; i < preSum.length; i++) {
            preSum[i] = preSum[i - 1] + nums[i - 1];
        }
    }

    /* 查询闭区间 [left, right] 的累加和 */
    public int sumRange(int left, int right) {
        return preSum[right + 1] - preSum[left];
    }
}
```

核心思路是我们 new 一个新的数组 `preSum` 出来，`preSum[i]` 记录 `nums[0..i-1]` 的累加和，看图 10 = 3 + 5 + 2：



看这个 `preSum` 数组，如果我想求索引区间 `[1, 4]` 内的所有元素之和，就可以通过 `preSum[5] - preSum[1]` 得出。

这样，`sumRange` 函数仅仅需要做一次减法运算，避免了每次进行 for 循环调用，最坏时间复杂度为常数 `O(1)`。

这个技巧在生活中运用也挺广泛的，比方说，你们班上有若干同学，每个同学有一个期末考试的成绩（满分 100 分），那么请你实现一个 API，输入任意一个分数段，返回有多少同学的成绩在这个分数段内。

那么，你可以先通过计数排序的方式计算每个分数具体有多少个同学，然后利用前缀和技巧来实现分数段查询的 API：

```
int[] scores; // 存储着所有同学的分数
// 试卷满分 100 分
int[] count = new int[100 + 1]
// 记录每个分数有几个同学
for (int score : scores)
    count[score]++
// 构造前缀和
for (int i = 1; i < count.length; i++)
    count[i] = count[i] + count[i-1];

// 利用 count 这个前缀和数组进行分数段查询
```

接下来，我们看一看前缀和思路在二维数组中如何运用。

二维矩阵中的前缀和

这是力扣第 304 题「二维区域和检索 - 矩阵不可变」，其实和上一题类似，上一题是让你计算子数组的元素之和，这道题让你计算二维矩阵中子矩阵的元素之和：

▼ 304. 二维区域和检索 - 矩阵不可变 Leetcode | 力扣

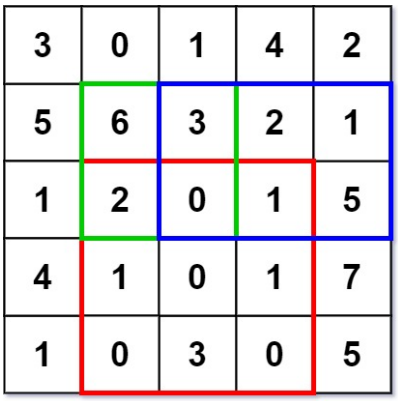
给定一个二维矩阵 `matrix`，以下类型的多个请求：

- 计算其子矩形范围内元素的总和，该子矩阵的 **左上角** 为 `(row1, col1)` ，**右下角** 为 `(row2, col2)` 。

实现 `NumMatrix` 类：

- `NumMatrix(int[][] matrix)` 给定整数矩阵 `matrix` 进行初始化
- `int sumRegion(int row1, int col1, int row2, int col2)` 返回 **左上角** `(row1, col1)` 、**右下角** `(row2, col2)` 所描述的子矩阵的元素 **总和** 。

示例 1：



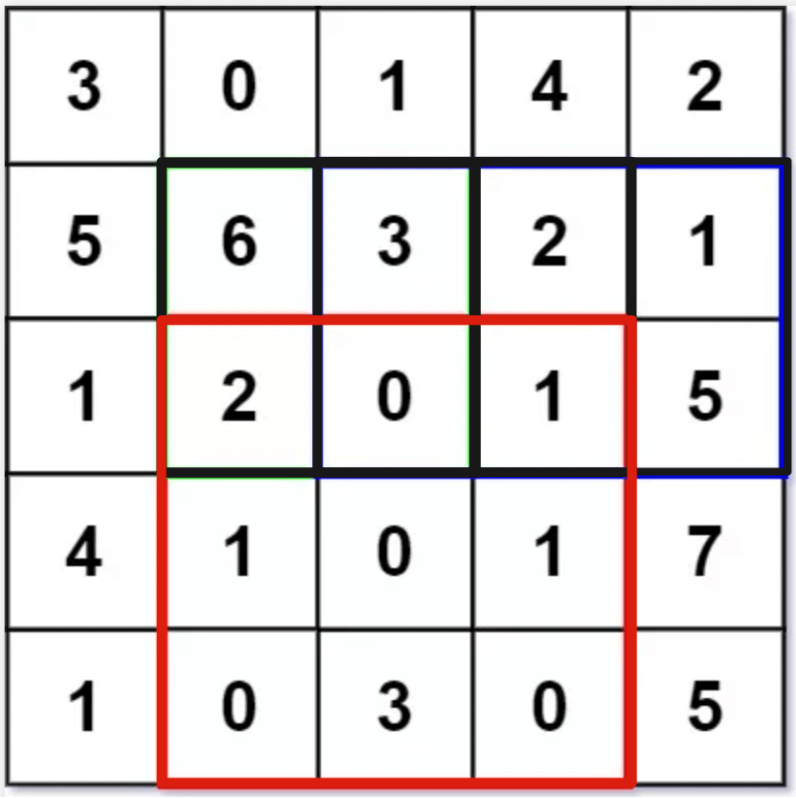
输入：
["NumMatrix","sumRegion","sumRegion","sumRegion"]
[[[[3,0,1,4,2],[5,6,3,2,1],[1,2,0,1,5],[4,1,0,1,7],[1,0,3,0,5]]],[2,1,4,3],
[1,1,2,2],[1,2,2,4]]
输出：
[null, 8, 11, 12]

解释：
NumMatrix numMatrix = new NumMatrix([[3,0,1,4,2],[5,6,3,2,1],[1,2,0,1,5],
[4,1,0,1,7],[1,0,3,0,5]]);
numMatrix.sumRegion(2, 1, 4, 3); // return 8 (红色矩形框的元素总和)
numMatrix.sumRegion(1, 1, 2, 2); // return 11 (绿色矩形框的元素总和)
numMatrix.sumRegion(1, 2, 2, 4); // return 12 (蓝色矩形框的元素总和)

提示：

- `m == matrix.length`
- `n == matrix[i].length`
- `1 <= m, n <= 200`
- -10^5 `<= matrix[i][j] <=` 10^5
- `0 <= row1 <= row2 < m`
- `0 <= col1 <= col2 < n`
- 最多调用 10^4 次 `sumRegion` 方法

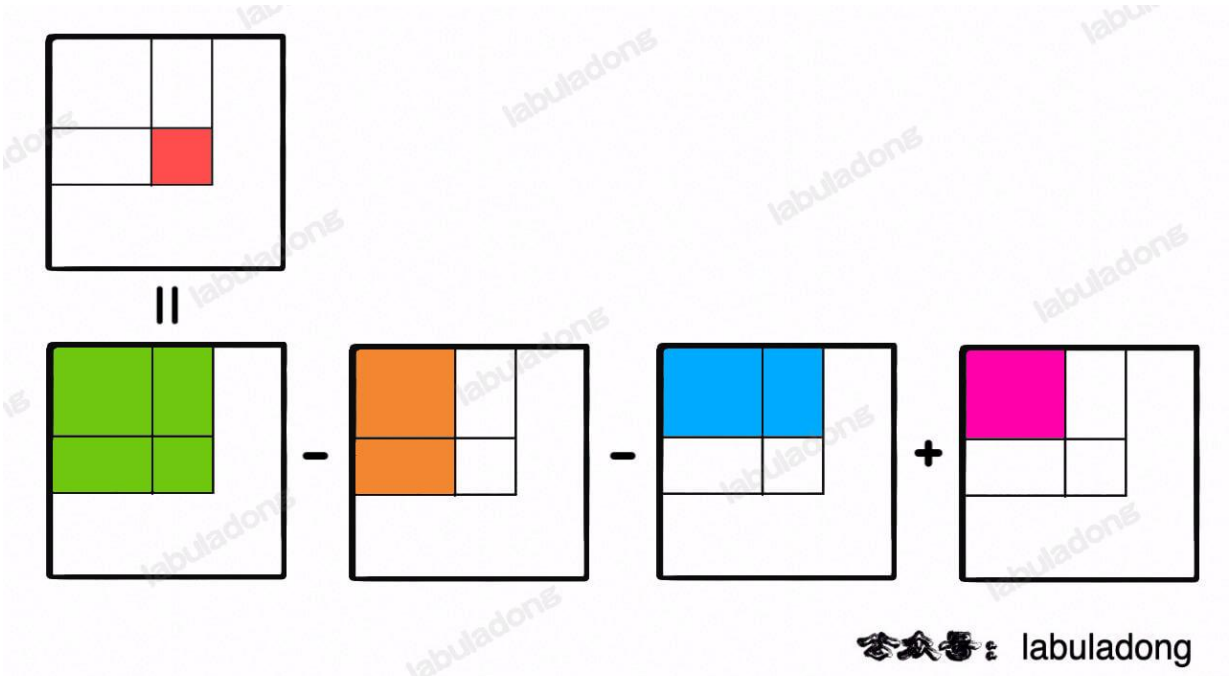
比如说输入的 `matrix` 如下图：



按照题目要求，矩阵左上角为坐标原点 `(0, 0)`，那么 `sumRegion([2,1,4,3])` 就是图中红色的子矩阵，你需要返回该子矩阵的元素和 8。

当然，你可以用一个嵌套 for 循环去遍历这个矩阵，但这样的话 `sumRegion` 函数的时间复杂度就高了，你算法的格局就低了。

注意任意子矩阵的元素和可以转化成它周边几个大矩阵的元素和的运算：



而这四个大矩阵有一个共同的特点，就是左上角都是 `(0, 0)` 原点。

那么做这道题更好的思路和一维数组中的前缀和是非常类似的，我们可以维护一个二维 `preSum` 数组，专门记录以原点为顶点的矩阵的元素之和，就可以用几次加减运算算出任何一个子矩阵的元素和：

```
class NumMatrix {
    // 定义：preSum[i][j] 记录 matrix 中子矩阵 [0, 0, i-1, j-1] 的元素和
    private int[][] preSum;

    public NumMatrix(int[][] matrix) {
        int m = matrix.length, n = matrix[0].length;
        if (m == 0 || n == 0) return;
        // 构造前缀和矩阵
        preSum = new int[m + 1][n + 1];
        for (int i = 1; i <= m; i++) {
            for (int j = 1; j <= n; j++) {
                // 计算每个矩阵 [0, 0, i, j] 的元素和
                preSum[i][j] = preSum[i-1][j] + preSum[i][j-1] + matrix[i
- 1][j - 1] - preSum[i-1][j-1];
            }
        }
    }

    // 计算子矩阵 [x1, y1, x2, y2] 的元素和
    public int sumRegion(int x1, int y1, int x2, int y2) {
        // 目标矩阵之和由四个相邻矩阵运算获得
        return preSum[x2+1][y2+1] - preSum[x1][y2+1] - preSum[x2+1][y1] +
preSum[x1][y1];
    }
}
```

这样，sumRegion 函数的时间复杂度也用前缀和技巧优化到了 O(1)，这是典型的「空间换时间」思路。

前缀和技巧就讲到这里，应该说这个算法技巧是会者不难难者不会，实际运用中还是要多培养自己的思维灵活性，做到一眼看出题目是一个前缀和问题。

除了本文举例的基本用法，前缀和数组经常和其他数据结构或算法技巧相结合，我会在 前缀和技巧高频习题 中举例讲解。

如果你有高质量的问题，可以 点击这里 进入本文的讨论区。

▶ **引用本文的题目**

安装 我的 Chrome 刷题插件 点开下列题目可直接查看解题思路：

LeetCode	力扣
1314. Matrix Block Sum	1314. 矩阵区域和
1352. Product of the Last K Numbers	1352. 最后 K 个数的乘积
238. Product of Array Except Self	238. 除自身以外数组的乘积
325. Maximum Size Subarray Sum Equals k🔒	325. 和等于 k 的最长子数组长度🔒
327. Count of Range Sum	327. 区间和的个数

LeetCode	力扣
437. Path Sum III	437. 路径总和 III
523. Continuous Subarray Sum	523. 连续的子数组和
525. Contiguous Array	525. 连续数组
560. Subarray Sum Equals K	560. 和为 K 的子数组
724. Find Pivot Index	724. 寻找数组的中心下标
862. Shortest Subarray with Sum at Least K	862. 和至少为 K 的最短子数组
918. Maximum Sum Circular Subarray	918. 环形子数组的最大和
974. Subarray Sums Divisible by K	974. 和可被 K 整除的子数组
-	剑指 Offer 57 - II. 和为s的连续正数序列
-	剑指 Offer II 010. 和为 k 的子数组
-	剑指 Offer II 011. 0 和 1 个数相同的子数组
-	剑指 Offer II 012. 左右两边子数组的和相等
-	剑指 Offer II 013. 二维子矩阵的和
-	剑指 Offer II 050. 向下的路径节点之和

▶ 引用本文的文章

- 二维数组的花式遍历技巧
- 动态规划设计：最大子数组
- 小而美的算法技巧：差分数组
- 带权重的随机选择算法
- 归并排序详解及应用
- 我的刷题心得：算法的本质
- 本站简介

———————————————

更多精品课程可查看 我的网站；扫码查看更多配套学习套件：

算法学习网站：https://labuladong.gitee.io/algo/ 或 https://labuladong.github.io/algo/

二维码太多，长按识别不到？放大图片 -> 让对应二维码充满屏幕 -> 长按识别该二维码

【强化练习】前缀和技巧经典习题

▶ 引用本文的题目

安装 我的 Chrome 刷题插件 点开下列题目可直接查看解题思路：

LeetCode	力扣
1658. Minimum Operations to Reduce X to Zero	1658. 将 x 减到 0 的最小操作数
974. Subarray Sums Divisible by K	974. 和可被 K 整除的子数组

▶ 引用本文的文章

- 【强化练习】哈希表更多习题
- 小而美的算法技巧：前缀和数组

———————————————

本文为网站会员内容，请 点这里 查看。

小而美的算法技巧：差分数组

Stars 123k 精品课程 查看 知乎 @labuladong B站 @labuladong

微信搜一搜 labuladong公众号

学算法认准 labuladong，致力于把算法讲清楚！网页版 点这里。

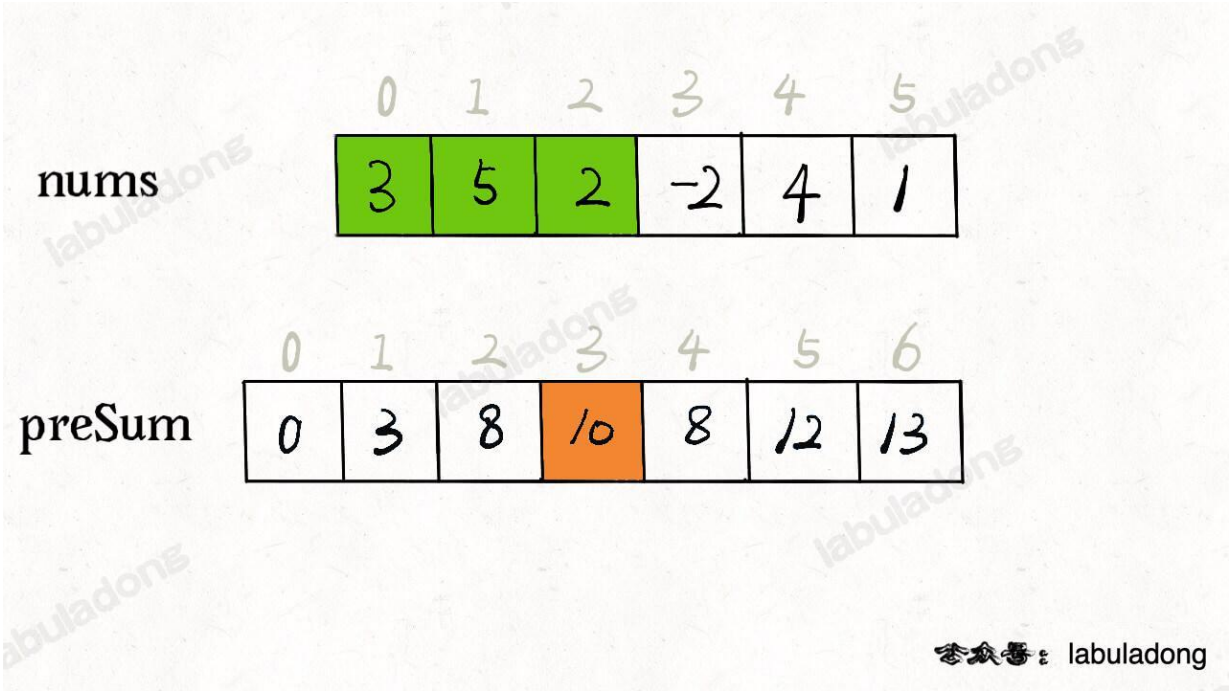
读完本文，你不仅学会了算法套路，还可以顺便解决如下题目：

LeetCode	力扣	难度
1094. Car Pooling	1094. 拼车	🟠
1109. Corporate Flight Bookings	1109. 航班预订统计	🟠
370. Range Addition🔒	370. 区间加法🔒	🟠

前文 前缀和技巧详解 写过的前缀和技巧是非常常用的算法技巧，**前缀和主要适用的场景是原始数组不会被修改的情况下，频繁查询某个区间的累加和**。

没看过前文没关系，这里简单介绍一下前缀和，核心代码就是下面这段：

```
class PrefixSum {
    // 前缀和数组
    private int[] preSum;

    /* 输入一个数组，构造前缀和 */
    public PrefixSum(int[] nums) {
        // preSum[0] = 0，便于计算累加和
        preSum = new int[nums.length + 1];
        // 计算 nums 的累加和
        for (int i = 1; i < preSum.length; i++) {
            preSum[i] = preSum[i - 1] + nums[i - 1];
        }
    }

    /* 查询闭区间 [left, right] 的累加和 */
    public int sumRange(int left, int right) {
        return preSum[right + 1] - preSum[left];
    }
}
```



`preSum[i]` 就代表着 `nums[0..i-1]` 所有元素的累加和，如果我们想求区间 `nums[i..j]` 的累加和，只要计算 `preSum[j+1] - preSum[i]` 即可，而不需要遍历整个区间求和。

本文讲一个和前缀和思想非常类似的算法技巧「差分数组」，**差分数组的主要适用场景是频繁对原始数组的某个区间的元素进行增减**。

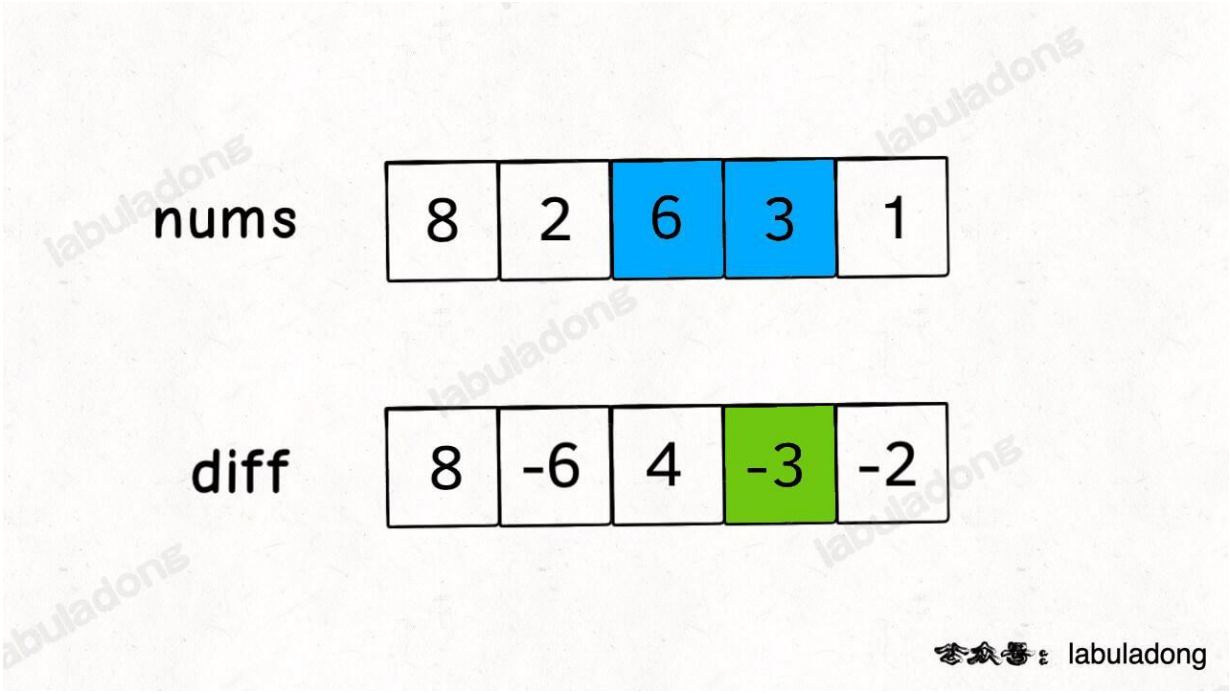
比如说，我给你输入一个数组 `nums`，然后又要求给区间 `nums[2..6]` 全部加 1，再给 `nums[3..9]` 全部减 3，再给 `nums[0..4]` 全部加 2，再给...

一通操作猛如虎，然后问你，最后 `nums` 数组的值是什么？

常规的思路很容易，你让我给区间 `nums[i..j]` 加上 `val`，那我就一个 for 循环给它们都加上呗，还能咋样？这种思路的时间复杂度是 O(N)，由于这个场景下对 `nums` 的修改非常频繁，所以效率会很低下。

这里就需要差分数组的技巧，类似前缀和技巧构造的 `preSum` 数组，我们先对 `nums` 数组构造一个 `diff` 差分数组，**`diff[i]` 就是 `nums[i]` 和 `nums[i-1]` 之差**：

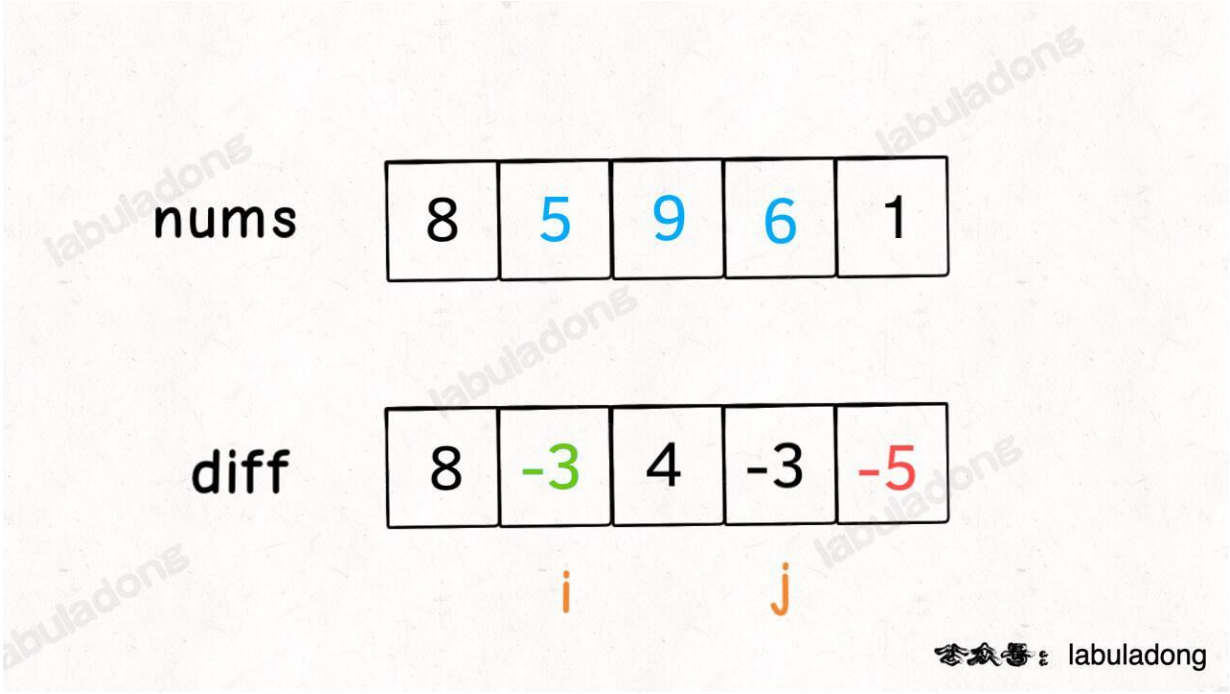
```
int[] diff = new int[nums.length];
// 构造差分数组
diff[0] = nums[0];
for (int i = 1; i < nums.length; i++) {
    diff[i] = nums[i] - nums[i - 1];
}
```



通过这个 `diff` 差分数组是可以反推出原始数组 `nums` 的，代码逻辑如下：

```
int[] res = new int[diff.length];
// 根据差分数组构造结果数组
res[0] = diff[0];
for (int i = 1; i < diff.length; i++) {
    res[i] = res[i - 1] + diff[i];
}
```

这样构造差分数组 `diff`，就可以快速进行区间增减的操作，如果你想对区间 `nums[i..j]` 的元素全部加 3，那么只需要让 `diff[i] += 3`，然后再让 `diff[j+1] -= 3` 即可：



原理很简单，回想 `diff` 数组反推 `nums` 数组的过程，`diff[i] += 3` 意味着给 `nums[i..]` 所有的元素都加了 3，然后 `diff[j+1] -= 3` 又意味着对于 `nums[j+1..]` 所有元素再减 3，那综合起来，是不是就是对 `nums[i..j]` 中的所有元素都加 3 了？

只要花费 O(1) 的时间修改 `diff` 数组，就相当于给 `nums` 的整个区间做了修改。多次修改 `diff`，然后通过 `diff` 数组反推，即可得到 `nums` 修改后的结果。

现在我们把差分数组抽象成一个类，包含 `increment` 方法和 `result` 方法：

```
// 差分数组工具类
class Difference {
    // 差分数组
    private int[] diff;

    /* 输入一个初始数组，区间操作将在这个数组上进行 */
    public Difference(int[] nums) {
        assert nums.length > 0;
        diff = new int[nums.length];
        // 根据初始数组构造差分数组
        diff[0] = nums[0];
        for (int i = 1; i < nums.length; i++) {
            diff[i] = nums[i] - nums[i - 1];
        }
    }

    /* 给闭区间 [i, j] 增加 val（可以是负数）*/
    public void increment(int i, int j, int val) {
        diff[i] += val;
        if (j + 1 < diff.length) {
            diff[j + 1] -= val;
        }
    }

    /* 返回结果数组 */
    public int[] result() {
        int[] res = new int[diff.length];
        // 根据差分数组构造结果数组
        res[0] = diff[0];
        for (int i = 1; i < diff.length; i++) {
            res[i] = res[i - 1] + diff[i];
        }
        return res;
    }
}
```

这里注意一下 `increment` 方法中的 if 语句：

```
public void increment(int i, int j, int val) {
    diff[i] += val;
```

```
        if (j + 1 < diff.length) {
            diff[j + 1] -= val;
        }
    }
```

当 `j+1 >= diff.length` 时，说明是对 `nums[i]` 及以后的整个数组都进行修改，那么就不需要再给 `diff` 数组减 `val` 了。

算法实践

首先，力扣第 370 题「区间加法」 就直接考察了差分数组技巧：

▼ 370. 区间加法 Leetcode | 力扣

假设你有一个长度为 ***n*** 的数组，初始情况下所有的数字均为 **0**，你将会被给出 ***k*** 个更新的操作。

其中，每个操作会被表示为一个三元组：**[startIndex, endIndex, inc]**，你需要将子数组 **A[startIndex ... endIndex]**（包括 startIndex 和 endIndex）增加 **inc**。

请你返回 ***k*** 次操作后的数组。

示例:

```
输入: length = 5, updates = [[1,3,2],[2,4,3],[0,2,-2]]
输出: [-2,0,3,5,3]
```

解释:

```
初始状态:
[0,0,0,0,0]

进行了操作 [1,3,2] 后的状态:
[0,2,2,2,0]

进行了操作 [2,4,3] 后的状态:
[0,2,5,5,3]

进行了操作 [0,2,-2] 后的状态:
[-2,0,3,5,3]
```

那么我们直接复用刚才实现的 `Difference` 类就能把这道题解决掉：

```
int[] getModifiedArray(int length, int[][] updates) {
    // nums 初始化为全 0
    int[] nums = new int[length];
    // 构造差分解法
    Difference df = new Difference(nums);
```

```
        for (int[] update : updates) {
            int i = update[0];
            int j = update[1];
            int val = update[2];
            df.increment(i, j, val);
        }

        return df.result();
    }
```

当然，实际的算法题可能需要我们对题目进行联想和抽象，不会这么直接地让你看出来要用差分数组技巧，这里看一下力扣第 1109 题「航班预订统计」：

▼ 1109. 航班预订统计 Leetcode | 力扣

这里有 n 个航班，它们分别从 1 到 n 进行编号。

有一份航班预订表 bookings ，表中第 i 条预订记录 bookings[i] = [$first_i$, $last_i$, $seats_i$] 意味着在从 $first_i$ 到 $last_i$ （**包含** $first_i$ 和 $last_i$ ）的 **每个航班** 上预订了 $seats_i$ 个座位。

请你返回一个长度为 n 的数组 answer，里面的元素是每个航班预定的座位总数。

示例 1：

输入： bookings = [[1,2,10],[2,3,20],[2,5,25]], n = 5
输出： [10,55,45,25,25]
解释：
航班编号 1 2 3 4 5
预订记录 1 ： 10 10
预订记录 2 ： 20 20
预订记录 3 ： 25 25 25 25
总座位数： 10 55 45 25 25
因此，answer = [10,55,45,25,25]

示例 2：

输入： bookings = [[1,2,10],[2,2,15]], n = 2
输出： [10,25]
解释：
航班编号 1 2
预订记录 1 ： 10 10
预订记录 2 ： 15
总座位数： 10 25
因此，answer = [10,25]

提示：

- $1 <= n <= 2 * 10^4$
- $1 <= bookings.length <= 2 * 10^4$
- $bookings[i].length == 3$
- $1 <= first_i <= last_i <= n$
- $1 <= seats_i <= 10^4$

函数签名如下：

```
int[] corpFlightBookings(int[][] bookings, int n)
```

这个题目就在那绕弯弯，其实它就是个差分数组的题，我给你翻译一下：

给你输入一个长度为 n 的数组 nums，其中所有元素都是 0。再给你输入一个 bookings，里面是若干三元组 (i, j, k)，每个三元组的含义就是要求你给 nums 数组的闭区间 [i-1,j-1] 中所有元素都加上 k。请你返回最后的 nums 数组是多少？

> 因为题目说的 n 是从 1 开始计数的，而数组索引从 0 开始，所以对于输入的三元组 (i, j, k)，数组区间应该对应 [i-1,j-1]。

这么一看，不就是一道标准的差分数组题嘛？我们可以直接复用刚才写的类：

```
int[] corpFlightBookings(int[][] bookings, int n) {
    // nums 初始化为全 0
    int[] nums = new int[n];
    // 构造差分解法
    Difference df = new Difference(nums);

    for (int[] booking : bookings) {
        // 注意转成数组索引要减一哦
        int i = booking[0] - 1;
        int j = booking[1] - 1;
        int val = booking[2];
        // 对区间 nums[i..j] 增加 val
        df.increment(i, j, val);
    }
    // 返回最终的结果数组
    return df.result();
}
```

这道题就解决了。

还有一道很类似的题目是力扣第 1094 题「拼车」，我简单描述下题目：

你是一个开公交车的司机，公交车的最大载客量为 capacity，沿途要经过若干车站，给你一份乘客行程表 int[][] trips，其中 trips[i] = [num, start, end] 代表着有 num 个旅客要从站点 start 上车，到站点 end 下车，请你计算是否能够一次把所有旅客运送完毕（不能超过最大载客量 capacity）。

函数签名如下：

```
boolean carPooling(int[][] trips, int capacity);
```

比如输入：

```
trips = [[2,1,5],[3,3,7]], capacity = 4
```

这就不能一次运完，因为 `trips[1]` 最多只能上 2 人，否则车就会超载。

相信你已经能够联想到差分数组技巧了：**`trips[i]` 代表着一组区间操作，旅客的上车和下车就相当于数组的区间加减；只要结果数组中的元素都小于 `capacity`，就说明可以不超载运输所有旅客。**

但问题是，差分数组的长度（车站的个数）应该是多少呢？题目没有直接给，但给出了数据取值范围：

```
0 <= trips[i][1] < trips[i][2] <= 1000
```

车站编号从 0 开始，最多到 1000，也就是最多有 1001 个车站，那么我们的差分数组长度可以直接设置为 1001，这样索引刚好能够涵盖所有车站的编号：

```
boolean carPooling(int[][] trips, int capacity) {
    // 最多有 1001 个车站
    int[] nums = new int[1001];
    // 构造差分解法
    Difference df = new Difference(nums);

    for (int[] trip : trips) {
        // 乘客数量
        int val = trip[0];
        // 第 trip[1] 站乘客上车
        int i = trip[1];
        // 第 trip[2] 站乘客已经下车，
        // 即乘客在车上的区间是 [trip[1], trip[2] - 1]
        int j = trip[2] - 1;
        // 进行区间操作
        df.increment(i, j, val);
    }

    int[] res = df.result();

    // 客车自始至终都不应该超载
    for (int i = 0; i < res.length; i++) {
        if (capacity < res[i]) {
            return false;
        }
    }
```

```
        return true;
    }
```

至此，这道题也解决了。

最后，差分数组和前缀和数组都是比较常见且巧妙的算法技巧，分别适用不同的场景，而且是会者不难，难者不会。所以，关于差分数组的使用，你学会了吗？

如果你有高质量的问题，可以 点击这里 进入本文的讨论区。

▶ **引用本文的文章**

- 二维数组的花式遍历技巧
- 我的刷题心得：算法的本质
- 扫描线技巧：安排会议室
- 本站简介

——————————————

更多精品课程可查看 我的网站；扫码查看更多配套学习套件：

双指针技巧秒杀七道链表题目

Stars 123k 精品课程 查看 知乎 @labuladong B站 @labuladong

学算法认准 labuladong，致力于把算法讲清楚！网页版 点这里。

读完本文，你不仅学会了算法套路，还可以顺便解决如下题目：

LeetCode	力扣	难度
141. Linked List Cycle	141. 环形链表	🟢
142. Linked List Cycle II	142. 环形链表 II	🟠
160. Intersection of Two Linked Lists	160. 相交链表	🟢
19. Remove Nth Node From End of List	19. 删除链表的倒数第 N 个结点	🟠
21. Merge Two Sorted Lists	21. 合并两个有序链表	🟢
23. Merge k Sorted Lists	23. 合并K个升序链表	🔴
86. Partition List	86. 分隔链表	🟠
876. Middle of the Linked List	876. 链表的中间结点	🟢
-	剑指 Offer 22. 链表中倒数第k个节点	🟢
-	剑指 Offer 25. 合并两个排序的链表	🟢
-	剑指 Offer 52. 两个链表的第一个公共节点	🟢
-	剑指 Offer II 021. 删除链表的倒数第 n 个结点	🟠
-	剑指 Offer II 022. 链表中环的入口节点	🟠
-	剑指 Offer II 023. 两个链表的第一个重合节点	🟢
-	剑指 Offer II 078. 合并排序链表	🔴

> tip：本文有视频版：链表双指针技巧全面汇总。建议关注我的 B 站账号，我会用视频领读的方式带大家学习那些稍有难度的算法技巧。

上次在视频号直播，跟大家说到单链表有很多巧妙的操作，本文就总结一下单链表的基本技巧，每个技巧都对应着至少一道算法题：

1、合并两个有序链表

2、链表的分解

3、合并 k 个有序链表

4、寻找单链表的倒数第 k 个节点

5、寻找单链表的中点

6、判断单链表是否包含环并找出环起点

7、判断两个单链表是否相交并找出交点

这些解法都用到了双指针技巧，所以说对于单链表相关的题目，双指针的运用是非常广泛的，下面我们就来一个一个看。

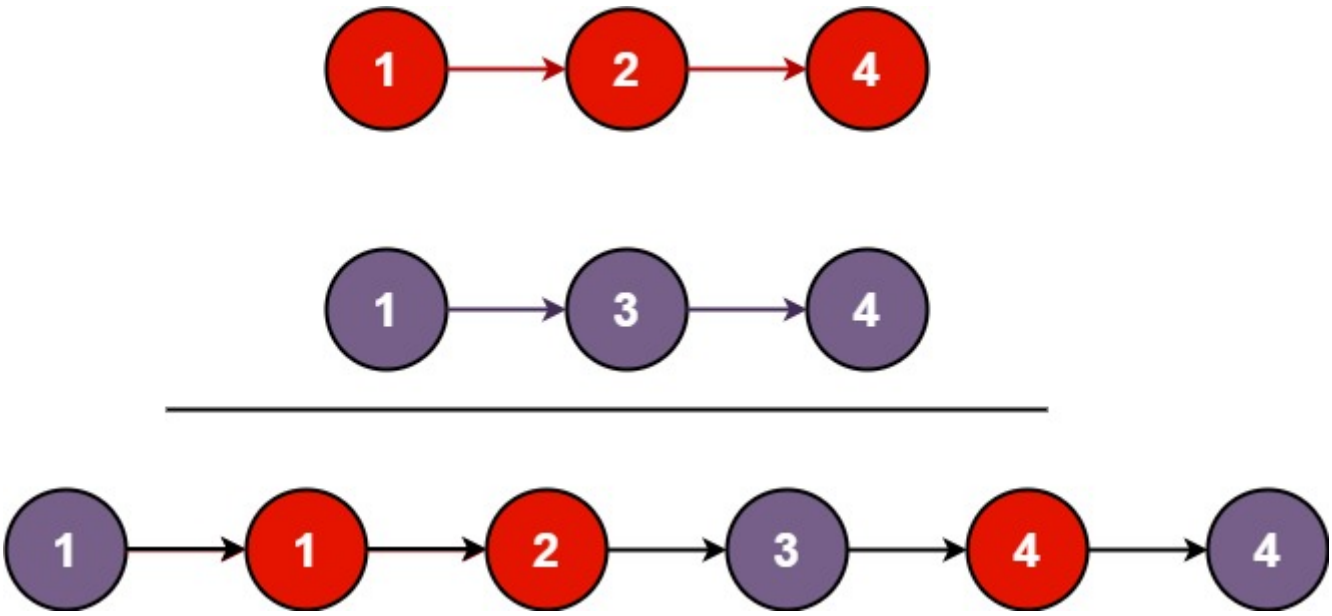
合并两个有序链表

这是最基本的链表技巧，力扣第 21 题「合并两个有序链表」就是这个问题：

▼ 21. 合并两个有序链表 Leetcode | 力扣

将两个升序链表合并为一个新的 **升序** 链表并返回。新链表是通过拼接给定的两个链表的所有节点组成的。

示例 1：




```
输入：l1 = [1,2,4], l2 = [1,3,4]
输出：[1,1,2,3,4,4]
```

示例 2：

```
输入：l1 = [], l2 = []
输出：[]
```

示例 3：

```
输入：l1 = [], l2 = [0]
输出：[0]
```

提示：

- 两个链表的节点数目范围是 [0, 50]
- -100 <= node.val <="100</code">
- l1 和 l2 均按 **非递减顺序** 排列

给你输入两个有序链表，请你把他俩合并成一个新的有序链表，函数签名如下：

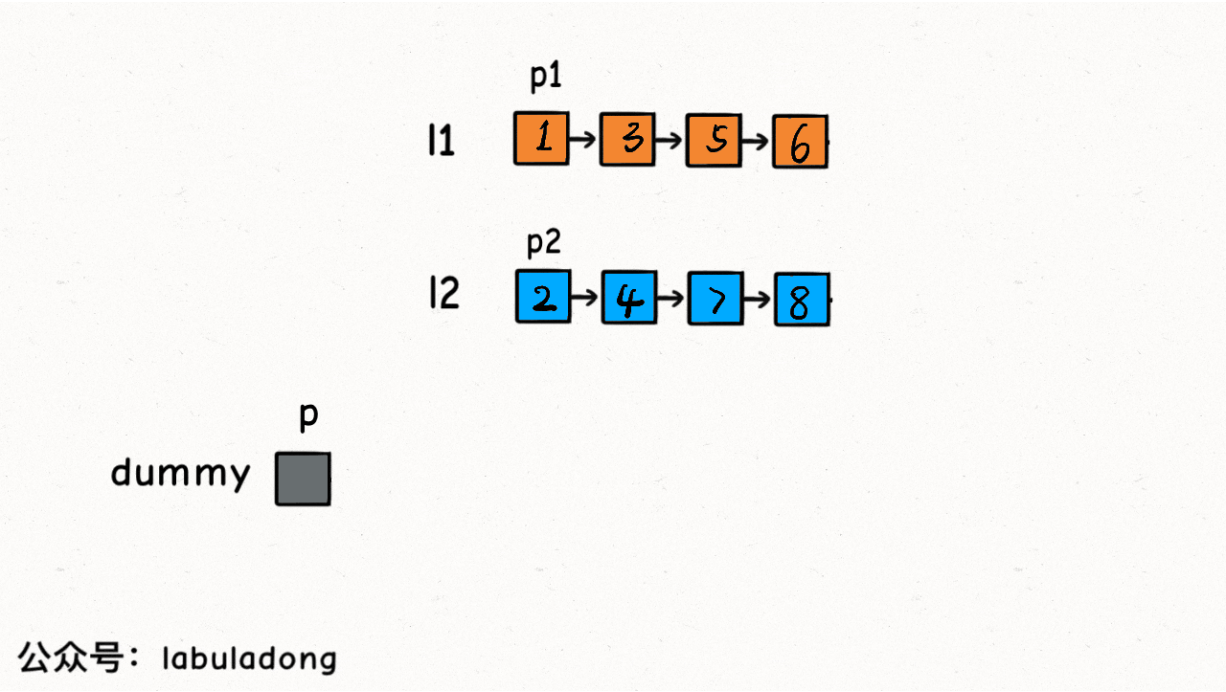
```
ListNode mergeTwoLists(ListNode l1, ListNode l2);
```

这题比较简单，我们直接看解法：

```
ListNode mergeTwoLists(ListNode l1, ListNode l2) {
    // 虚拟头结点
    ListNode dummy = new ListNode(-1), p = dummy;
    ListNode p1 = l1, p2 = l2;

    while (p1 != null && p2 != null) {
        // 比较 p1 和 p2 两个指针
        // 将值较小的的节点接到 p 指针
        if (p1.val > p2.val) {
            p.next = p2;
            p2 = p2.next;
        } else {
            p.next = p1;
            p1 = p1.next;
        }
        // p 指针不断前进
        p = p.next;
    }

    if (p1 != null) {
        p.next = p1;
    }

    if (p2 != null) {
        p.next = p2;
    }

    return dummy.next;
}
```

▶ 👾 代码可视化动画👾

我们的 while 循环每次比较 p1 和 p2 的大小，把较小的节点接到结果链表上，看如下 GIF：



形象地理解，这个算法的逻辑类似于拉拉链，`l1, l2` 类似于拉链两侧的锯齿，指针 `p` 就好像拉链的拉索，将两个有序链表合并；或者说这个过程像蛋白酶合成蛋白质，`l1, l2` 就好比两条氨基酸，而指针 `p` 就好像蛋白酶，将氨基酸组合成蛋白质。

代码中还用到一个链表的算法题中是很常见的「虚拟头结点」技巧，也就是 `dummy` 节点。你可以试试，如果不使用 `dummy` 虚拟节点，代码会复杂一些，需要额外处理指针 `p` 为空的情况。而有了 `dummy` 节点这个占位符，可以避免处理空指针的情况，降低代码的复杂性。

> 经常有读者问我，什么时候需要用虚拟头结点？我这里总结下：**当你需要创造一条新链表的时候，可以使用虚拟头结点简化边界情况的处理**。
>
> 比如说，让你把两条有序链表合并成一条新的有序链表，是不是要创造一条新链表？再比你想把一条链表分解成两条链表，是不是也在创造新链表？这些情况都可以使用虚拟头结点简化边界情况的处理。

单链表的分解

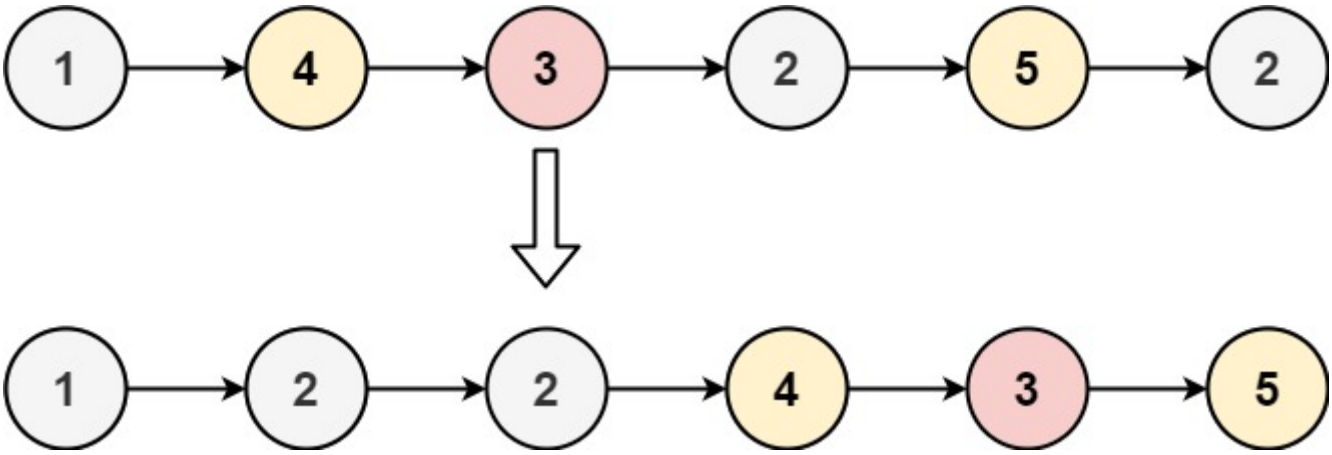
直接看下力扣第 86 题「分隔链表」：

▼ 86. 分隔链表 Leetcode | 力扣

给你一个链表的头节点 `head` 和一个特定值 `x`，请你对链表进行分隔，使得所有 **小于** `x` 的节点都出现在 **大于或等于** `x` 的节点之前。

你应当 **保留** 两个分区中每个节点的初始相对位置。

示例 1：



输入： `head = [1,4,3,2,5,2], x = 3`
输出： `[1,2,2,4,3,5]`

示例 2：

输入： `head = [2,1], x = 2`
输出： `[1,2]`

提示：

- 链表中节点的数目在范围 `[0, 200]` 内
- `-100 <= node.val <="100</code">`
- `-200 <= x <="200</code">`

在合并两个有序链表时让你合二为一，而这里需要分解让你把原链表一分为二。具体来说，我们可以把原链表分成两个小链表，一个链表中的元素大小都小于 `x`，另一个链表中的元素都大于等于 `x`，最后再把这两条链表接到一起，就得到了题目想要的结果。

整体逻辑和合并有序链表非常相似，细节直接看代码吧，注意虚拟头结点的运用：

```
ListNode partition(ListNode head, int x) {
    // 存放小于 x 的链表的虚拟头结点
    ListNode dummy1 = new ListNode(-1);
    // 存放大于等于 x 的链表的虚拟头结点
    ListNode dummy2 = new ListNode(-1);
    // p1, p2 指针负责生成结果链表
    ListNode p1 = dummy1, p2 = dummy2;
    // p 负责遍历原链表，类似合并两个有序链表的逻辑
    // 这里是将一个链表分解成两个链表
    ListNode p = head;
    while (p != null) {
        if (p.val >= x) {
            p2.next = p;
            p2 = p2.next;
        } else {
```

```
                p1.next = p;
                p1 = p1.next;
            }
            // 不能直接让 p 指针前进，
            // p = p.next
            // 断开原链表中的每个节点的 next 指针
            ListNode temp = p.next;
            p.next = null;
            p = temp;
        }
        // 连接两个链表
        p1.next = dummy2.next;

        return dummy1.next;
    }
```

我知道有很多读者会对这段代码有疑问：

```
// 不能直接让 p 指针前进，
// p = p.next
// 断开原链表中的每个节点的 next 指针
ListNode temp = p.next;
p.next = null;
p = temp;
```

不多废话，直接借助我们的可视化面板看一下就明白了。首先看下正确的写法：

▶ 🌟 代码可视化动画🌟

如果你不断开原链表中的每个节点的 `next` 指针，那么就会出错，因为结果链表中会包含一个环：

▶ 🌟 代码可视化动画🌟

总的来说，如果我们需要把原链表的节点接到新链表上，而不是 new 新节点来组成新链表的话，那么断开节点和原链表之间的链接可能是必要的。那其实我们可以养成一个好习惯，但凡遇到这种情况，就把原链表的节点断开，这样就不会出错了。

合并 k 个有序链表

看下力扣第 23 题「合并K个升序链表」：

▼ 23. 合并K个升序链表 Leetcode | 力扣

给你一个链表数组，每个链表都已经按升序排列。

请你将所有链表合并到一个升序链表中，返回合并后的链表。

示例 1：

输入： lists = [[1,4,5],[1,3,4],[2,6]]
输出： [1,1,2,3,4,4,5,6]
解释： 链表数组如下：
[
  1->4->5,
  1->3->4,
  2->6
]
将它们合并到一个有序链表中得到。
1->1->2->3->4->4->5->6

示例 2：

输入： lists = []
输出： []

示例 3：

输入： lists = [[]]
输出： []

提示：

- k == lists.length
- 0 <= k <= 10^4
- 0 <= lists[i].length <= 500
- -10^4 <= lists[i][j] <= 10^4
- lists[i] 按 **升序** 排列
- lists[i].length 的总和不超过 10^4

函数签名如下：

```
ListNode mergeKLists(ListNode[] lists);
```

合并 k 个有序链表的逻辑类似合并两个有序链表，难点在于，如何快速得到 k 个节点中的最小节点，接到结果链表上？

这里我们就要用到 优先级队列（二叉堆） 这种数据结构，把链表节点放入一个最小堆，就可以每次获得 k 个节点中的最小节点：

```
ListNode mergeKLists(ListNode[] lists) {
    if (lists.length == 0) return null;
    // 虚拟头结点
```

```
        ListNode dummy = new ListNode(-1);
        ListNode p = dummy;
        // 优先级队列，最小堆
        PriorityQueue<ListNode> pq = new PriorityQueue<>(
            lists.length, (a, b)->(a.val - b.val));
        // 将 k 个链表的头结点加入最小堆
        for (ListNode head : lists) {
            if (head != null)
                pq.add(head);
        }

        while (!pq.isEmpty()) {
            // 获取最小节点，接到结果链表中
            ListNode node = pq.poll();
            p.next = node;
            if (node.next != null) {
                pq.add(node.next);
            }
            // p 指针不断前进
            p = p.next;
        }
        return dummy.next;
    }
```

这个算法是面试常考题，它的时间复杂度是多少呢？

优先队列 `pq` 中的元素个数最多是 `k`，所以一次 `poll` 或者 `add` 方法的时间复杂度是 `O(logk)`；所有的链表节点都会被加入和弹出 `pq`，**所以算法整体的时间复杂度是 `O(Nlogk)`，其中 `k` 是链表的条数，`N` 是这些链表的节点总数**。

单链表的倒数第 k 个节点

从前往后寻找单链表的第 `k` 个节点很简单，一个 for 循环遍历过去就找到了，但是如何寻找从后往前数的第 `k` 个节点呢？

那你可能说，假设链表有 `n` 个节点，倒数第 `k` 个节点就是正数第 `n - k + 1` 个节点，不也是一个 for 循环的事儿吗？

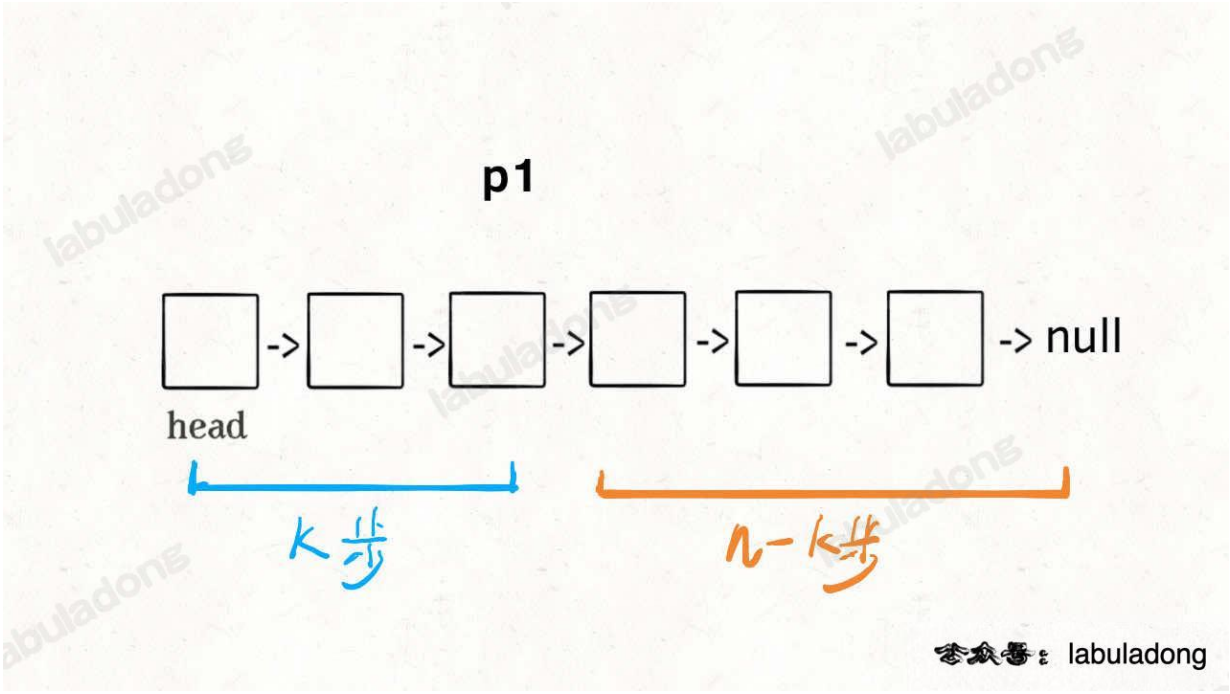
是的，但是算法题一般只给你一个 `ListNode` 头结点代表一条单链表，你不能直接得出这条链表的长度 `n`，而需要先遍历一遍链表算出 `n` 的值，然后再遍历链表计算第 `n - k + 1` 个节点。

也就是说，这个解法需要遍历两次链表才能得到出倒数第 `k` 个节点。

那么，我们能不能**只遍历一次链表**，就算出倒数第 `k` 个节点？可以做到的，如果是面试问到这道题，面试官肯定也是希望你给出只需遍历一次链表的解法。

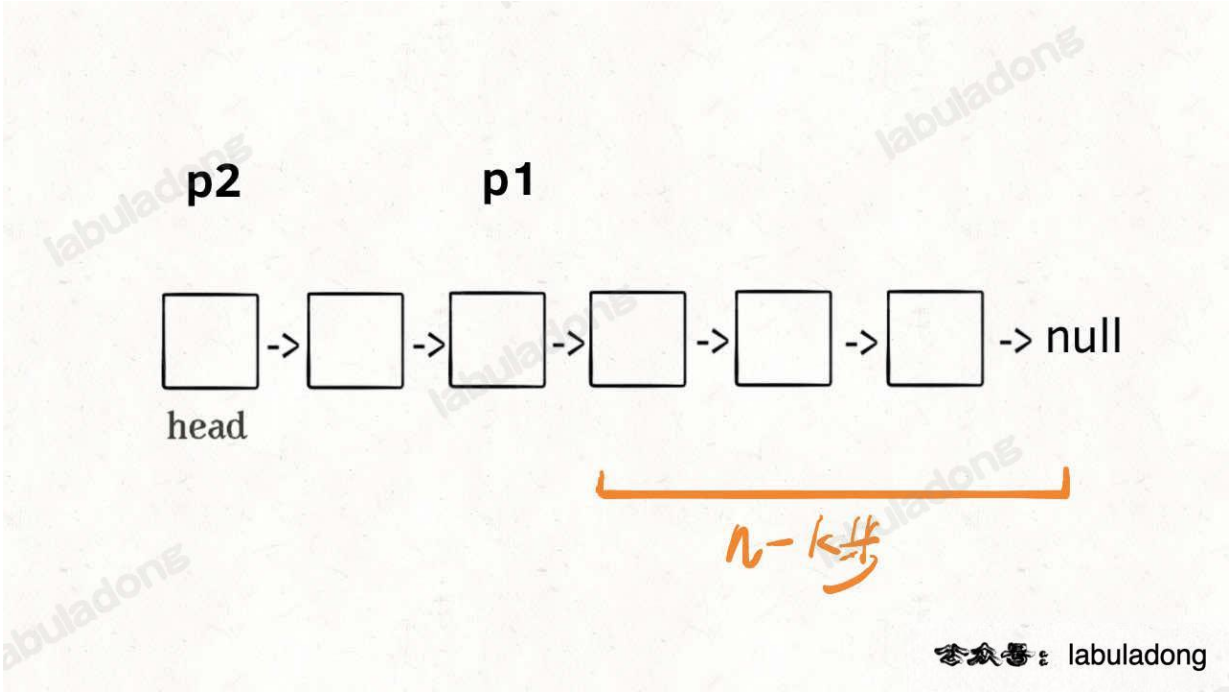
这个解法就比较巧妙了，假设 `k = 2`，思路如下：

首先，我们先让一个指针 `p1` 指向链表的头节点 `head`，然后走 `k` 步：

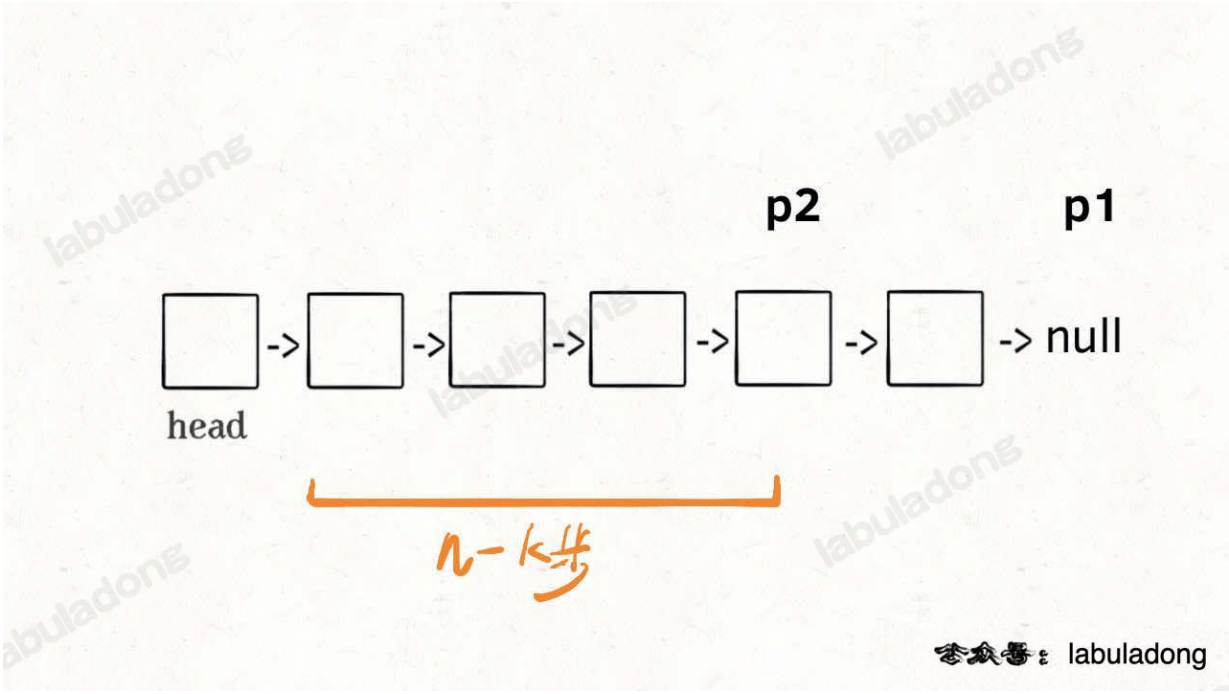


现在的 p1，只要再走 n - k 步，就能走到链表末尾的空指针了对吧？

趁这个时候，再用一个指针 p2 指向链表头节点 head：



接下来就很显然了，让 p1 和 p2 同时向前走，p1 走到链表末尾的空指针时前进了 n - k 步，p2 也从 head 开始前进了 n - k 步，停留在第 n - k + 1 个节点上，即恰好停链表的倒数第 k 个节点上：



这样，只遍历了一次链表，就获得了倒数第 k 个节点 p2。

上述逻辑的代码如下：

```
// 返回链表的倒数第 k 个节点
ListNode findFromEnd(ListNode head, int k) {
    ListNode p1 = head;
    // p1 先走 k 步
    for (int i = 0; i < k; i++) {
        p1 = p1.next;
    }
    ListNode p2 = head;
    // p1 和 p2 同时走 n - k 步
    while (p1 != null) {
        p2 = p2.next;
        p1 = p1.next;
    }
    // p2 现在指向第 n - k + 1 个节点，即倒数第 k 个节点
    return p2;
}
```

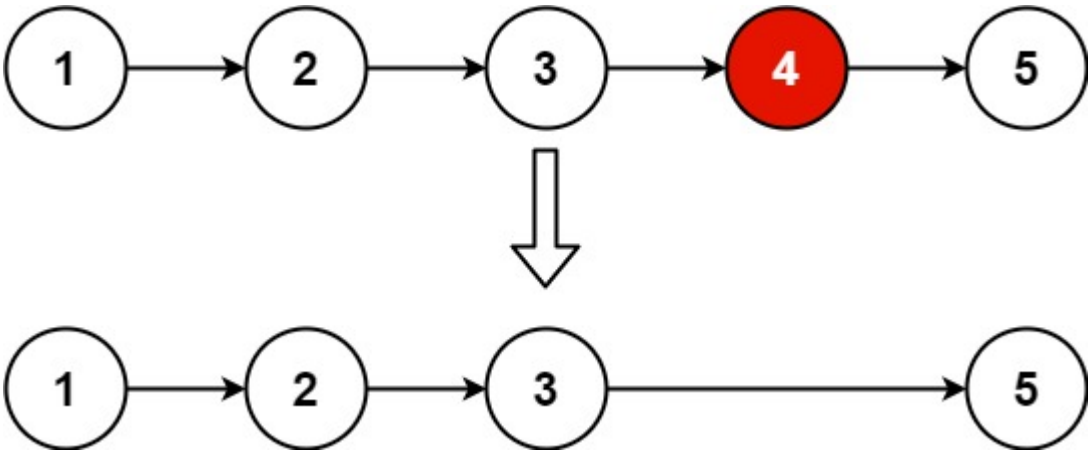
当然，如果用 big O 表示法来计算时间复杂度，无论遍历一次链表和遍历两次链表的时间复杂度都是 O(N)，但上述这个算法更有技巧性。

很多链表相关的算法题都会用到这个技巧，比如说力扣第 19 题「删除链表的倒数第 N 个结点」：

▼ 19. 删除链表的倒数第 N 个结点 Leetcode | 力扣

给你一个链表，删除链表的倒数第 n 个结点，并且返回链表的头结点。

示例 1：




```
输入：head = [1,2,3,4,5], n = 2
输出：[1,2,3,5]
```

示例 2：

```
输入：head = [1], n = 1
输出：[]
```

示例 3：

```
输入：head = [1,2], n = 1
输出：[1]
```

提示：

- 链表中结点的数目为 `sz`
- `1 <= sz <= 30`
- `0 <= Node.val <= 100`
- `1 <= n <= sz`

进阶：你能尝试使用一趟扫描实现吗？

我们直接看解法代码：

```
// 主函数
public ListNode removeNthFromEnd(ListNode head, int n) {
    // 虚拟头结点
    ListNode dummy = new ListNode(-1);
    dummy.next = head;
    // 删除倒数第 n 个，要先找倒数第 n + 1 个节点
    ListNode x = findFromEnd(dummy, n + 1);
    // 删掉倒数第 n 个节点
    x.next = x.next.next;
```

```
        return dummy.next;
    }

    private ListNode findFromEnd(ListNode head, int k) {
        // 代码见上文
    }
```

▶ 🎃 代码可视化动画🎃

这个逻辑就很简单了，要删除倒数第 n 个节点，就得获得倒数第 n + 1 个节点的引用，可以用我们实现的 findFromEnd 来操作。

不过注意我们又使用了虚拟头结点的技巧，也是为了防止出现空指针的情况，比如说链表总共有 5 个节点，题目就让你删除倒数第 5 个节点，也就是第一个节点，那按照算法逻辑，应该首先找到倒数第 6 个节点。但第一个节点前面已经没有节点了，这就会出错。

但有了我们虚拟节点 dummy 的存在，就避免了这个问题，能够对这种情况进行正确的删除。

单链表的中点

力扣第 876 题「链表的中间结点」就是这个题目，问题的关键也在于我们无法直接得到单链表的长度 n，常规方法也是先遍历链表计算 n，再遍历一次得到第 n / 2 个节点，也就是中间节点。

如果想一次遍历就得到中间节点，也需要耍点小聪明，使用「快慢指针」的技巧：

我们让两个指针 slow 和 fast 分别指向链表头结点 head。

每当慢指针 slow 前进一步，快指针 fast 就前进两步，这样，当 fast 走到链表末尾时，slow 就指向了链表中点。

上述思路的代码实现如下：

```
ListNode middleNode(ListNode head) {
    // 快慢指针初始化指向 head
    ListNode slow = head, fast = head;
    // 快指针走到末尾时停止
    while (fast != null && fast.next != null) {
        // 慢指针走一步，快指针走两步
        slow = slow.next;
        fast = fast.next.next;
    }
    // 慢指针指向中点
    return slow;
}
```

▶ 🥳 代码可视化动画🥳

需要注意的是，如果链表长度为偶数，也就是说中点有两个的时候，我们这个解法返回的节点是靠后的那个节点。

另外，这段代码稍加修改就可以直接用到判断链表成环的算法题上。

判断链表是否包含环

判断链表是否包含环属于经典问题了，解决方案也是用快慢指针：

每当慢指针 `slow` 前进一步，快指针 `fast` 就前进两步。

如果 `fast` 最终遇到空指针，说明链表中没有环；如果 `fast` 最终和 `slow` 相遇，那肯定是 `fast` 超过了 `slow` 一圈，说明链表中含有环。

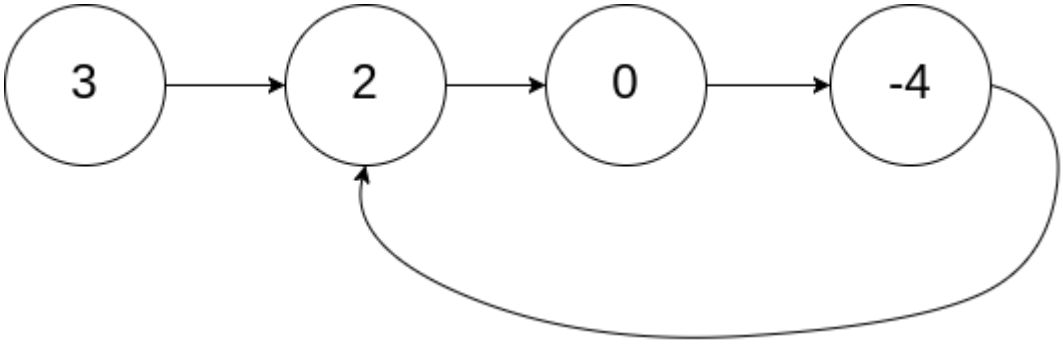
只需要把寻找链表中点的代码稍加修改就行了：

```
boolean hasCycle(ListNode head) {
    // 快慢指针初始化指向 head
    ListNode slow = head, fast = head;
    // 快指针走到末尾时停止
    while (fast != null && fast.next != null) {
        // 慢指针走一步，快指针走两步
        slow = slow.next;
        fast = fast.next.next;
        // 快慢指针相遇，说明含有环
        if (slow == fast) {
            return true;
        }
    }
    // 不包含环
    return false;
}
```

▶ 🥳 代码可视化动画🥳

当然，这个问题还有进阶版，也是力扣第 142 题「环形链表 II」：如果链表中含有环，如何计算这个环的起点？

为了避免读者迷惑，举个例子，环的起点是指下面这幅图中的节点 2：



这里先直接看一下寻找环起点的解法代码：

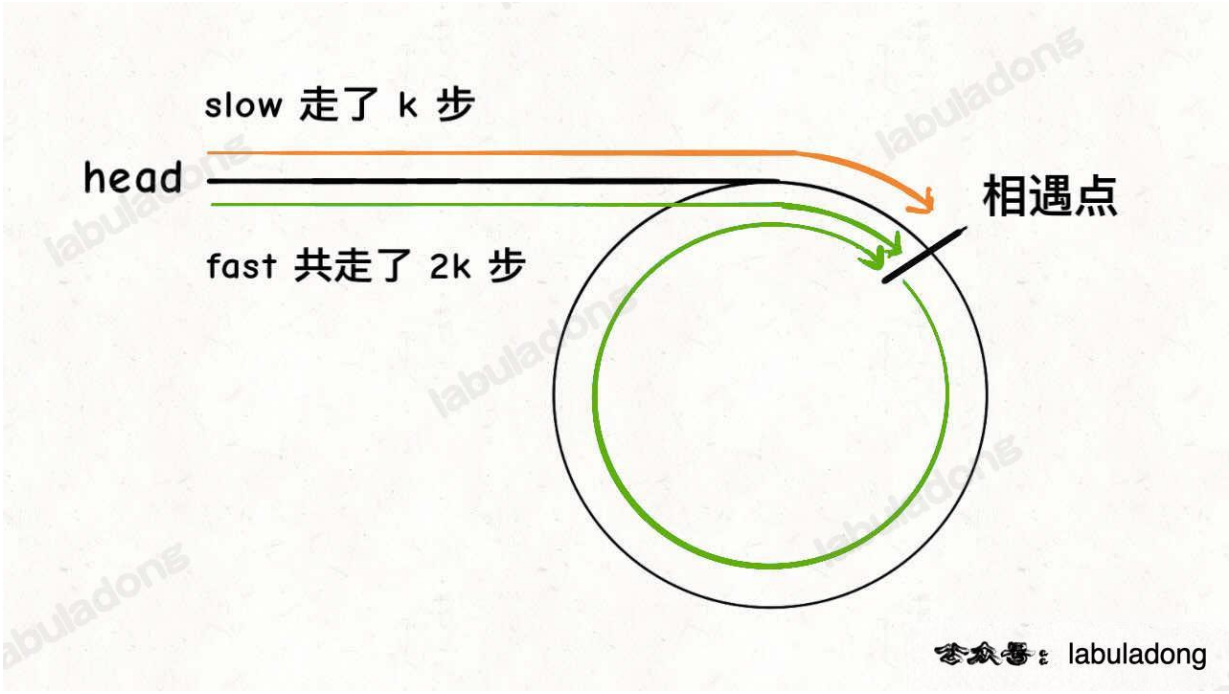
```
class Solution {
    public ListNode detectCycle(ListNode head) {
        ListNode fast, slow;
        fast = slow = head;
        while (fast != null && fast.next != null) {
            fast = fast.next.next;
            slow = slow.next;
            if (fast == slow) break;
        }
        // 上面的代码类似 hasCycle 函数
        if (fast == null || fast.next == null) {
            // fast 遇到空指针说明没有环
            return null;
        }

        // 重新指向头结点
        slow = head;
        // 快慢指针同步前进，相交点就是环起点
        while (slow != fast) {
            fast = fast.next;
            slow = slow.next;
        }
        return slow;
    }
}
```

▶ 🍭 代码可视化动画🍭

可以看到，当快慢指针相遇时，让其中任一个指针指向头节点，然后让它俩以相同速度前进，再次相遇时所在的节点位置就是环开始的位置。

为什么要这样呢？这里简单说一下其中的原理。

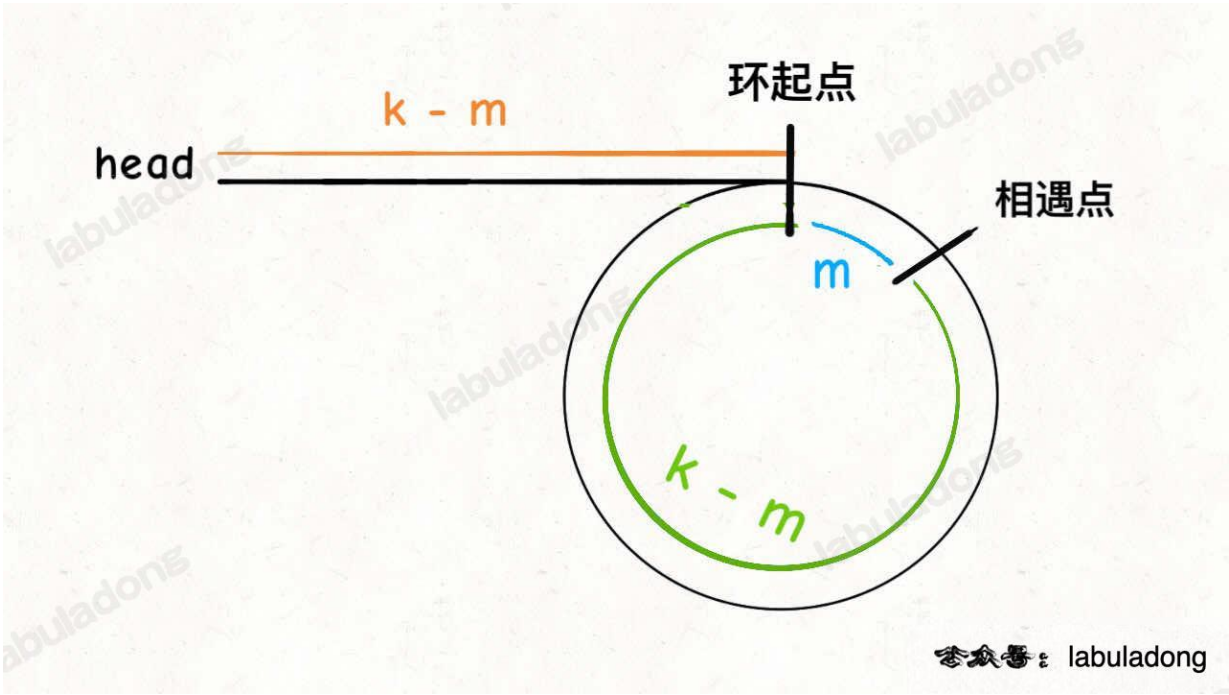
我们假设快慢指针相遇时，慢指针 `slow` 走了 `k` 步，那么快指针 `fast` 一定走了 `2k` 步：



`fast` 一定比 `slow` 多走了 `k` 步，这多走的 `k` 步其实就是 `fast` 指针在环里转圈圈，所以 `k` 的值就是环长度的「整数倍」。

假设相遇点距环的起点的距离为 `m`，那么结合上图的 `slow` 指针，环的起点距头结点 `head` 的距离为 `k - m`，也就是说如果从 `head` 前进 `k - m` 步就能到达环起点。

巧的是，如果从相遇点继续前进 `k - m` 步，也恰好到达环起点。因为结合上图的 `fast` 指针，从相遇点开始走k步可以转回到相遇点，那走 `k - m` 步肯定就走到环起点了：



所以，只要我们把快慢指针中的任一个重新指向 `head`，然后两个指针同速前进，`k - m` 步后一定会相遇，相遇之处就是环的起点了。

两个链表是否相交

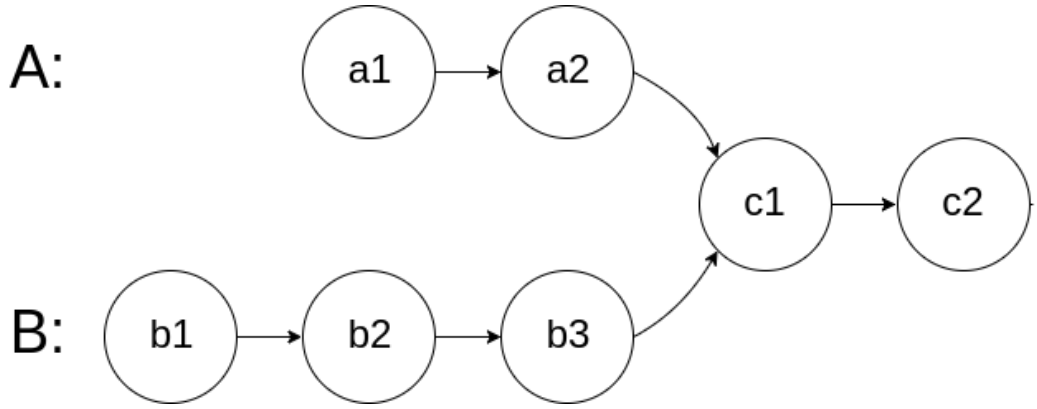
这个问题有意思，也是力扣第 160 题「相交链表」函数签名如下：

```
ListNode getIntersectionNode(ListNode headA, ListNode headB);
```

给你输入两个链表的头结点 `headA` 和 `headB`，这两个链表可能存在相交。

如果相交，你的算法应该返回相交的那个节点；如果没相交，则返回 null。

比如题目给我们举的例子，如果输入的两个链表如下图：

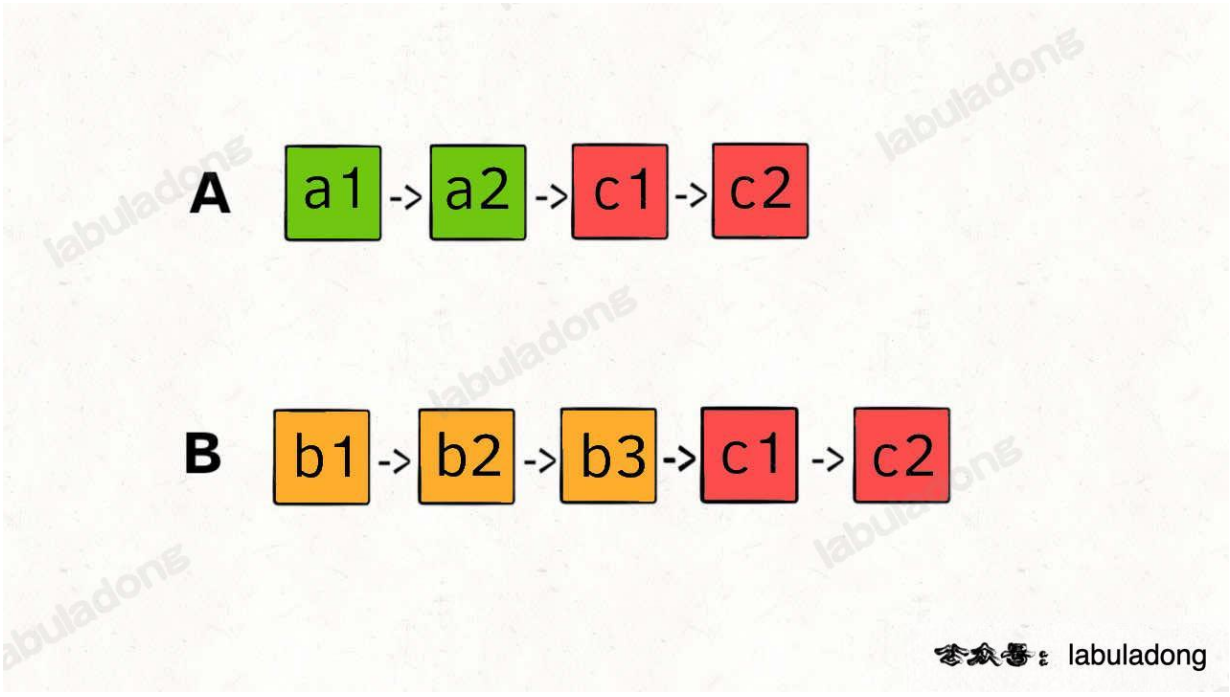


那么我们的算法应该返回 `c1` 这个节点。

这个题直接的想法可能是用 `HashSet` 记录一个链表的所有节点，然后和另一条链表对比，但这就需要额外的空间。

如果不用额外的空间，只使用两个指针，你如何做呢？

难点在于，由于两条链表的长度可能不同，两条链表之间的节点无法对应：

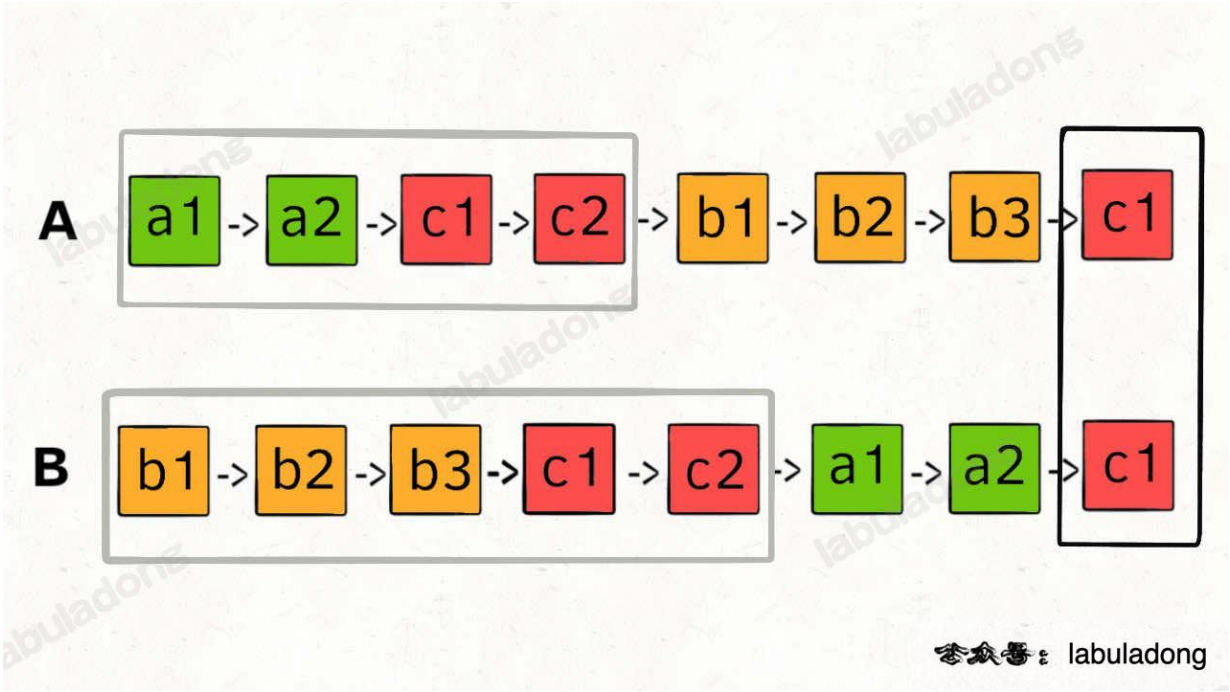


如果用两个指针 `p1` 和 `p2` 分别在两条链表上前进，并不能**同时**走到公共节点，也就无法得到相交节点 `c1`。

解决这个问题的关键是，通过某些方式，让 `p1` 和 `p2` 能够同时到达相交节点 `c1`。

所以，我们可以让 p1 遍历完链表 A 之后开始遍历链表 B，让 p2 遍历完链表 B 之后开始遍历链表 A，这样相当于「逻辑上」两条链表接在了一起。

如果这样进行拼接，就可以让 p1 和 p2 同时进入公共部分，也就是同时到达相交节点 c1：



那你可能会问，如果说两个链表没有相交点，是否能够正确的返回 null 呢？

这个逻辑可以覆盖这种情况的，相当于 c1 节点是 null 空指针嘛，可以正确返回 null。

按照这个思路，可以写出如下代码：

```
ListNode getIntersectionNode(ListNode headA, ListNode headB) {
    // p1 指向 A 链表头结点，p2 指向 B 链表头结点
    ListNode p1 = headA, p2 = headB;
    while (p1 != p2) {
        // p1 走一步，如果走到 A 链表末尾，转到 B 链表
        if (p1 == null) p1 = headB;
        else            p1 = p1.next;
        // p2 走一步，如果走到 B 链表末尾，转到 A 链表
        if (p2 == null) p2 = headA;
        else            p2 = p2.next;
    }
    return p1;
}
```

▶ 代码可视化动画

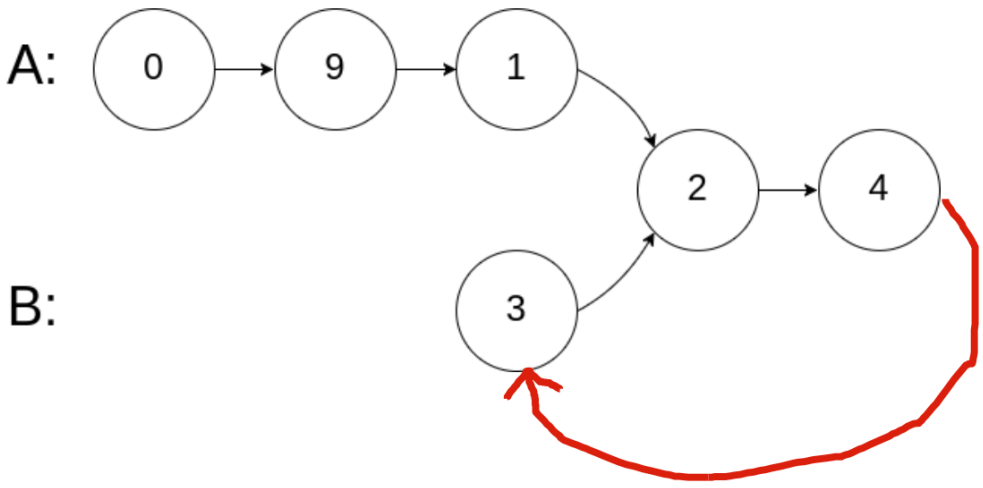
这样，这道题就解决了，空间复杂度为 O(1)，时间复杂度为 O(N)。

以上就是单链表的所有技巧，希望对你有启发。

2022/1/24 更新：

评论区有不少优秀读者对最后一题「寻找两条链表的交点」提出了一些其他思路，也补充到这里。

首先有读者提到，如果把两条链表首尾相连，那么「寻找两条链表的交点」的问题转换成了前面讲的「寻找环起点」的问题：



说实话我没有想到这种思路，不得不说这是一个很巧妙的转换！不过需要注意的是，这道题说不让你改变原始链表的结构，所以你把题目输入的链表转化成环形链表求解之后记得还要改回来，否则无法通过。

另外，还有读者提到，既然「寻找两条链表的交点」的核心在于让 p1 和 p2 两个指针能够同时到达相交节点 c1，那么可以通过预先计算两条链表的长度来做到这一点，具体代码如下：

```
public ListNode getIntersectionNode(ListNode headA, ListNode headB) {
    int lenA = 0, lenB = 0;
    // 计算两条链表的长度
    for (ListNode p1 = headA; p1 != null; p1 = p1.next) {
        lenA++;
    }
    for (ListNode p2 = headB; p2 != null; p2 = p2.next) {
        lenB++;
    }
    // 让 p1 和 p2 到达尾部的距离相同
    ListNode p1 = headA, p2 = headB;
    if (lenA > lenB) {
        for (int i = 0; i < lenA - lenB; i++) {
            p1 = p1.next;
        }
    } else {
        for (int i = 0; i < lenB - lenA; i++) {
            p2 = p2.next;
        }
    }
    // 看两个指针是否会相同，p1 == p2 时有两种情况：
    // 1、要么是两条链表不相交，他俩同时走到尾部空指针
```

```
        // 2、要么是两条链表相交，他俩走到两条链表的相交点
        while (p1 != p2) {
            p1 = p1.next;
            p2 = p2.next;
        }
        return p1;
    }
```

虽然代码多一些，但是时间复杂度是还是 O(N)，而且会更容易理解一些。

总之，我的解法代码并不一定就是最优或者最正确的，鼓励大家在评论区多多提出自己的疑问和思考，我也很高兴和大家探讨更多的解题思路~

到这里，链表相关的双指针技巧就全部讲完了，这些技巧的更多扩展延伸见 更多链表双指针经典习题。

如果你有高质量的问题，可以 点击这里 进入本文的讨论区。

▶ **引用本文的题目**

安装 我的 Chrome 刷题插件 点开下列题目可直接查看解题思路：

LeetCode	力扣
109. Convert Sorted List to Binary Search Tree	109. 有序链表转换二叉搜索树
1257. Smallest Common Region🔒	1257. 最小公共区域🔒
1650. Lowest Common Ancestor of a Binary Tree III🔒	1650. 二叉树的最近公共祖先 III🔒
1836. Remove Duplicates From an Unsorted Linked List 🔒	1836. 从未排序的链表中移除重复元素🔒
2. Add Two Numbers	2. 两数相加
234. Palindrome Linked List	234. 回文链表
264. Ugly Number II	264. 丑数 II
313. Super Ugly Number	313. 超级丑数
355. Design Twitter	355. 设计推特
360. Sort Transformed Array🔒	360. 有序转化数组🔒
373. Find K Pairs with Smallest Sums	373. 查找和最小的 K 对数字
378. Kth Smallest Element in a Sorted Matrix	378. 有序矩阵中第 K 小的元素
431. Encode N-ary Tree to Binary Tree🔒	431. 将 N 叉树编码为二叉树🔒
88. Merge Sorted Array	88. 合并两个有序数组
97. Interleaving String	97. 交错字符串
977. Squares of a Sorted Array	977. 有序数组的平方

LeetCode	力扣
-	剑指 Offer 18. 删除链表的节点
-	剑指 Offer 25. 合并两个排序的链表
-	剑指 Offer 49. 丑数
-	剑指 Offer 52. 两个链表的第一个公共节点
-	剑指 Offer II 021. 删除链表的倒数第 n 个结点
-	剑指 Offer II 022. 链表中环的入口节点
-	剑指 Offer II 023. 两个链表的第一个重合节点
-	剑指 Offer II 027. 回文链表
-	剑指 Offer II 061. 和最小的 k 个数对
-	剑指 Offer II 078. 合并排序链表

▶ **引用本文的文章**

- Git原理之最近公共祖先
- 【强化练习】双指针更多经典习题
- 一文秒杀所有丑数系列问题
- 二维数组的花式遍历技巧
- 双指针技巧秒杀七道数组题目
- 如何判断回文链表
- 归并排序详解及应用
- 我的刷题心得：算法的本质
- 本站简介
- 浅谈存储系统：LSM 树设计原理
- 用算法打败算法
- 配套 Chrome 刷题插件
- 链表（链式存储）基本原理

更多精品课程可查看 我的网站；扫码查看更多配套学习套件：

算法学习网站：https://labuladong.gitee.io/algo/ 或 https://labuladong.github.io/algo/

二维码太多，长按识别不到？放大图片 -> 让对应二维码充满屏幕 -> 长按识别该二维码

【强化练习】链表双指针经典习题

▶ 引用本文的文章

- 双指针技巧秒杀七道链表题目

———————————————

本文为网站会员内容，请 点这里 查看。

双指针技巧秒杀七道数组题目

Stars 123k 精品课程 查看 知乎 @labuladong B站 @labuladong

微信搜一搜 labuladong公众号

学算法认准 labuladong，致力于把算法讲清楚！网页版 点这里。

读完本文，你不仅学会了算法套路，还可以顺便解决如下题目：

LeetCode	力扣	难度
167. Two Sum II - Input Array Is Sorted	167. 两数之和 II - 输入有序数组	🟠
26. Remove Duplicates from Sorted Array	26. 删除有序数组中的重复项	🟢
27. Remove Element	27. 移除元素	🟢
283. Move Zeroes	283. 移动零	🟢
344. Reverse String	344. 反转字符串	🟢
5. Longest Palindromic Substring	5. 最长回文子串	🟠
83. Remove Duplicates from Sorted List	83. 删除排序链表中的重复元素	🟢
-	剑指 Offer 57. 和为s的两个数字	🟢
-	剑指 Offer II 006. 排序数组中两个数字之和	🟢

> tip：本文有视频版：数组双指针技巧汇总。建议关注我的 B 站账号，我会用视频领读的方式带大家学习那些稍有难度的算法技巧。

在处理数组和链表相关问题时，双指针技巧是经常用到的，双指针技巧主要分为两类：**左右指针**和**快慢指针**。

所谓左右指针，就是两个指针相向而行或者相背而行；而所谓快慢指针，就是两个指针同向而行，一快一慢。

对于单链表来说，大部分技巧都属于快慢指针，前文 单链表的六大解题套路 都涵盖了，比如链表环判断，倒数第 `K` 个链表节点等问题，它们都是通过一个 `fast` 快指针和一个 `slow` 慢指针配合完成任务。

在数组中并没有真正意义上的指针，但我们可以把索引当做数组中的指针，这样也可以在数组中施展双指针技巧，**本文主要讲数组相关的双指针算法**。

一、快慢指针技巧

数组问题中比较常见的快慢指针技巧，是让你原地修改数组。

比如说看下力扣第 26 题「删除有序数组中的重复项」，让你在有序数组去重：

▼ 26. 删除有序数组中的重复项 Leetcode | 力扣

给你一个 **升序排列** 的数组 `nums` ，请你 **原地** 删除重复出现的元素，使每个元素 **只出现一次** ，返回删除后数组的新长度。元素的 **相对顺序** 应该保持 **一致** 。然后返回 `nums` 中唯一元素的个数。

考虑 `nums` 的唯一元素的数量为 `k` ，你需要做以下事情确保你的题解可以被通过：

- 更改数组 `nums` ，使 `nums` 的前 `k` 个元素包含唯一元素，并按照它们最初在 `nums` 中出现的顺序排列。`nums` 的其余元素与 `nums` 的大小不重要。
- 返回 `k` 。

判题标准:

系统会用下面的代码来测试你的题解:

```
int[] nums = [...]; // 输入数组
int[] expectedNums = [...]; // 长度正确的期望答案

int k = removeDuplicates(nums); // 调用

assert k == expectedNums.length;
for (int i = 0; i < k; i++) {
    assert nums[i] == expectedNums[i];
}
```

如果所有断言都通过，那么您的题解将被 **通过**。

示例 1：

输入： `nums = [1,1,2]`
输出： `2, nums = [1,2,_]`
解释： 函数应该返回新的长度 `2` ，并且原数组 *nums* 的前两个元素被修改为 `1`, `2` 。不需要考虑数组中超出新长度后面的元素。

示例 2：

输入： `nums = [0,0,1,1,1,2,2,3,3,4]`
输出： `5, nums = [0,1,2,3,4]`
解释： 函数应该返回新的长度 `5` ， 并且原数组 *nums* 的前五个元素被修改为 `0`, `1`, `2`, `3`, `4` 。不需要考虑数组中超出新长度后面的元素。

提示：

- $1 <= nums.length <= 3 * 10^4$
- $-10^4 <= nums[i] <= 10^4$

- nums 已按 **升序** 排列

函数签名如下：

```
int removeDuplicates(int[] nums);
```

简单解释一下什么是原地修改：

如果不是原地修改的话，我们直接 new 一个 int[] 数组，把去重之后的元素放进这个新数组中，然后返回这个新数组即可。

但是现在题目让你原地删除，不允许 new 新数组，只能在原数组上操作，然后返回一个长度，这样就可以通过返回的长度和原始数组得到我们去重后的元素有哪些了。

由于数组已经排序，所以重复的元素一定连在一起，找出它们并不难。但如果每找到一个重复元素就立即原地删除它，由于数组中删除元素涉及数据搬移，整个时间复杂度是会达到 O(N^2)。

高效解决这道题就要用到快慢指针技巧：

我们让慢指针 slow 走在后面，快指针 fast 走在前面探路，找到一个不重复的元素就赋值给 slow 并让 slow 前进一步。

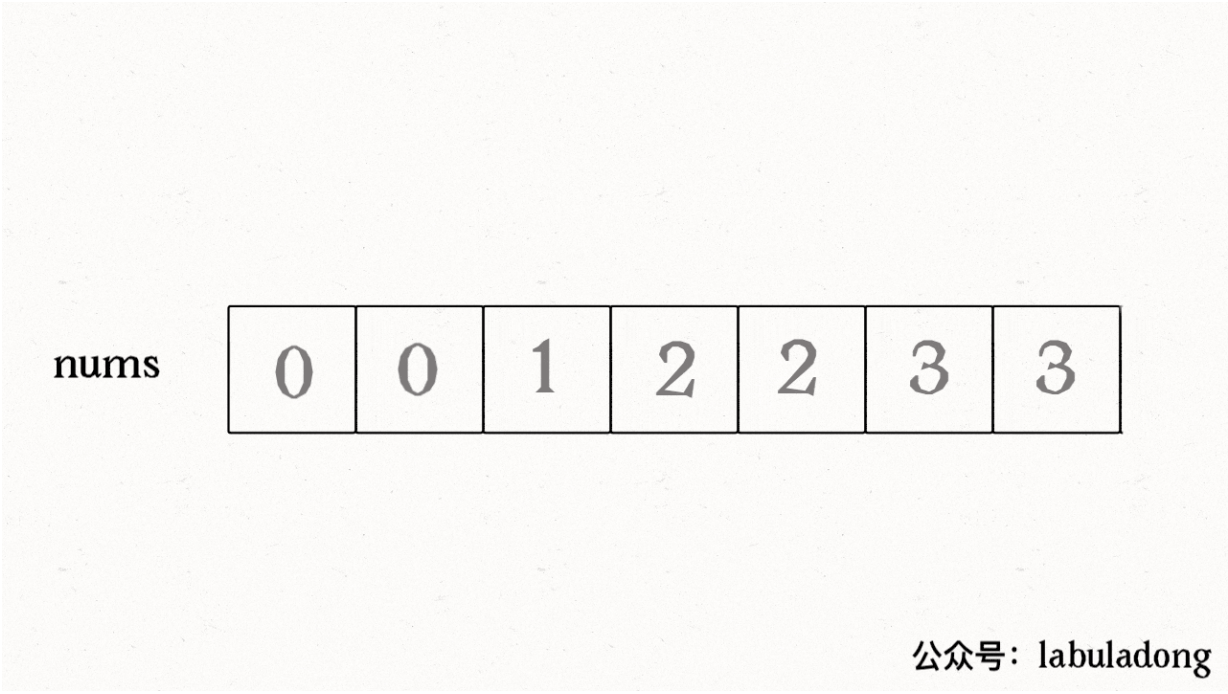
这样，就保证了 nums[0..slow] 都是无重复的元素，当 fast 指针遍历完整个数组 nums 后，nums[0..slow] 就是整个数组去重之后的结果。

看代码：

```
int removeDuplicates(int[] nums) {
    if (nums.length == 0) {
        return 0;
    }
    int slow = 0, fast = 0;
    while (fast < nums.length) {
        if (nums[fast] != nums[slow]) {
            slow++;
            // 维护 nums[0..slow] 无重复
            nums[slow] = nums[fast];
        }
        fast++;
    }
    // 数组长度为索引 + 1
    return slow + 1;
}
```

▶ 🌟 **代码可视化动画**🌟

算法执行的过程如下 GIF 图：

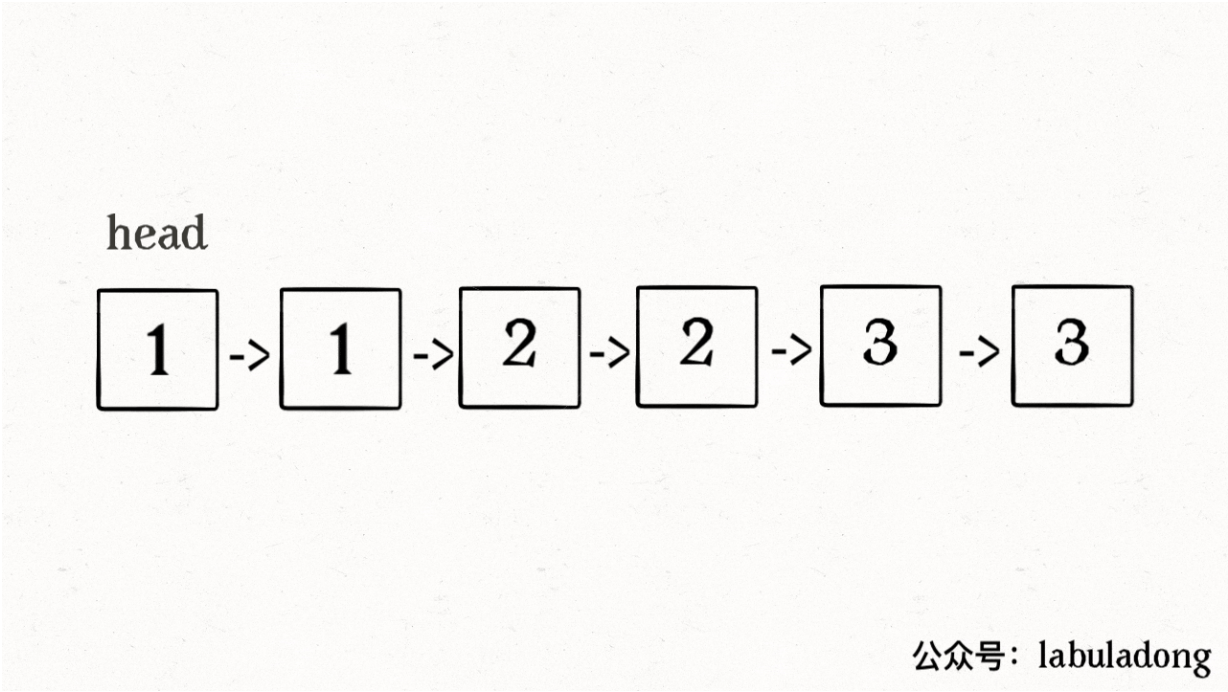


再简单扩展一下，看看力扣第 83 题「删除排序链表中的重复元素」，如果给你一个有序的单链表，如何去重呢？

其实和数组去重是一模一样的，唯一的区别是把数组赋值操作变成操作指针而已，你对照着之前的代码来看：

```
ListNode deleteDuplicates(ListNode head) {
    if (head == null) return null;
    ListNode slow = head, fast = head;
    while (fast != null) {
        if (fast.val != slow.val) {
            // nums[slow] = nums[fast];
            slow.next = fast;
            // slow++;
            slow = slow.next;
        }
        // fast++
        fast = fast.next;
    }
    // 断开与后面重复元素的连接
    slow.next = null;
    return head;
}
```

算法执行的过程请看下面这个 GIF：



> 这里可能有读者会问，链表中那些重复的元素并没有被删掉，就让这些节点在链表上挂着，合适吗？
>
> 这就要探讨不同语言的特性了，像 Java/Python 这类带有垃圾回收的语言，可以帮我们自动找到并回收这些「悬空」的链表节点的内存，而像 C++ 这类语言没有自动垃圾回收的机制，确实需要我们编写代码时手动释放掉这些节点的内存。
>
> 不过话说回来，就算法思维的培养来说，我们只需要知道这种快慢指针技巧即可。

除了让你在有序数组/链表中去重，题目还可能让你对数组中的某些元素进行「原地删除」。

比如力扣第 27 题「移除元素」，看下题目：

▼ 27. 移除元素 Leetcode | 力扣

给你一个数组 `nums` 和一个值 `val`，你需要 **原地** 移除所有数值等于 `val` 的元素，并返回移除后数组的新长度。

不要使用额外的数组空间，你必须仅使用 `O(1)` 额外空间并 **原地 修改输入数组**。

元素的顺序可以改变。你不需要考虑数组中超出新长度后面的元素。

说明:

为什么返回数值是整数，但输出的答案是数组呢?

请注意，输入数组是以**「引用」**方式传递的，这意味着在函数里修改输入数组对于调用者是可见的。

你可以想象内部操作如下:

```
// nums 是以“引用”方式传递的。也就是说，不对实参作任何拷贝
int len = removeElement(nums, val);
```

```
// 在函数里修改输入数组对于调用者是可见的。
// 根据你的函数返回的长度，它会打印出数组中 该长度范围内 的所有元素。
for (int i = 0; i < len; i++) {
    print(nums[i]);
}
```

示例 1：

输入： nums = [3,2,2,3], val = 3
输出： 2, nums = [2,2]
解释： 函数应该返回新的长度 **2**，并且 nums 中的前两个元素均为 **2**。你不需要考虑数组中超出新长度后面的元素。例如，函数返回的新长度为 2 ，而 nums = [2,2,3,3] 或 nums = [2,2,0,0]，也会被视作正确答案。

示例 2：

输入： nums = [0,1,2,2,3,0,4,2], val = 2
输出： 5, nums = [0,1,4,0,3]
解释： 函数应该返回新的长度 **5**，并且 nums 中的前五个元素为 **0**，**1**，**3**，**0**，**4**。注意这五个元素可为任意顺序。你不需要考虑数组中超出新长度后面的元素。

提示：

- 0 <= nums.length <="100</code">
- 0 <= nums[i] <="50</code">
- 0 <= val <="100</code">

函数签名如下：

```
int removeElement(int[] nums, int val);
```

题目要求我们把 nums 中所有值为 val 的元素原地删除，依然需要使用快慢指针技巧：

如果 fast 遇到值为 val 的元素，则直接跳过，否则就赋值给 slow 指针，并让 slow 前进一步。

这和前面说到的数组去重问题解法思路是完全一样的，就不画 GIF 了，直接看代码：

```
int removeElement(int[] nums, int val) {
    int fast = 0, slow = 0;
    while (fast < nums.length) {
        if (nums[fast] != val) {
            nums[slow] = nums[fast];
            slow++;
        }
        fast++;
```

```
    }
    return slow;
}
```

注意这里和有序数组去重的解法有一个细节差异，我们这里是先给 `nums[slow]` 赋值然后再给 `slow++`，这样可以保证 `nums[0..slow-1]` 是不包含值为 `val` 的元素的，最后的结果数组长度就是 `slow`。

实现了这个 `removeElement` 函数，接下来看看力扣第 283 题「移动零」：

给你输入一个数组 `nums`，请你**原地修改**，将数组中的所有值为 0 的元素移到数组末尾，函数签名如下：

```
void moveZeroes(int[] nums);
```

比如说给你输入 `nums = [0,1,4,0,2]`，你的算法没有返回值，但是会把 `nums` 数组原地修改成 `[1,4,2,0,0]`。

结合之前说到的几个题目，你是否有已经有了答案呢？

题目让我们将所有 0 移到最后，其实就相当于移除 `nums` 中的所有 0，然后再把后面的元素都赋值为 0 即可。

所以我们可以复用上一题的 `removeElement` 函数：

```
void moveZeroes(int[] nums) {
    // 去除 nums 中的所有 0，返回不含 0 的数组长度
    int p = removeElement(nums, 0);
    // 将 nums[p..] 的元素赋值为 0
    for (; p < nums.length; p++) {
        nums[p] = 0;
    }
}

// 见上文代码实现
int removeElement(int[] nums, int val);
```

▶ 🌈 代码可视化动画🌈

到这里，原地修改数组的这些题目就已经差不多了。数组中另一大类快慢指针的题目就是「滑动窗口算法」。

我在另一篇文章 滑动窗口算法核心框架详解 给出了滑动窗口的代码框架：

```
/* 滑动窗口算法框架 */
void slidingWindow(string s, string t) {
    unordered_map<char, int> window;
```

```
    int left = 0, right = 0;
    while (right < s.size()) {
        char c = s[right];
        // 右移（增大）窗口
        right++;
        // 进行窗口内数据的一系列更新

        while (window needs shrink) {
            char d = s[left];
            // 左移（缩小）窗口
            left++;
            // 进行窗口内数据的一系列更新
        }
    }
}
```

具体的题目本文就不重复了，这里只强调滑动窗口算法的快慢指针特性：

`left` 指针在后，`right` 指针在前，两个指针中间的部分就是「窗口」，算法通过扩大和缩小「窗口」来解决某些问题。

二、左右指针的常用算法

1、二分查找

我在另一篇文章 二分查找框架详解 中有详细探讨二分搜索代码的细节问题，这里只写最简单的二分算法，旨在突出它的双指针特性：

```
int binarySearch(int[] nums, int target) {
    // 一左一右两个指针相向而行
    int left = 0, right = nums.length - 1;
    while(left <= right) {
        int mid = (right + left) / 2;
        if(nums[mid] == target)
            return mid;
        else if (nums[mid] < target)
            left = mid + 1;
        else if (nums[mid] > target)
            right = mid - 1;
    }
    return -1;
}
```

2、两数之和

看下力扣第 167 题「两数之和 II」：

▼ 167. 两数之和 II - 输入有序数组 Leetcode | 力扣

给你一个下标从 **1** 开始的整数数组 numbers ， 该数组已按 **非递减顺序排列** ， 请你从数组中找出满足相加之和等于目标数 target 的两个数。如果设这两个数分别是 numbers[$index_1$] 和 numbers[$index_2$] ， 则 1 <= $index_1$ < $index_2$ <= numbers.length 。

以长度为 2 的整数数组 [$index_1$, $index_2$] 的形式返回这两个整数的下标 $index_1$ 和 $index_2$。

你可以假设每个输入 **只对应唯一的答案** ， 而且你 **不可以** 重复使用相同的元素。

你所设计的解决方案必须只使用常量级的额外空间。

示例 1：

输入： numbers = [***2***,***7***,11,15], target = 9
输出： [1,2]
解释： 2 与 7 之和等于目标数 9 。因此 $index_1$ = 1, $index_2$ = 2 。返回 [1, 2] 。

示例 2：

输入： numbers = [***2***,3,***4***], target = 6
输出： [1,3]
解释： 2 与 4 之和等于目标数 6 。因此 $index_1$ = 1, $index_2$ = 3 。返回 [1, 3] 。

示例 3：

输入： numbers = [***-1***,***0***], target = -1
输出： [1,2]
解释： -1 与 0 之和等于目标数 -1 。因此 $index_1$ = 1, $index_2$ = 2 。返回 [1, 2] 。

提示：

- 2 <= numbers.length <= $3 * 10^4$
- -1000 <= numbers[i] <= 1000
- numbers 按 **非递减顺序** 排列
- -1000 <= target <= 1000
- **仅存在一个有效答案**

只要数组有序，就应该想到双指针技巧。这道题的解法有点类似二分查找，通过调节 left 和 right 就可以调整 sum 的大小：

```
int[] twoSum(int[] nums, int target) {
    // 一左一右两个指针相向而行
    int left = 0, right = nums.length - 1;
```

```
        while (left < right) {
            int sum = nums[left] + nums[right];
            if (sum == target) {
                // 题目要求的索引是从 1 开始的
                return new int[]{left + 1, right + 1};
            } else if (sum < target) {
                left++; // 让 sum 大一点
            } else if (sum > target) {
                right--; // 让 sum 小一点
            }
        }
        return new int[]{-1, -1};
    }
```

我在另一篇文章 一个函数秒杀所有 nSum 问题 中也运用类似的左右指针技巧给出了 nSum 问题的一种通用思路，这里就不做赘述了。

3、反转数组

一般编程语言都会提供 reverse 函数，其实这个函数的原理非常简单，力扣第 344 题「反转字符串」就是类似的需求，让你反转一个 char[] 类型的字符数组，我们直接看代码吧：

```
void reverseString(char[] s) {
    // 一左一右两个指针相向而行
    int left = 0, right = s.length - 1;
    while (left < right) {
        // 交换 s[left] 和 s[right]
        char temp = s[left];
        s[left] = s[right];
        s[right] = temp;
        left++;
        right--;
    }
}
```

4、回文串判断

首先明确一下，回文串就是正着读和反着读都一样的字符串。

比如说字符串 aba 和 abba 都是回文串，因为它们对称，反过来还是和本身一样；反之，字符串 abac 就不是回文串。

现在你应该能感觉到回文串问题和左右指针肯定有密切的联系，比如让你判断一个字符串是不是回文串，你可以写出下面这段代码：

```
boolean isPalindrome(String s) {
    // 一左一右两个指针相向而行
    int left = 0, right = s.length() - 1;
    while (left < right) {
```

```
            if (s.charAt(left) != s.charAt(right)) {
                return false;
            }
            left++;
            right--;
        }
        return true;
    }
```

那接下来我提升一点难度，给你一个字符串，让你用双指针技巧从中找出最长的回文串，你会做吗？

这就是力扣第 5 题「最长回文子串」：

▼ 5. 最长回文子串 Leetcode | 力扣

给你一个字符串 `s`，找到 `s` 中最长的回文子串。

如果字符串的反序与原始字符串相同，则该字符串称为回文字符串。

示例 1：

```
输入：s = "babad"
输出："bab"
解释："aba" 同样是符合题意的答案。
```

示例 2：

```
输入：s = "cbbd"
输出："bb"
```

提示：

- `1 <= s.length <= 1000`
- `s` 仅由数字和英文字母组成

函数签名如下：

```
String longestPalindrome(String s);
```

找回文串的难点在于，回文串的的长度可能是奇数也可能是偶数，解决该问题的核心是**从中心向两端扩散的双指针技巧**。

如果回文串的长度为奇数，则它有一个中心字符；如果回文串的长度为偶数，则可以认为它有两个中心字符。所以我们可以先实现这样一个函数：

```

```

```
// 在 s 中寻找以 s[l] 和 s[r] 为中心的最长回文串
String palindrome(String s, int l, int r) {
    // 防止索引越界
    while (l >= 0 && r < s.length()
            && s.charAt(l) == s.charAt(r)) {
        // 双指针，向两边展开
        l--; r++;
    }
    // 返回以 s[l] 和 s[r] 为中心的最长回文串
    return s.substring(l + 1, r);
}
```

这样，如果输入相同的 `l` 和 `r`，就相当于寻找长度为奇数的回文串，如果输入相邻的 `l` 和 `r`，则相当于寻找长度为偶数的回文串。

那么回到最长回文串的问题，解法的大致思路就是：

```
for 0 <= i < len(s):
    找到以 s[i] 为中心的回文串
    找到以 s[i] 和 s[i+1] 为中心的回文串
    更新答案
```

翻译成代码，就可以解决最长回文子串这个问题：

```
String longestPalindrome(String s) {
    String res = "";
    for (int i = 0; i < s.length(); i++) {
        // 以 s[i] 为中心的最长回文子串
        String s1 = palindrome(s, i, i);
        // 以 s[i] 和 s[i+1] 为中心的最长回文子串
        String s2 = palindrome(s, i, i + 1);
        // res = longest(res, s1, s2)
        res = res.length() > s1.length() ? res : s1;
        res = res.length() > s2.length() ? res : s2;
    }
    return res;
}
```

▶ 🌟 **代码可视化动画**🌟

你应该能发现最长回文子串使用的左右指针和之前题目的左右指针有一些不同：之前的左右指针都是从两端向中间相向而行，而回文子串问题则是让左右指针从中心向两端扩展。不过这种情况也就回文串这类问题会遇到，所以我也把它归为左右指针了。

到这里，数组相关的双指针技巧就全部讲完了，这些技巧的更多扩展延伸见 更多数组双指针经典高频题。

如果你有高质量的问题，可以 点击这里 进入本文的讨论区。

▶ 引用本文的题目

安装 我的 Chrome 刷题插件 点开下列题目可直接查看解题思路：

LeetCode	力扣
1. Two Sum	1. 两数之和
125. Valid Palindrome	125. 验证回文串
131. Palindrome Partitioning	131. 分割回文串
267. Palindrome Permutation II🔒	267. 回文排列 II🔒
281. Zigzag Iterator🔒	281. 锯齿迭代器🔒
42. Trapping Rain Water	42. 接雨水
658. Find K Closest Elements	658. 找到 K 个最接近的元素
80. Remove Duplicates from Sorted Array II	80. 删除有序数组中的重复项 II
82. Remove Duplicates from Sorted List II	82. 删除排序链表中的重复元素 II
9. Palindrome Number	9. 回文数
-	剑指 Offer 21. 调整数组顺序使奇数位于偶数前面
-	剑指 Offer 57. 和为s的两个数字
-	剑指 Offer II 018. 有效的回文

▶ 引用本文的文章

- 【强化练习】双指针更多经典习题
- 一个方法团灭 nSum 问题
- 一道数组去重的算法题把我整不会了
- 二维数组的花式遍历技巧
- 分治算法详解：运算优先级
- 动态规划之子序列问题解题模板
- 如何判断回文链表
- 我写了首诗，把滑动窗口算法变成了默写题
- 我的刷题心得：算法的本质
- 扫描线技巧：安排会议室
- 本站简介
- 用算法打败算法
- 田忌赛马背后的算法决策
- 算法时空复杂度分析实用指南
- 算法笔试「骗分」套路

更多精品课程可查看 我的网站；扫码查看更多配套学习套件：

【强化练习】数组双指针经典习题

不要小看数组双指针技巧，它可以变出很多花样来。下面就来看看几个有趣的例题。

> 首先，你学会了合并有序的单链表，如果让你合并有序数组，会有哪些不同呢？

▶ **引用本文的文章**

- 双指针技巧秒杀七道数组题目

——————————————————

本文为网站会员内容，请 点这里 查看。

滑动窗口算法核心代码模板

Stars 123k 精品课程 查看 知乎 @labuladong B站 @labuladong

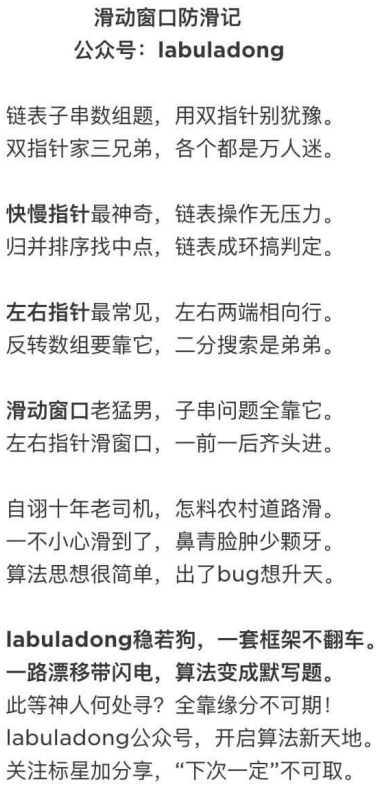
学算法认准 labuladong，致力于把算法讲清楚！网页版 点这里。

读完本文，你不仅学会了算法套路，还可以顺便解决如下题目：

LeetCode	力扣	难度
3. Longest Substring Without Repeating Characters	3. 无重复字符的最长子串	🟠
438. Find All Anagrams in a String	438. 找到字符串中所有字母异位词	🟠
567. Permutation in String	567. 字符串的排列	🟠
76. Minimum Window Substring	76. 最小覆盖子串	🔴
-	剑指 Offer 48. 最长不含重复字符的子字符串	🟠
-	剑指 Offer II 014. 字符串中的变位词	🟠
-	剑指 Offer II 015. 字符串中的所有变位词	🟠
-	剑指 Offer II 016. 不含重复字符的最长子字符串	🟠
-	剑指 Offer II 017. 含有所有字符的最短字符串	🔴

> tip：本文有视频版：滑动窗口算法核心模板框架。建议关注我的 B 站账号，我会用视频领读的方式带大家学习那些稍有难度的算法技巧。

鉴于后文 二分搜索框架详解 的那首《二分搜索升天词》很受好评，并在民间广为流传，成为安睡助眠的一剂良方，今天在滑动窗口算法框架中，我再次编写一首小诗来歌颂滑动窗口算法的伟大（手动狗头）：



哈哈，我自己快把自己夸上天了，大家乐一乐就好，不要当真：）

关于双指针的快慢指针和左右指针的用法，可以参见前文 双指针技巧汇总，本文就解决一类最难掌握的双指针技巧：滑动窗口技巧。并总结出一套框架，可以保你闭着眼睛都能写出正确的解法。

滑动窗口框架概览

滑动窗口算法技巧主要用来解决子数组问题，比如让你寻找符合某个条件的最长/最短子数组。

如果用暴力解的话，你需要嵌套 for 循环这样穷举所有子数组，时间复杂度是 O(N^2)：

```
for (int i = 0; i < nums.size(); i++) {
    for (int j = i; j < nums.size(); j++) {
        // nums[i, j] 是一个子数组
    }
}
```

滑动窗口算法技巧的思路也不难，就是维护一个窗口，不断滑动，然后更新答案，该算法的大致逻辑如下：

```
int left = 0, right = 0;

while (left < right && right < nums.size()) {
    // 增大窗口
    window.add(nums[right]);
    right++;

    while (window needs shrink) {
        // 缩小窗口
```

```
            window.remove(nums[left]);
            left++;
        }
    }
```

基于滑动窗口算法框架写出的代码，时间复杂度是 O(N)，比嵌套 for 循环的暴力解法效率高。

> 肯定有读者要问了，你这个滑动窗口框架不也用了一个嵌套 while 循环？为啥复杂度是 O(N) 呢？
>
> 简单说，指针 left, right 不会回退（它们的值只增不减），所以字符串/数组中的每个元素都只会进入窗口一次，然后被移出窗口一次，不会说有某些元素多次进入和离开窗口，所以算法的时间复杂度就和字符串/数组的长度成正比。
>
> 反观嵌套 for 循环的暴力解法，那个 j 会回退，所以某些元素会进入和离开窗口多次，所以时间复杂度就是 O(N^2) 了。
>
> 我在 算法时空复杂度分析实用指南 有教大家如何从理论上估算时间空间复杂度，这里就不展开了。

其实困扰大家的，不是算法的思路，而是各种细节问题。比如说如何向窗口中添加新元素，如何缩小窗口，在窗口滑动的哪个阶段更新结果。即便你明白了这些细节，代码也容易出 bug，找 bug 还不知道怎么找，真的挺让人心烦的。

所以今天我就写一套滑动窗口算法的代码框架，我连再哪里做输出 debug 都给你写好了，以后遇到相关的问题，你就默写出来如下框架然后改三个地方就行，保证不会出 bug。

因为本文的例题大多是子串相关的题目，字符串实际上就是数组，所以我就把输入设置成字符串了。你做题的时候根据具体题目自行变通即可：

```
/* 滑动窗口算法框架 */
void slidingWindow(string s) {
    // 用合适的数据结构记录窗口中的数据，根据具体场景变通
    // 比如说，我想记录窗口中元素出现的次数，就用 map
    // 我想记录窗口中的元素和，就用 int
    unordered_map<char, int> window;

    int left = 0, right = 0;
    while (right < s.size()) {
        // c 是将移入窗口的字符
        char c = s[right];
        window.add(c)
        // 增大窗口
        right++;
        // 进行窗口内数据的一系列更新
        ...

        /*** debug 输出的位置 ***/
        // 注意在最终的解法代码中不要 print
        // 因为 IO 操作很耗时，可能导致超时
        printf("window: [%d, %d)\n", left, right);
```

```
        /*********************/

        // 判断左侧窗口是否要收缩
        while (left < right && window needs shrink) {
            // d 是将移出窗口的字符
            char d = s[left];
            window.remove(d)
            // 缩小窗口
            left++;
            // 进行窗口内数据的一系列更新
            ...
        }
    }
}
```

框架中两处 `...` 表示的更新窗口数据的地方，在具体的题目中，你需要做的就是往这里面填代码逻辑。而且，这两个 `...` 处的操作分别是扩大和缩小窗口的更新操作，等会你会发现它们操作是完全对称的。

说句题外话，有些读者评论我这个框架，说散列表速度慢，不如用数组代替散列表；还有些人喜欢把代码写得特别短小，说我这样代码太多余，速度不够快。我的意见是，算法主要看时间复杂度，你能确保自己的时间复杂度最优就行了。至于 LeetCode 的运行速度，那个有点玄学，只要不是慢的离谱就没啥问题，根本不值得你从编译层面优化，不要舍本逐末……

再说，我的算法教程重点在于算法思想，你先做到能把框架思维运用自如，然后随便你魔改代码好吧，保你怎么写都能写对。

言归正传，下面就直接上四道力扣原题来套这个框架，其中第一道题会详细说明其原理，后面四道就直接闭眼睛秒杀了。

因为滑动窗口很多时候都是在处理字符串相关的问题，而 Java 处理字符串不方便，所以本文代码为 C++ 实现。不会用到什么特定的编程语言技巧，但是还是简单介绍一下一些用到的数据结构，以免有的读者因为语言的细节问题阻碍对算法思想的理解：

`unordered_map` 就是哈希表（字典），相当于 Java 的 `HashMap`，它的一个方法 `count(key)` 相当于 Java 的 `containsKey(key)` 可以判断键 key 是否存在。

可以使用方括号访问键对应的值 `map[key]`。需要注意的是，如果该 `key` 不存在，C++ 会自动创建这个 key，并把 `map[key]` 赋值为 0。所以代码中多次出现的 `map[key]++` 相当于 Java 的 `map.put(key, map.getOrDefault(key, 0) + 1)`。

另外，Java 中的 Integer 和 String 这种包装类不能直接用 `==` 进行相等判断，而应该使用类的 `equals` 方法，这个语言特性坑了不少读者，在代码部分我会给出具体提示。

一、最小覆盖子串

先来看看力扣第 76 题「最小覆盖子串」难度 Hard：

▼ 76. 最小覆盖子串 Leetcode | 力扣

给你一个字符串 `s` 、一个字符串 `t` 。返回 `s` 中涵盖 `t` 所有字符的最小子串。如果 `s` 中不存在涵盖 `t` 所有字符的子串，则返回空字符串 `""` 。

注意：

- 对于 t 中重复字符，我们寻找的子字符串中该字符数量必须不少于 t 中该字符数量。
- 如果 s 中存在这样的子串，我们保证它是唯一的答案。

示例 1：

```
输入：s = "ADOBECODEBANC", t = "ABC"
输出："BANC"
解释：最小覆盖子串 "BANC" 包含来自字符串 t 的 %%%%%A%%%%%、%%%%%B%%%%% 和
%%%%%C%%%%%。
```

示例 2：

```
输入：s = "a", t = "a"
输出："a"
解释：整个字符串 s 是最小覆盖子串。
```

示例 3:

```
输入：s = "a", t = "aa"
输出：""
解释：t 中两个字符 %%%%%a%%%%% 均应包含在 s 的子串中，
因此没有符合条件的子字符串，返回空字符串。
```

提示：

- m == s.length
- n == t.length
- 1 <= m, n <= 10^5
- s 和 t 由英文字母组成

进阶：你能设计一个在 o(m+n) 时间内解决此问题的算法吗？

就是说要在 S(source) 中找到包含 T(target) 中全部字母的一个子串，且这个子串一定是所有可能子串中最短的。

如果我们使用暴力解法，代码大概是这样的：

```
for (int i = 0; i < s.size(); i++)
    for (int j = i + 1; j < s.size(); j++)
        if s[i:j] 包含 t 的所有字母:
            更新答案
```

思路很直接，但是显然，这个算法的复杂度肯定大于 O(N^2) 了，不好。

滑动窗口算法的思路是这样：

1、我们在字符串 `S` 中使用双指针中的左右指针技巧，初始化 `left = right = 0`，把索引**左闭右开**区间 `[left, right)` 称为一个「窗口」。

> **理论上你可以设计两端都开或者两端都闭的区间，但设计为左闭右开区间是最方便处理的。**
>
> 因为这样初始化 `left = right = 0` 时区间 `[0, 0)` 中没有元素，但只要让 `right` 向右移动（扩大）一位，区间 `[0, 1)` 就包含一个元素 `0` 了。
>
> 如果你设置为两端都开的区间，那么让 `right` 向右移动一位后开区间 `(0, 1)` 仍然没有元素；如果你设置为两端都闭的区间，那么初始区间 `[0, 0]` 就包含了一个元素。这两种情况都会给边界处理带来不必要的麻烦。

2、我们先不断地增加 `right` 指针扩大窗口 `[left, right)`，直到窗口中的字符串符合要求（包含了 `T` 中的所有字符）。

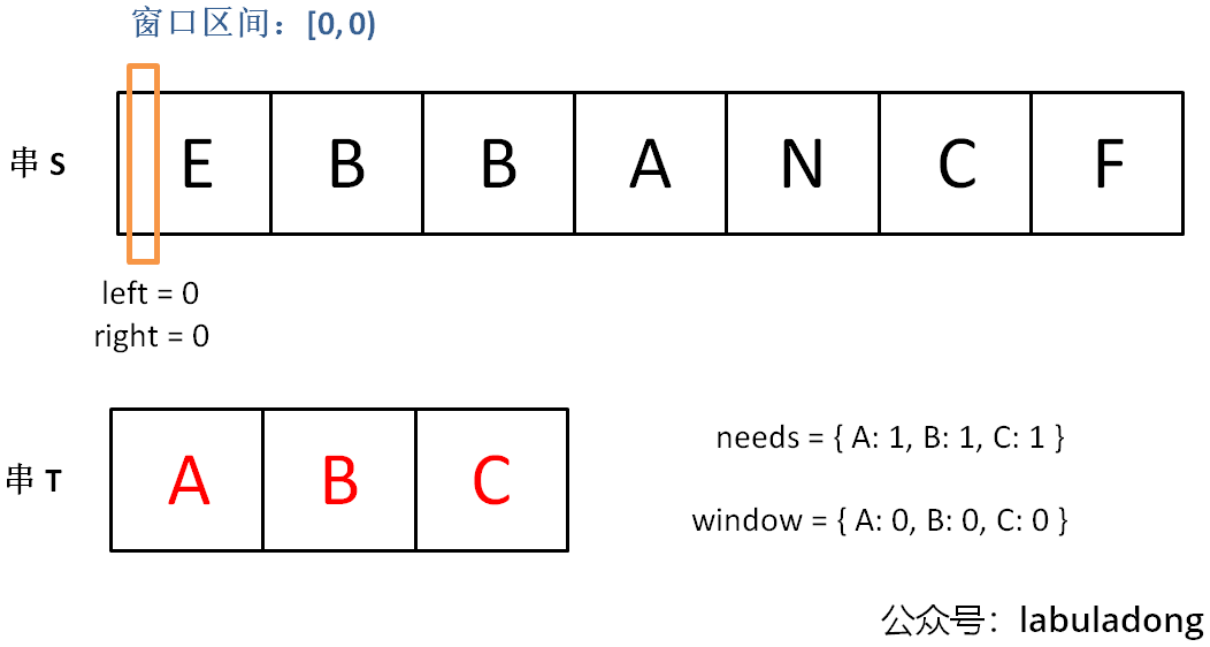
3、此时，我们停止增加 `right`，转而不断增加 `left` 指针缩小窗口 `[left, right)`，直到窗口中的字符串不再符合要求（不包含 `T` 中的所有字符了）。同时，每次增加 `left`，我们都要更新一轮结果。

4、重复第 2 和第 3 步，直到 `right` 到达字符串 `S` 的尽头。

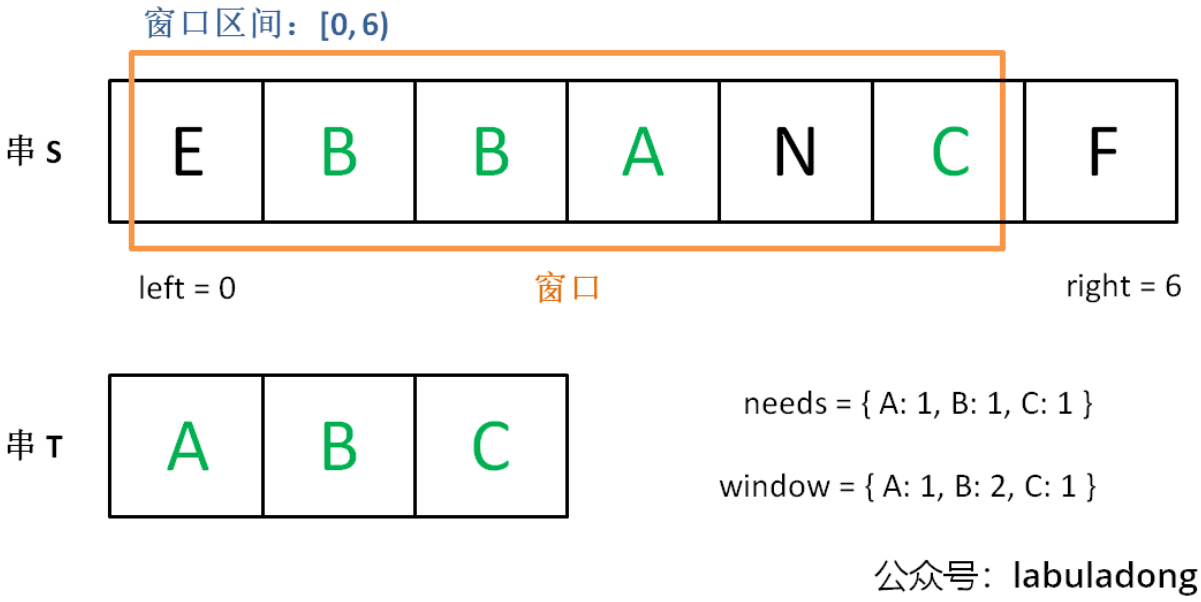
这个思路其实也不难，**第 2 步相当于在寻找一个「可行解」，然后第 3 步在优化这个「可行解」，最终找到最优解**，也就是最短的覆盖子串。左右指针轮流前进，窗口大小增增减减，就好像一条毛毛虫，一伸一缩，不断向右滑动，这就是「滑动窗口」这个名字的来历。

下面画图理解一下，`needs` 和 `window` 相当于计数器，分别记录 `T` 中字符出现次数和「窗口」中的相应字符的出现次数。

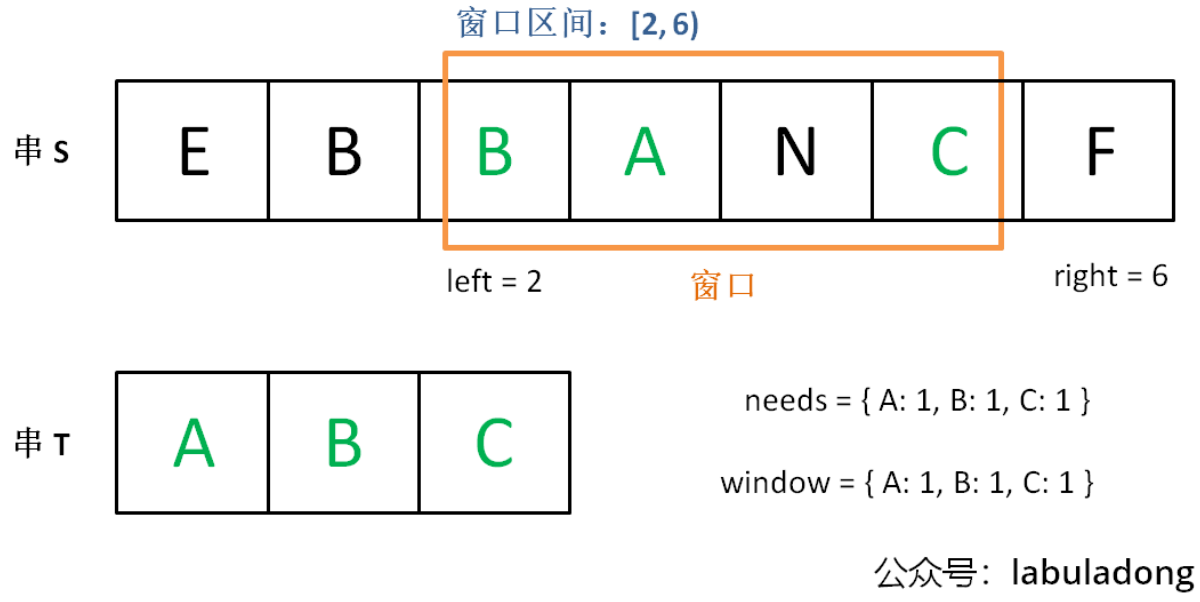
初始状态：



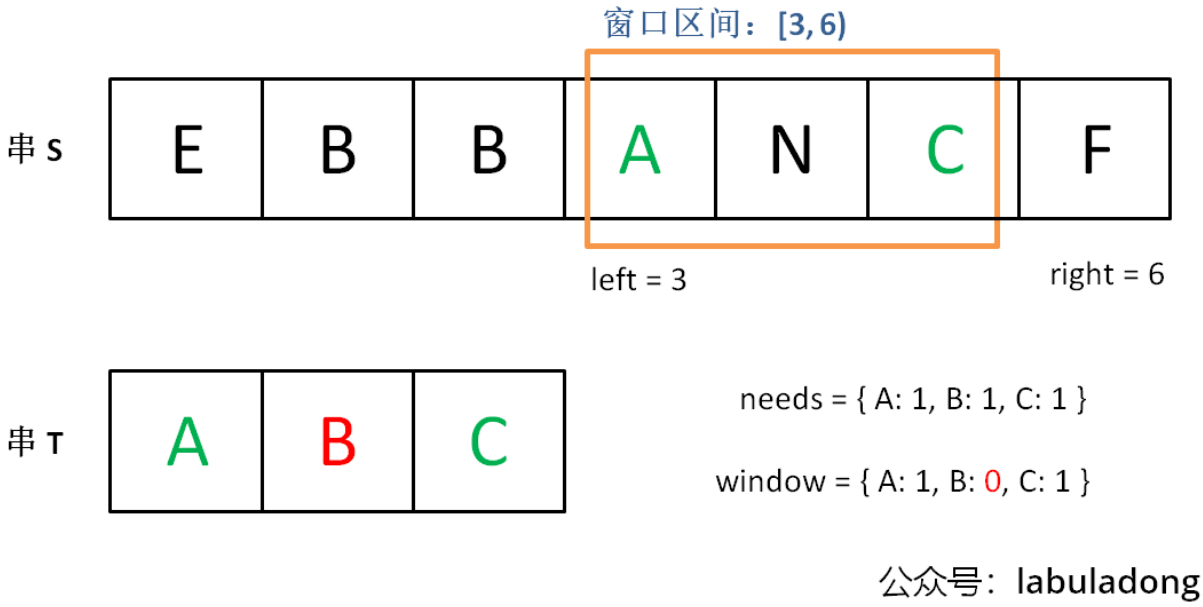
增加 right，直到窗口 [left, right) 包含了 T 中所有字符：



现在开始增加 left，缩小窗口 [left, right)：



直到窗口中的字符串不再符合要求，left 不再继续移动：



之后重复上述过程，先移动 `right`，再移动 `left`…… 直到 `right` 指针到达字符串 `S` 的末端，算法结束。

如果你能够理解上述过程，恭喜，你已经完全掌握了滑动窗口算法思想。**现在我们来看看这个滑动窗口代码框架怎么用**：

首先，初始化 `window` 和 `need` 两个哈希表，记录窗口中的字符和需要凑齐的字符：

```
unordered_map<char, int> need, window;
for (char c : t) need[c]++;
```

然后，使用 `left` 和 `right` 变量初始化窗口的两端，不要忘了，区间 `[left, right)` 是左闭右开的，所以初始情况下窗口没有包含任何元素：

```
int left = 0, right = 0;
int valid = 0;
while (right < s.size()) {
    // 开始滑动
}
```

其中 `valid` 变量表示窗口中满足 `need` 条件的字符个数，如果 `valid` 和 `need.size` 的大小相同，则说明窗口已满足条件，已经完全覆盖了串 `T`。

现在开始套模板，只需要思考以下几个问题：

1、什么时候应该移动 `right` 扩大窗口？窗口加入字符时，应该更新哪些数据？

2、什么时候窗口应该暂停扩大，开始移动 `left` 缩小窗口？从窗口移出字符时，应该更新哪些数据？

3、我们要的结果应该在扩大窗口时还是缩小窗口时进行更新？

如果一个字符进入窗口，应该增加 `window` 计数器；如果一个字符将移出窗口的时候，应该减少 `window` 计数器；当 `valid` 满足 `need` 时应该收缩窗口；应该在收缩窗口的时候更新最终结果。

下面是完整代码：

```
string minWindow(string s, string t) {
    unordered_map<char, int> need, window;
    for (char c : t) need[c]++;

    int left = 0, right = 0;
    int valid = 0;
    // 记录最小覆盖子串的起始索引及长度
    int start = 0, len = INT_MAX;
    while (right < s.size()) {
        // c 是将移入窗口的字符
        char c = s[right];
        // 扩大窗口
        right++;
        // 进行窗口内数据的一系列更新
        if (need.count(c)) {
            window[c]++;
            if (window[c] == need[c])
                valid++;
        }

        // 判断左侧窗口是否要收缩
        while (valid == need.size()) {
            // 在这里更新最小覆盖子串
            if (right - left < len) {
                start = left;
                len = right - left;
            }
            // d 是将移出窗口的字符
            char d = s[left];
            // 缩小窗口
            left++;
            // 进行窗口内数据的一系列更新
            if (need.count(d)) {
                if (window[d] == need[d])
                    valid--;
                window[d]--;
            }
        }
    }
    // 返回最小覆盖子串
    return len == INT_MAX ?
        "" : s.substr(start, len);
}
```

▶ 👾 代码可视化动画👾

使用 Java 的读者要尤其警惕语言特性的陷阱。Java 的 Integer，String 等类型判定相等应该用 `equals` 方法而不能直接用等号 `==`，这是 Java 包装类的一个隐晦细节。所以在缩小窗口更新数据的时候，不能直接改写

为 `window.get(d) == need.get(d)`，而要用 `window.get(d).equals(need.get(d))`，之后的题目代码同理。

需要注意的是，当我们发现某个字符在 `window` 的数量满足了 `need` 的需要，就要更新 `valid`，表示有一个字符已经满足要求。而且，你能发现，两次对窗口内数据的更新操作是完全对称的。

当 `valid == need.size()` 时，说明 `T` 中所有字符已经被覆盖，已经得到一个可行的覆盖子串，现在应该开始收缩窗口了，以便得到「最小覆盖子串」。

移动 `left` 收缩窗口时，窗口内的字符都是可行解，所以应该在收缩窗口的阶段进行最小覆盖子串的更新，以便从可行解中找到长度最短的最终结果。

至此，应该可以完全理解这套框架了，滑动窗口算法又不难，就是细节问题让人烦得很。**以后遇到滑动窗口算法，你就按照这框架写代码，保准没有 bug，还省事儿**。

下面就直接利用这套框架秒杀几道题吧，你基本上一眼就能看出思路了。

二、字符串排列

这是力扣第 567 题「字符串的排列」，难度中等：

▼ 567. 字符串的排列 Leetcode | 力扣

给你两个字符串 `s1` 和 `s2` ，写一个函数来判断 `s2` 是否包含 `s1` 的排列。如果是，返回 `true` ；否则，返回 `false` 。

换句话说，`s1` 的排列之一是 `s2` 的 **子串** 。

示例 1：

```
输入：s1 = "ab" s2 = "eidbaooo"
输出：true
解释：s2 包含 s1 的排列之一 ("ba").
```

示例 2：

```
输入：s1= "ab" s2 = "eidboaoo"
输出：false
```

提示：

- $1 <= s1.length, s2.length <= 10^4$
- `s1` 和 `s2` 仅包含小写字母

注意哦，输入的 `s1` 是可以包含重复字符的，所以这个题难度不小。

这种题目，是明显的滑动窗口算法，**相当给你一个 `S` 和一个 `T`，请问你 `S` 中是否存在一个子串，包含 `T` 中所有字符且不包含其他字符**？

首先，先复制粘贴之前的算法框架代码，然后明确刚才提出的几个问题，即可写出这道题的答案：

```
// 判断 s 中是否存在 t 的排列
bool checkInclusion(string t, string s) {
    unordered_map<char, int> need, window;
    for (char c : t) need[c]++;

    int left = 0, right = 0;
    int valid = 0;
    while (right < s.size()) {
        char c = s[right];
        right++;
        // 进行窗口内数据的一系列更新
        if (need.count(c)) {
            window[c]++;
            if (window[c] == need[c])
                valid++;
        }

        // 判断左侧窗口是否要收缩
        while (right - left >= t.size()) {
            // 在这里判断是否找到了合法的子串
            if (valid == need.size())
                return true;
            char d = s[left];
            left++;
            // 进行窗口内数据的一系列更新
            if (need.count(d)) {
                if (window[d] == need[d])
                    valid--;
                window[d]--;
            }
        }
    }
    // 未找到符合条件的子串
    return false;
}
```

▶ 🌈 代码可视化动画🌈

对于这道题的解法代码，基本上和最小覆盖子串一模一样，只需要改变几个地方：

1、本题移动 `left` 缩小窗口的时机是窗口大小大于 `t.size()` 时，因为排列嘛，显然长度应该是一样的。

2、当发现 `valid == need.size()` 时，就说明窗口中就是一个合法的排列，所以立即返回 `true`。

至于如何处理窗口的扩大和缩小，和最小覆盖子串完全相同。

> 由于这道题中 `[left, right)` 其实维护的是一个**定长**的窗口，窗口大小为 `t.size()`。因为定长窗口每次向前滑动时只会移出一个字符，所以可以把内层的 while 改成 if，效果是一样的。

三、找所有字母异位词

这是力扣第 438 题「找到字符串中所有字母异位词」，难度中等：

▼ 438. 找到字符串中所有字母异位词 Leetcode | 力扣

给定两个字符串 `s` 和 `p`，找到 `s` 中所有 `p` 的 **异位词** 的子串，返回这些子串的起始索引。不考虑答案输出的顺序。

异位词 指由相同字母重排列形成的字符串（包括相同的字符串）。

示例 1:

```
输入: s = "cbaebabacd", p = "abc"
输出: [0,6]
解释:
起始索引等于 0 的子串是 "cba", 它是 "abc" 的异位词。
起始索引等于 6 的子串是 "bac", 它是 "abc" 的异位词。
```

示例 2:

```
输入: s = "abab", p = "ab"
输出: [0,1,2]
解释:
起始索引等于 0 的子串是 "ab", 它是 "ab" 的异位词。
起始索引等于 1 的子串是 "ba", 它是 "ab" 的异位词。
起始索引等于 2 的子串是 "ab", 它是 "ab" 的异位词。
```

提示:

- $1 <= s.length, p.length <= 3 * 10^4$
- `s` 和 `p` 仅包含小写字母

呵呵，这个所谓的字母异位词，不就是排列吗，搞个高端的说法就能糊弄人了吗？**相当于，输入一个串 `S`，一个串 `T`，找到 `S` 中所有 `T` 的排列，返回它们的起始索引**。

直接默写一下框架，明确刚才讲的 4 个问题，即可秒杀这道题：

```
vector<int> findAnagrams(string s, string t) {
    unordered_map<char, int> need, window;
    for (char c : t) need[c]++;

    int left = 0, right = 0;
    int valid = 0;
    vector<int> res; // 记录结果
    while (right < s.size()) {
```

```
            char c = s[right];
            right++;
            // 进行窗口内数据的一系列更新
            if (need.count(c)) {
                window[c]++;
                if (window[c] == need[c])
                    valid++;
            }
            // 判断左侧窗口是否要收缩
            while (right - left >= t.size()) {
                // 当窗口符合条件时，把起始索引加入 res
                if (valid == need.size())
                    res.push_back(left);
                char d = s[left];
                left++;
                // 进行窗口内数据的一系列更新
                if (need.count(d)) {
                    if (window[d] == need[d])
                        valid--;
                    window[d]--;
                }
            }
        }
        return res;
    }
```

跟寻找字符串的排列一样，只是找到一个合法异位词（排列）之后将起始索引加入 `res` 即可。

▶ 🌈 代码可视化动画🌈

四、最长无重复子串

这是力扣第 3 题「无重复字符的最长子串」，难度中等：

▼ 3. 无重复字符的最长子串 Leetcode | 力扣

给定一个字符串 `s` ，请你找出其中不含有重复字符的 **最长子串** 的长度。

示例 1:

```
输入：s = "abcabcbb"
输出：3
解释：因为无重复字符的最长子串是 "abc"，所以其长度为 3。
```

示例 2:

```
输入：s = "bbbbb"
输出：1
```

解释： 因为无重复字符的最长子串是 "b"，所以其长度为 1。

示例 3:

输入： s = "pwwkew"
输出： 3
解释： 因为无重复字符的最长子串是 "wke"，所以其长度为 3。
请注意，你的答案必须是 **子串** 的长度，"pwke" 是一个*子序列*，不是子串。

提示：

- $0 <= s.length <= 5 * 10^4$
- s 由英文字母、数字、符号和空格组成

这个题终于有了点新意，不是一套框架就出答案，不过反而更简单了，稍微改一改框架就行了：

```
int lengthOfLongestSubstring(string s) {
    unordered_map<char, int> window;

    int left = 0, right = 0;
    int res = 0; // 记录结果
    while (right < s.size()) {
        char c = s[right];
        right++;
        // 进行窗口内数据的一系列更新
        window[c]++;
        // 判断左侧窗口是否要收缩
        while (window[c] > 1) {
            char d = s[left];
            left++;
            // 进行窗口内数据的一系列更新
            window[d]--;
        }
        // 在这里更新答案
        res = max(res, right - left);
    }
    return res;
}
```

▶ 🎃 代码可视化动画🎃

这就是变简单了，连 need 和 valid 都不需要，而且更新窗口内数据也只需要简单的更新计数器 window 即可。

当 window[c] 值大于 1 时，说明窗口中存在重复字符，不符合条件，就该移动 left 缩小窗口了嘛。

唯一需要注意的是，在哪里更新结果 `res` 呢？我们要的是最长无重复子串，哪一个阶段可以保证窗口中的字符串是没有重复的呢？

这里和之前不一样，要在收缩窗口完成后更新 `res`，因为窗口收缩的 while 条件是存在重复元素，换句话说收缩完成后一定保证窗口中没有重复嘛。

好了，滑动窗口算法模板就讲到这里，希望大家能理解其中的思想，记住算法模板并融会贯通。回顾一下，遇到子数组/子串相关的问题，你只要能回答出来以下几个问题，就能运用滑动窗口算法：

1、什么时候应该扩大窗口？

2、什么时候应该缩小窗口？

3、什么时候应该更新答案？

我在 滑动窗口经典习题 中使用这套思维模式列举了更多经典的习题，旨在强化你对算法的理解和记忆，以后就再也不怕子串、子数组问题了。

如果你有高质量的问题，可以 点击这里 进入本文的讨论区。

▶ **引用本文的题目**

安装 我的 Chrome 刷题插件 点开下列题目可直接查看解题思路：

LeetCode	力扣
1004. Max Consecutive Ones III	1004. 最大连续1的个数 III
1438. Longest Continuous Subarray With Absolute Diff Less Than or Equal to Limit	1438. 绝对差不超过限制的最长连续子数组
1658. Minimum Operations to Reduce X to Zero	1658. 将 x 减到 0 的最小操作数
209. Minimum Size Subarray Sum	209. 长度最小的子数组
219. Contains Duplicate II	219. 存在重复元素 II
220. Contains Duplicate III	220. 存在重复元素 III
340. Longest Substring with At Most K Distinct Characters🔒	340. 至多包含 K 个不同字符的最长子串🔒
395. Longest Substring with At Least K Repeating Characters	395. 至少有 K 个重复字符的最长子串
424. Longest Repeating Character Replacement	424. 替换后的最长重复字符
560. Subarray Sum Equals K	560. 和为 K 的子数组
713. Subarray Product Less Than K	713. 乘积小于 K 的子数组
862. Shortest Subarray with Sum at Least K	862. 和至少为 K 的最短子数组
-	剑指 Offer 48. 最长不含重复字符的子字符串

LeetCode	力扣
-	剑指 Offer 57 - II. 和为s的连续正数序列
-	剑指 Offer II 008. 和大于等于 target 的最短子数组
-	剑指 Offer II 009. 乘积小于 K 的子数组
-	剑指 Offer II 010. 和为 k 的子数组
-	剑指 Offer II 014. 字符串中的变位词
-	剑指 Offer II 015. 字符串中的所有变位词
-	剑指 Offer II 016. 不含重复字符的最长子字符串
-	剑指 Offer II 017. 含有所有字符的最短字符串
-	剑指 Offer II 057. 值和下标之差都在给定的范围内

▶ 引用本文的文章

- labuladong 的数据结构精品课 V2.1
- 【强化练习】单调队列的通用实现及经典习题
- 【强化练习】单调队列的通用实现及经典习题
- 【强化练习】滑动窗口算法经典习题
- 【强化练习】滑动窗口算法经典习题
- 分治算法详解：运算优先级
- 动态规划设计：最大子数组
- 单调队列结构解决滑动窗口问题
- 双指针技巧秒杀七道数组题目
- 归并排序详解及应用
- 我的刷题心得：算法的本质
- 本站简介
- 滑动窗口算法延伸：Rabin Karp 字符匹配算法
- 环形数组技巧
- 算法时空复杂度分析实用指南

———————————————

更多精品课程可查看 我的网站；扫码查看更多配套学习套件：

算法学习网站：https://labuladong.gitee.io/algo/ 或 https://labuladong.github.io/algo/

二维码太多，长按识别不到？放大图片 -> 让对应二维码充满屏幕 -> 长按识别该二维码

【强化练习】滑动窗口算法经典习题

滑动窗口的应用非常广泛，但我们的框架可以套用所有需要滑动窗口算法的题目中，下面就来举例一些最经典的题目，我会反复强调前文 滑动窗口算法框架 中的思考方式，以强化你对这个算法的理解和记忆。

▶ **引用本文的文章**

- 我写了首诗，把滑动窗口算法变成了默写题
- 滑动窗口算法延伸：Rabin Karp 字符匹配算法

————————————————

本文为网站会员内容，请 点这里 查看。

二分搜索算法核心代码模板

Stars 123k 精品课程 查看 知乎 @labuladong B站 @labuladong

学算法认准 labuladong，致力于把算法讲清楚！网页版 点这里。

读完本文，你不仅学会了算法套路，还可以顺便解决如下题目：

LeetCode	力扣	难度
34. Find First and Last Position of Element in Sorted Array	34. 在排序数组中查找元素的第一个和最后一个位置	🟠
704. Binary Search	704. 二分查找	🟢
-	剑指 Offer 53 - I. 在排序数组中查找数字 I	🟢

> tip：本文有视频版：二分搜索核心框架套路。建议关注我的 B 站账号，我会用视频领读的方式带大家学习那些稍有难度的算法技巧。

本文是公众号文章 二分搜索详解 的修订版，添加了对二分搜索算法更详细的分析。

先给大家讲个笑话乐呵一下：

有一天阿东到图书馆借了 N 本书，出图书馆的时候，警报响了，于是保安把阿东拦下，要检查一下哪本书没有登记出借。阿东正准备把每一本书在报警器下过一下，以找出引发警报的书，但是保安露出不屑的眼神：你连二分查找都不会吗？

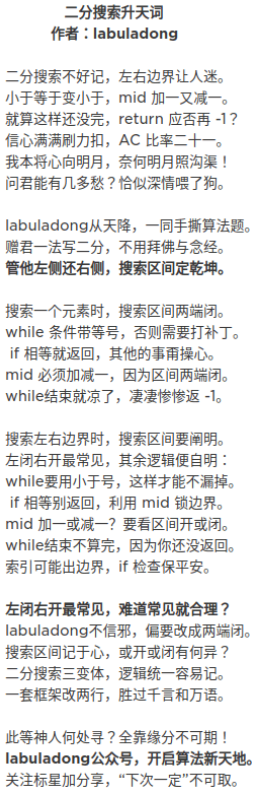
于是保安把书分成两堆，让第一堆过一下报警器，报警器响，这说明引起报警的书包含在里面；于是再把这堆书分成两堆，把第一堆过一下报警器，报警器又响，继续分成两堆……

最终，检测了 logN 次之后，保安成功的找到了那本引起警报的书，露出了得意和嘲讽的笑容。于是阿东背着剩下的书走了。

从此，图书馆丢了 N - 1 本书（手动狗头）。

二分查找并不简单，Knuth 大佬（发明 KMP 算法的那位）都说二分查找：**思路很简单，细节是魔鬼**。很多人喜欢拿整型溢出的 bug 说事儿，但是二分查找真正的坑根本就不是那个细节问题，而是在于到底要给 mid 加一还是减一，while 里到底用 <= 还是 <。

你要是没有正确理解这些细节，写二分肯定就是玄学编程，有没有 bug 只能靠菩萨保佑，谁写谁知道。我特意写了一首诗来歌颂该算法，概括本文的主要内容，建议保存（手动狗头）：



本文就来探究几个最常用的二分查找场景：寻找一个数、寻找左侧边界、寻找右侧边界。而且，我们就是要深入细节，比如不等号是否应该带等号，`mid` 是否应该加一等等。分析这些细节的差异以及出现这些差异的原因，保证你能灵活准确地写出正确的二分查找算法。

另外再声明一下，对于二分搜索的每一个场景，本文还会探讨多种代码写法，目的是为了让你理解出现这些细微差异的本质原因，最起码你看到别人的代码时不会懵逼。实际上这些写法没有优劣之分，你喜欢哪种就用哪种好了。

零、二分查找框架

```
int binarySearch(int[] nums, int target) {
    int left = 0, right = ...;

    while(...) {
        int mid = left + (right - left) / 2;
        if (nums[mid] == target) {
            ...
        } else if (nums[mid] < target) {
            left = ...
        } else if (nums[mid] > target) {
            right = ...
        }
    }
    return ...;
}
```

分析二分查找的一个技巧是：不要出现 else，而是把所有情况用 else if 写清楚，这样可以清楚地展现所有细节。本文都会使用 else if，旨在讲清楚，读者理解后可自行简化。

其中 `...` 标记的部分，就是可能出现细节问题的地方，当你见到一个二分查找的代码时，首先注意这几个地方。后文用实例分析这些地方能有什么样的变化。

另外提前说明一下，计算 `mid` 时需要防止溢出，代码中 `left + (right - left) / 2` 就和 `(left + right) / 2` 的结果相同，但是有效防止了 `left` 和 `right` 太大，直接相加导致溢出的情况。

一、寻找一个数（基本的二分搜索）

这个场景是最简单的，可能也是大家最熟悉的，即搜索一个数，如果存在，返回其索引，否则返回 -1。

```
int binarySearch(int[] nums, int target) {
    int left = 0;
    int right = nums.length - 1; // 注意

    while(left <= right) {
        int mid = left + (right - left) / 2;
        if(nums[mid] == target)
            return mid;
        else if (nums[mid] < target)
            left = mid + 1; // 注意
        else if (nums[mid] > target)
            right = mid - 1; // 注意
    }
    return -1;
}
```

▶ 🍭 代码可视化动画🍭

这段代码可以解决力扣第 704 题「二分查找」，但我们深入探讨一下其中的细节。

1、为什么 while 循环的条件中是 <=，而不是 <?

答：因为初始化 `right` 的赋值是 `nums.length - 1`，即最后一个元素的索引，而不是 `nums.length`。

这二者可能出现在不同功能的二分查找中，区别是：前者相当于两端都闭区间 `[left, right]`，后者相当于左闭右开区间 `[left, right)`。因为索引大小为 `nums.length` 是越界的，所以我们把 `right` 这一边视为开区间。

我们这个算法中使用的是前者 `[left, right]` 两端都闭的区间。**这个区间其实就是每次进行搜索的区间**。

什么时候应该停止搜索呢？当然，找到了目标值的时候可以终止：

```
    if(nums[mid] == target)
        return mid;
```

但如果没找到，就需要 while 循环终止，然后返回 -1。那 while 循环什么时候应该终止？**搜索区间为空的时候应该终止**，意味着你没得找了，就等于没找到嘛。

while(left <= right) 的终止条件是 left == right + 1，写成区间的形式就是 [right + 1, right]，或者带个具体的数字进去 [3, 2]，可见**这时候区间为空**，因为没有数字既大于等于 3 又小于等于 2 的吧。所以这时候 while 循环终止是正确的，直接返回 -1 即可。

while(left < right) 的终止条件是 left == right，写成区间的形式就是 [right, right]，或者带个具体的数字进去 [2, 2]，**这时候区间非空**，还有一个数 2，但此时 while 循环终止了。也就是说区间 [2, 2] 被漏掉了，索引 2 没有被搜索，如果这时候直接返回 -1 就是错误的。

当然，如果你非要用 while(left < right) 也可以，我们已经知道了出错的原因，就打个补丁好了：

```
    //...
    while(left < right) {
        // ...
    }
    return nums[left] == target ? left : -1;
```

2、为什么 left = mid + 1，right = mid - 1？我看有的代码是 right = mid 或者 left = mid，没有这些加加减减，到底怎么回事，怎么判断？

答：这也是二分查找的一个难点，不过只要你能理解前面的内容，就能够很容易判断。

刚才明确了「搜索区间」这个概念，而且本算法的搜索区间是两端都闭的，即 [left, right]。那么当我们发现索引 mid 不是要找的 target 时，下一步应该去搜索哪里呢？

当然是去搜索区间 [left, mid-1] 或者区间 [mid+1, right] 对不对？**因为 mid 已经搜索过，应该从搜索区间中去除。**

3、此算法有什么缺陷？

答：至此，你应该已经掌握了该算法的所有细节，以及这样处理的原因。但是，这个算法存在局限性。

比如说给你有序数组 nums = [1,2,2,2,3]，target 为 2，此算法返回的索引是 2，没错。但是如果我想得到 target 的左侧边界，即索引 1，或者我想得到 target 的右侧边界，即索引 3，这样的话此算法是无法处理的。

这样的需求很常见，**你也许会说，找到一个 target，然后向左或向右线性搜索不行吗？可以，但是不好，因为这样难以保证二分查找对数级的复杂度了。**

我们后续的算法就来讨论这两种二分查找的算法。

二、寻找左侧边界的二分搜索

以下是最常见的代码形式，其中的标记是需要注意的细节：

```
int left_bound(int[] nums, int target) {
    int left = 0;
    int right = nums.length; // 注意

    while (left < right) { // 注意
        int mid = left + (right - left) / 2;
```

```
            if (nums[mid] == target) {
                right = mid;
            } else if (nums[mid] < target) {
                left = mid + 1;
            } else if (nums[mid] > target) {
                right = mid; // 注意
            }
        }
        return left;
    }
```

1、为什么 while 中是 `<` 而不是 `<=`?

答：用相同的方法分析，因为 `right = nums.length` 而不是 `nums.length - 1`。因此每次循环的「搜索区间」是 `[left, right)` 左闭右开。

`while(left < right)` 终止的条件是 `left == right`，此时搜索区间 `[left, left)` 为空，所以可以正确终止。

> 这里先要说一个搜索左右边界和上面这个算法的一个区别，也是很多读者问的：**刚才的 `right` 不是 `nums.length - 1` 吗，为啥这里非要写成 `nums.length` 使得「搜索区间」变成左闭右开呢**?
>
> 因为对于搜索左右侧边界的二分查找，这种写法比较普遍，我就拿这种写法举例了，保证你以后遇到这类代码可以理解。你非要用两端都闭的写法反而更简单，我会在后面写相关的代码，把三种二分搜索都用一种两端都闭的写法统一起来，你耐心往后看就行了。

2、如果 `nums` 中不存在 `target` 这个值，计算出来的这个索引含义是什么？如果我想让它返回 -1，怎么做?

> 这是一个很好且很重要的问题，你把这个地方理解了，在二分搜索的实际应用场景中就不会懵逼。
>
> 直接说结论：**如果 `target` 不存在，搜索左侧边界的二分搜索返回的索引是大于 `target` 的最小索引。**
>
> 举个例子，`nums = [2,3,5,7], target = 4`，`left_bound` 函数返回值是 2，因为元素 5 是大于 4 的最小元素。
>
> 有点绕晕了是吧？这个 `left_bound` 函数明明是搜索左边界的，但是当 `target` 不存在的时候，却返回的是大于 `target` 的最小索引。这个结论不用死记，你要是拿不准，简单举个例子就能得到这个结论了。
>
> 所以跟你说二分搜索这个东西思路很简单，细节是魔鬼嘛，里面的坑太多了。要是真想考你，总有办法可以把你考到怀疑人生。
>
> 不是我故意把代码模板总结的这么复杂，而是二分搜索本身就很复杂，这些细节是不可能绕开的，如果你之前没有了解过这些细节，只能说明你之前学得不扎实。就算不用我总结的模板，你也必须搞清楚当 `target` 不存在时算法的行为，否则出了 bug 你都不知道咋改，真有这么严重。
>
> 话说回来，`left_bound` 的这个行为有一个好处。比方说现在让你写一个 `floor` 函数：

```
// 在一个有序数组中，找到「小于 target 的最大元素的索引」
// 比如说输入 nums = [1,2,2,2,3]，target = 2，函数返回 0，因为 1 是小于 2 的
最大元素。
// 再比如输入 nums = [1,2,3,5,6]，target = 4，函数返回 2，因为 3 是小于 4 的
最大元素。
int floor(int[] nums, int target);
```

那么就可以直接用 left_bound 函数来实现：

```
int floor(int[] nums, int target) {
    // 当 target 不存在，比如输入 [4,6,8,10]，target = 7
    // left_bound 返回 2，减一就是 1，元素 6 就是小于 7 的最大元素
    // 当 target 存在，比如输入 [4,6,8,8,8,10]，target = 8
    // left_bound 返回 2，减一就是 1，元素 6 就是小于 8 的最大元素
    return left_bound(nums, target) - 1;
}
```

最后，我的建议是，如果你必须手写二分代码，那么你一定要了解清楚代码的种种行为，本文总结的框架就是在帮你理清这里面的细节。如果非必要，不要自己手写，尽肯能用编程语言提供的标准库函数，可以节约时间，而且标准库函数的行为在文档里都有明确的说明，不容易出错。

如果想让 target 不存在时返回 -1 其实很简单，在返回的时候额外判断一下 nums[left] 是否等于 target 就行了，如果不等于，就说明 target 不存在。需要注意的是，访问数组索引之前要保证索引不越界：

```
while (left < right) {
    //...
}
// 如果索引越界，说明数组中无目标元素，返回 -1
if (left < 0 || left >= nums.length) {
    return -1;
}
// 提示：其实上面的 if 中 left < 0 这个判断可以省略，因为对于这个算法，left 不可能小
于 0
// 你看这个算法执行的逻辑，left 初始化就是 0，且只可能一直往右走，那么只可能在右侧越界
// 不过我这里就同时判断了，因为在访问数组索引之前保证索引在左右两端都不越界是一个好习惯，
没有坏处
// 另一个好处是让二分的模板更统一，降低你的记忆成本，因为等会儿寻找右边界的时候也有类似的
出界判断


// 判断一下 nums[left] 是不是 target
return nums[left] == target ? left : -1;
```

3、为什么 left = mid + 1，right = mid？和之前的算法不一样？

答：这个很好解释，因为我们的「搜索区间」是 `[left, right)` 左闭右开，所以当 `nums[mid]` 被检测之后，下一步应该去 `mid` 的左侧或者右侧区间搜索，即 `[left, mid)` 或 `[mid + 1, right)`。

4、为什么该算法能够搜索左侧边界？

答：关键在于对于 `nums[mid] == target` 这种情况的处理：

```
    if (nums[mid] == target)
        right = mid;
```

可见，找到 target 时不要立即返回，而是缩小「搜索区间」的上界 `right`，在区间 `[left, mid)` 中继续搜索，即不断向左收缩，达到锁定左侧边界的目的。

5、为什么返回 `left` 而不是 `right`？

答：都是一样的，因为 while 终止的条件是 `left == right`。

6、能不能想办法把 `right` 变成 `nums.length - 1`，也就是继续使用两边都闭的「搜索区间」？这样就可以和第一种二分搜索在某种程度上统一起来了。

答：当然可以，只要你明白了「搜索区间」这个概念，就能有效避免漏掉元素，随便你怎么改都行。下面我们严格根据逻辑来修改：

因为你非要让搜索区间两端都闭，所以 `right` 应该初始化为 `nums.length - 1`，while 的终止条件应该是 `left == right + 1`，也就是其中应该用 `<=`：

```
int left_bound(int[] nums, int target) {
    // 搜索区间为 [left, right]
    int left = 0, right = nums.length - 1;
    while (left <= right) {
        int mid = left + (right - left) / 2;
        // if else ...
    }
```

因为搜索区间是两端都闭的，且现在是搜索左侧边界，所以 `left` 和 `right` 的更新逻辑如下：

```
if (nums[mid] < target) {
    // 搜索区间变为 [mid+1, right]
    left = mid + 1;
} else if (nums[mid] > target) {
    // 搜索区间变为 [left, mid-1]
    right = mid - 1;
} else if (nums[mid] == target) {
    // 收缩右侧边界
    right = mid - 1;
}
```

和刚才相同，如果想在找不到 target 的时候返回 -1，那么检查一下 nums[left] 和 target 是否相等即可：

```
// 此时 target 比所有数都大，返回 -1
if (left == nums.length) return -1;
// 判断一下 nums[left] 是不是 target
return nums[left] == target ? left : -1;
```

至此，整个算法就写完了，完整代码如下：

```
int left_bound(int[] nums, int target) {
    int left = 0, right = nums.length - 1;
    // 搜索区间为 [left, right]
    while (left <= right) {
        int mid = left + (right - left) / 2;
        if (nums[mid] < target) {
            // 搜索区间变为 [mid+1, right]
            left = mid + 1;
        } else if (nums[mid] > target) {
            // 搜索区间变为 [left, mid-1]
            right = mid - 1;
        } else if (nums[mid] == target) {
            // 收缩右侧边界
            right = mid - 1;
        }
    }
    // 判断 target 是否存在于 nums 中
    // 如果越界，target 肯定不存在，返回 -1
    if (left < 0 || left >= nums.length) {
        return -1;
    }
    // 判断一下 nums[left] 是不是 target
    return nums[left] == target ? left : -1;
}
```

▶ 🌟 代码可视化动画🌟

这样就和第一种二分搜索算法统一了，都是两端都闭的「搜索区间」，而且最后返回的也是 left 变量的值。只要把住二分搜索的逻辑，两种形式大家看自己喜欢哪种记哪种吧。

三、寻找右侧边界的二分查找

类似寻找左侧边界的算法，这里也会提供两种写法，还是先写常见的左闭右开的写法，只有两处和搜索左侧边界不同：

```
int right_bound(int[] nums, int target) {
    int left = 0, right = nums.length;
```

```
    while (left < right) {
        int mid = left + (right - left) / 2;
        if (nums[mid] == target) {
            left = mid + 1; // 注意
        } else if (nums[mid] < target) {
            left = mid + 1;
        } else if (nums[mid] > target) {
            right = mid;
        }
    }
    return left - 1; // 注意
}
```

1、为什么这个算法能够找到右侧边界？

答：类似地，关键点还是这里：

```
if (nums[mid] == target) {
    left = mid + 1;
```

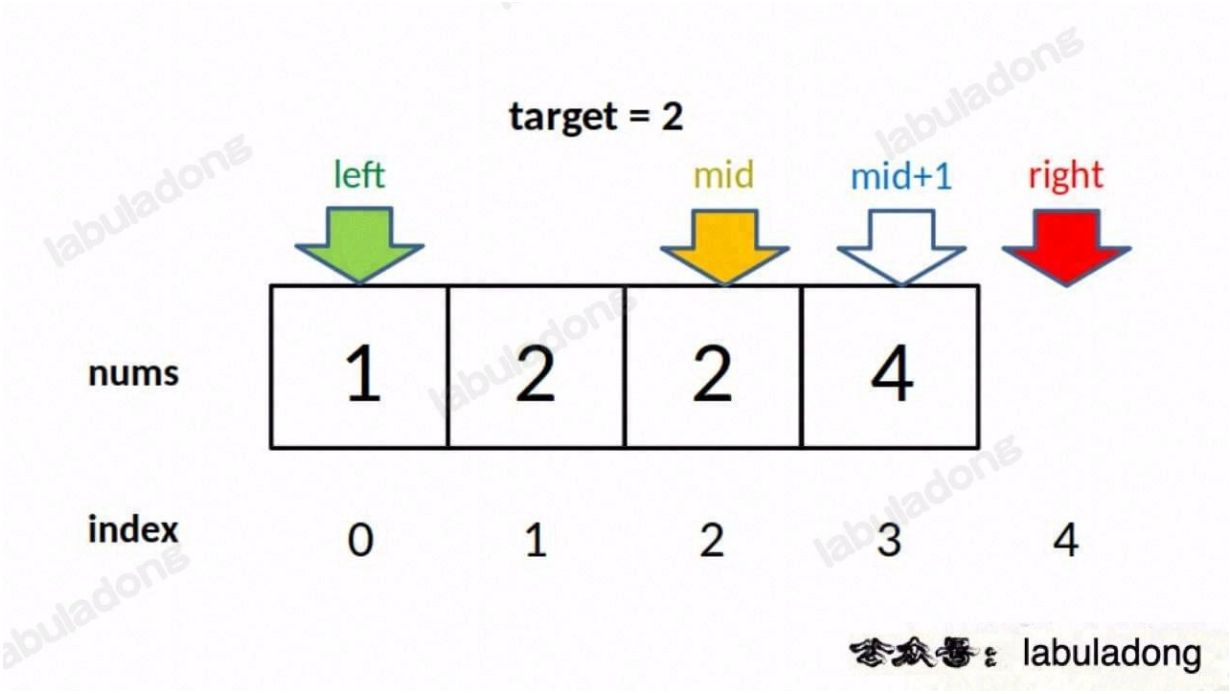
当 `nums[mid] == target` 时，不要立即返回，而是增大「搜索区间」的左边界 `left`，使得区间不断向右靠拢，达到锁定右侧边界的目的。

2、为什么最后返回 `left - 1` 而不像左侧边界的函数，返回 `left`？而且我觉得这里既然是搜索右侧边界，应该返回 `right` 才对。

答：首先，while 循环的终止条件是 `left == right`，所以 `left` 和 `right` 是一样的，你非要体现右侧的特点，返回 `right - 1` 好了。

至于为什么要减一，这是搜索右侧边界的一个特殊点，关键在锁定右边界时的这个条件判断：

```
// 增大 left，锁定右侧边界
if (nums[mid] == target) {
    left = mid + 1;
    // 这样想：mid = left - 1
```



因为我们对 `left` 的更新必须是 `left = mid + 1`，就是说 while 循环结束时，`nums[left]` 一定不等于 `target` 了，而 `nums[left-1]` 可能是 `target`。

至于为什么 `left` 的更新必须是 `left = mid + 1`，当然是为了把 `nums[mid]` 排除出搜索区间，这里就不再赘述。

3、如果 `nums` 中不存在 `target` 这个值，计算出来的这个索引含义是什么？如果我想让它返回 -1，怎么做？

> 直接说结论，和前面讲的 `left_bound` 相反：**如果 `target` 不存在，搜索右侧边界的二分搜索返回的索引是小于 `target` 的最大索引。**
>
> 这个结论不用死记，你要是拿不准，简单举个例子就能得到这个结论了。比如 `nums = [2,3,5,7], target = 4`，`right_bound` 函数返回值是 1，因为元素 3 是小于 4 的最大元素。
>
> 与前面的建议相同，考虑到二分搜索代码细节的复杂性，如果非必要，不要自己手写，尽肯能用编程语言提供的标准库函数。

如果你想在 `target` 不存在时返回 -1，很简单，只要在最后判断一下 `nums[left-1]` 是不是 `target` 就行了，类似之前的左侧边界搜索，做一点额外的判断即可：

```
while (left < right) {
    // ...
}
// 判断 target 是否存在于 nums 中
// left - 1 索引越界的话 target 肯定不存在
if (left - 1 < 0 || left - 1 >= nums.length) {
    return -1;
}
// 判断一下 nums[left - 1] 是不是 target
return nums[left - 1] == target ? (left - 1) : -1;
```

4、是否也可以把这个算法的「搜索区间」也统一成两端都闭的形式呢？这样这三个写法就完全统一了，以后就可以闭着眼睛写出来了。

答：当然可以，类似搜索左侧边界的统一写法，其实只要改两个地方就行了：

```
int right_bound(int[] nums, int target) {
    int left = 0, right = nums.length - 1;
    while (left <= right) {
        int mid = left + (right - left) / 2;
        if (nums[mid] < target) {
            left = mid + 1;
        } else if (nums[mid] > target) {
            right = mid - 1;
        } else if (nums[mid] == target) {
            // 这里改成收缩左侧边界即可
            left = mid + 1;
        }
    }
    // 最后改成返回 left - 1
    if (left - 1 < 0 || left - 1 >= nums.length) {
        return -1;
    }
    return nums[left - 1] == target ? (left - 1) : -1;
}
```

▶ 🍭 代码可视化动画🍭

当然，由于 while 的结束条件为 `right == left - 1`，所以你把上述代码中的 `left - 1` 都改成 `right` 也没有问题，这样可能更有利于看出来这是在「搜索右侧边界」：

```
int right_bound(int[] nums, int target) {
    int left = 0, right = nums.length - 1;
    while (left <= right) {
        int mid = left + (right - left) / 2;
        if (nums[mid] < target) {
            left = mid + 1;
        } else if (nums[mid] > target) {
            right = mid - 1;
        } else if (nums[mid] == target) {
            // 这里改成收缩左侧边界即可
            left = mid + 1;
        }
    }
    // 最后改成返回 right
    if (right < 0 || right >= nums.length) {
        return -1;
    }
```

```
    return nums[right] == target ? right : -1;
}
```

至此，搜索右侧边界的二分查找的两种写法也完成了，其实将「搜索区间」统一成两端都闭反而更容易记忆，你说是吧？

四、逻辑统一

有了搜索左右边界的二分搜索，你可以去解决力扣第 34 题「在排序数组中查找元素的第一个和最后一个位置」。接下来梳理一下这些细节差异的因果逻辑：

第一个，最基本的二分查找算法：

```
因为我们初始化 right = nums.length - 1
所以决定了我们的「搜索区间」是 [left, right]
所以决定了 while (left <= right)
同时也决定了 left = mid+1 和 right = mid-1

因为我们只需找到一个 target 的索引即可
所以当 nums[mid] == target 时可以立即返回
```

第二个，寻找左侧边界的二分查找：

```
因为我们初始化 right = nums.length
所以决定了我们的「搜索区间」是 [left, right)
所以决定了 while (left < right)
同时也决定了 left = mid + 1 和 right = mid

因为我们需找到 target 的最左侧索引
所以当 nums[mid] == target 时不要立即返回
而要收紧右侧边界以锁定左侧边界
```

第三个，寻找右侧边界的二分查找：

```
因为我们初始化 right = nums.length
所以决定了我们的「搜索区间」是 [left, right)
所以决定了 while (left < right)
同时也决定了 left = mid + 1 和 right = mid

因为我们需找到 target 的最右侧索引
所以当 nums[mid] == target 时不要立即返回
而要收紧左侧边界以锁定右侧边界

又因为收紧左侧边界时必须 left = mid + 1
所以最后无论返回 left 还是 right，必须减一
```

对于寻找左右边界的二分搜索，比较常见的手法是使用左闭右开的「搜索区间」，**我们还根据逻辑将「搜索区间」全都统一成了两端都闭，便于记忆，只要修改两处即可变化出三种写法**：

```
int binary_search(int[] nums, int target) {
    int left = 0, right = nums.length - 1;
    while(left <= right) {
        int mid = left + (right - left) / 2;
        if (nums[mid] < target) {
            left = mid + 1;
        } else if (nums[mid] > target) {
            right = mid - 1;
        } else if(nums[mid] == target) {
            // 直接返回
            return mid;
        }
    }
    // 直接返回
    return -1;
}

int left_bound(int[] nums, int target) {
    int left = 0, right = nums.length - 1;
    while (left <= right) {
        int mid = left + (right - left) / 2;
        if (nums[mid] < target) {
            left = mid + 1;
        } else if (nums[mid] > target) {
            right = mid - 1;
        } else if (nums[mid] == target) {
            // 别返回，锁定左侧边界
            right = mid - 1;
        }
    }
    // 判断 target 是否存在于 nums 中
    if (left < 0 || left >= nums.length) {
        return -1;
    }
    // 判断一下 nums[left] 是不是 target
    return nums[left] == target ? left : -1;
}

int right_bound(int[] nums, int target) {
    int left = 0, right = nums.length - 1;
    while (left <= right) {
        int mid = left + (right - left) / 2;
        if (nums[mid] < target) {
            left = mid + 1;
        } else if (nums[mid] > target) {
            right = mid - 1;
        } else if (nums[mid] == target) {
            // 别返回，锁定右侧边界
            left = mid + 1;
```

```
            }
        }

        // 由于 while 的结束条件是 right == left - 1，且现在在求右边界
        // 所以用 right 替代 left - 1 更好记
        if (right < 0 || right >= nums.length) {
            return -1;
        }
        return nums[right] == target ? right : -1;
    }
```

如果以上内容你都能理解，那么恭喜你，二分查找算法的细节不过如此。通过本文，你学会了：

1、分析二分查找代码时，不要出现 else，全部展开成 else if 方便理解。把逻辑写对之后再合并分支，提升运行效率。

2、注意「搜索区间」和 while 的终止条件，如果存在漏掉的元素，记得在最后检查。

3、如需定义左闭右开的「搜索区间」搜索左右边界，只要在 `nums[mid] == target` 时做修改即可，搜索右侧时需要减一。

4、如果将「搜索区间」全都统一成两端都闭，好记，只要稍改 `nums[mid] == target` 条件处的代码和返回的逻辑即可，推荐拿小本本记下，作为二分搜索模板。

最后我想说，以上二分搜索的框架属于「术」的范畴，如果上升到「道」的层面，**二分思维的精髓就是：通过已知信息尽可能多地收缩（折半）搜索空间**，从而增加穷举效率，快速找到目标。

理解本文能保证你写出正确的二分查找的代码，但实际题目中不会直接让你写二分代码，我会在 二分查找的运用 和 二分查找的更多习题 中进一步讲解如何把二分思维运用到更多算法题中。

如果你有高质量的问题，可以 点击这里 进入本文的讨论区。

▶ **引用本文的题目**

安装 我的 Chrome 刷题插件 点开下列题目可直接查看解题思路：

LeetCode	力扣
1201. Ugly Number III	1201. 丑数 III
1235. Maximum Profit in Job Scheduling	1235. 规划兼职工作
162. Find Peak Element	162. 寻找峰值
240. Search a 2D Matrix II	240. 搜索二维矩阵 II
33. Search in Rotated Sorted Array	33. 搜索旋转排序数组
35. Search Insert Position	35. 搜索插入位置
658. Find K Closest Elements	658. 找到 K 个最接近的元素
74. Search a 2D Matrix	74. 搜索二维矩阵

LeetCode	力扣
793. Preimage Size of Factorial Zeroes Function	793. 阶乘函数后 K 个零
81. Search in Rotated Sorted Array II	81. 搜索旋转排序数组 II
852. Peak Index in a Mountain Array	852. 山脉数组的峰顶索引
-	剑指 Offer 04. 二维数组中的查找
-	剑指 Offer 53 - I. 在排序数组中查找数字 I
-	剑指 Offer 53 - II. 0～n-1中缺失的数字
-	剑指 Offer II 068. 查找插入位置
-	剑指 Offer II 069. 山峰数组的顶部

▶ 引用本文的文章

- base case 和备忘录的初始值怎么定?
- 【强化练习】二分搜索算法经典习题
- 【强化练习】二分搜索算法经典习题
- 一文秒杀所有丑数系列问题
- 二分查找高效判定子序列
- 动态规划设计：最长递增子序列
- 双指针技巧秒杀七道数组题目
- 实际二分搜索时的思维框架
- 带权重的随机选择算法
- 快速排序详解及应用
- 我写了首诗，把滑动窗口算法变成了默写题
- 我的刷题心得：算法的本质
- 本站简介
- 浅谈存储系统：LSM 树设计原理
- 用算法打败算法
- 讲两道常考的阶乘算法题

————————————————

更多精品课程可查看 我的网站；扫码查看更多配套学习套件：

算法学习网站：https://labuladong.gitee.io/algo/ 或 https://labuladong.github.io/algo/

二维码太多，长按识别不到？放大图片 -> 让对应二维码充满屏幕 -> 长按识别该二维码

二分搜索题型套路分析

Stars 123k 精品课程 查看 知乎 @labuladong B站 @labuladong

学算法认准 labuladong，致力于把算法讲清楚！网页版 点这里。

读完本文，你不仅学会了算法套路，还可以顺便解决如下题目：

LeetCode	力扣	难度
1011. Capacity To Ship Packages Within D Days	1011. 在 D 天内送达包裹的能力	🟠
410. Split Array Largest Sum	410. 分割数组的最大值	🔴
875. Koko Eating Bananas	875. 爱吃香蕉的珂珂	🟠
-	剑指 Offer II 073. 狒狒吃香蕉	🟠

我们前文 我写了首诗，把二分搜索变成了默写题 详细介绍了二分搜索的细节问题，探讨了「搜索一个元素」，「搜索左侧边界」，「搜索右侧边界」这三个情况，教你如何写出正确无 bug 的二分搜索算法。

但是前文总结的二分搜索代码框架仅仅局限于「在有序数组中搜索指定元素」这个基本场景，具体的算法问题没有这么直接，可能你都很难看出这个问题能够用到二分搜索。

所以本文就来总结一套二分搜索算法运用的框架套路，帮你在遇到二分搜索算法相关的实际问题时，能够有条理地思考分析，步步为营，写出答案。

原始的二分搜索代码

二分搜索的原型就是在「**有序数组**」中搜索一个元素 `target`，返回该元素对应的索引。

如果该元素不存在，那可以返回一个什么特殊值，这种细节问题只要微调算法实现就可实现。

还有一个重要的问题，如果「**有序数组**」中存在多个 `target` 元素，那么这些元素肯定挨在一起，这里就涉及到算法应该返回最左侧的那个 `target` 元素的索引还是最右侧的那个 `target` 元素的索引，也就是所谓的「搜索左侧边界」和「搜索右侧边界」，这个也可以通过微调算法的代码来实现。

我们前文 我写了首诗，把二分搜索变成了默写题 详细探讨了上述问题，对这块还不清楚的读者建议复习前文，已经搞清楚基本二分搜索算法的读者可以继续看下去。

在具体的算法问题中，常用到的是「搜索左侧边界」和「搜索右侧边界」这两种场景，很少有让你单独「搜索一个元素」。

因为算法题一般都让你求最值，比如让你求吃香蕉的「最小速度」，让你求轮船的「最低运载能力」，求最值的过程，必然是搜索一个边界的过程，所以后面我们就详细分析一下这两种搜索边界的二分算法代码。

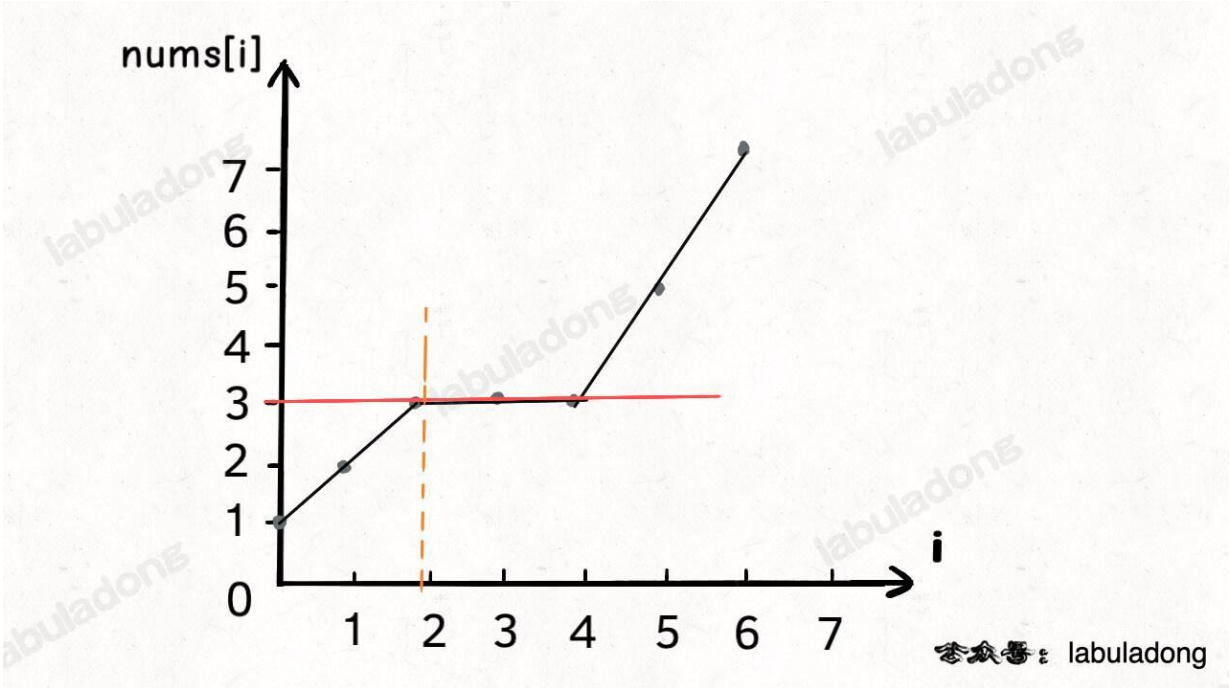
> 注意，本文我写的都是左闭右开的二分搜索写法，如果你习惯两端都闭的写法，可以自行改写代码。

「搜索左侧边界」的二分搜索算法的具体代码实现如下：

```
// 搜索左侧边界
int left_bound(int[] nums, int target) {
    if (nums.length == 0) return -1;
    int left = 0, right = nums.length;

    while (left < right) {
        int mid = left + (right - left) / 2;
        if (nums[mid] == target) {
            // 当找到 target 时，收缩右侧边界
            right = mid;
        } else if (nums[mid] < target) {
            left = mid + 1;
        } else if (nums[mid] > target) {
            right = mid;
        }
    }
    return left;
}
```

假设输入的数组 `nums = [1,2,3,3,3,5,7]`，想搜索的元素 `target = 3`，那么算法就会返回索引 2。

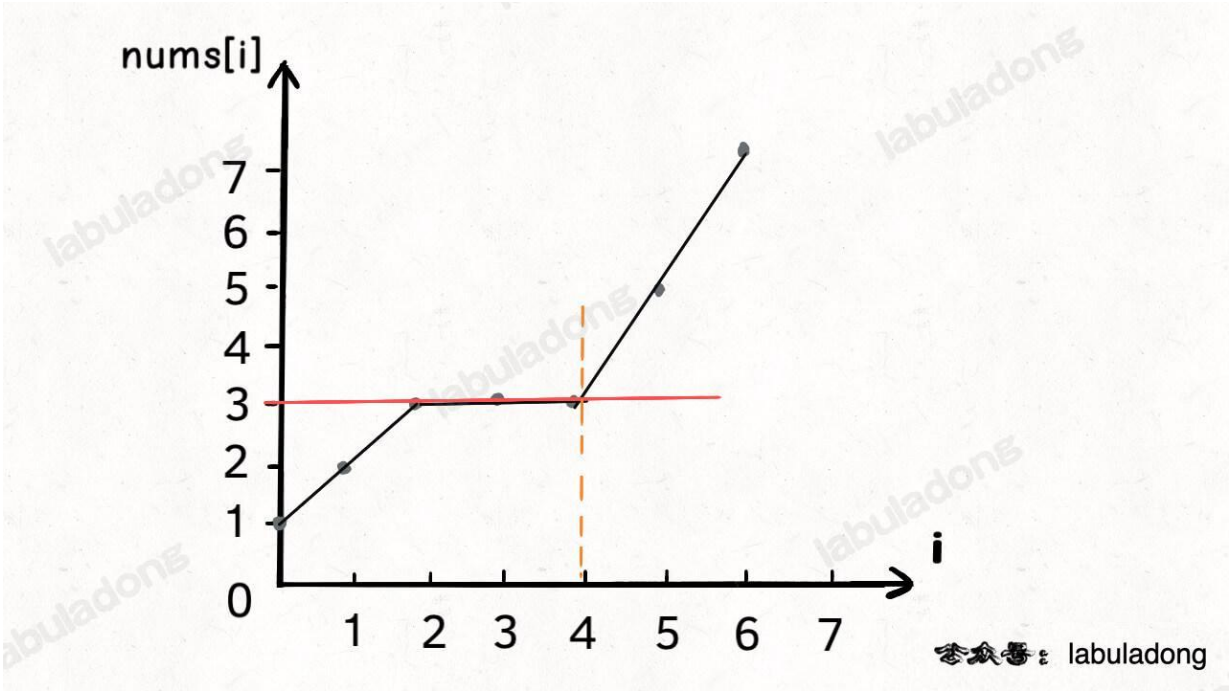
如果画一个图，就是这样：



「搜索右侧边界」的二分搜索算法的具体代码实现如下：

```
// 搜索右侧边界
int right_bound(int[] nums, int target) {
    if (nums.length == 0) return -1;
    int left = 0, right = nums.length;

    while (left < right) {
        int mid = left + (right - left) / 2;
        if (nums[mid] == target) {
            // 当找到 target 时，收缩左侧边界
            left = mid + 1;
        } else if (nums[mid] < target) {
            left = mid + 1;
        } else if (nums[mid] > target) {
            right = mid;
        }
    }
    return left - 1;
}
```

输入同上，那么算法就会返回索引 4，如果画一个图，就是这样：



好，上述内容都属于复习，我想读到这里的读者应该都能理解。记住上述的图像，所有能够抽象出上述图像的问题，都可以使用二分搜索解决。

如果你有高质量的问题，可以 点击这里 进入本文的讨论区。

▶ **引用本文的题目**

安装 我的 Chrome 刷题插件 点开下列题目可直接查看解题思路：

LeetCode	力扣
1201. Ugly Number III	1201. 丑数 III
-	剑指 Offer II 073. 狒狒吃香蕉

▶ **引用本文的文章**

- 一文秒杀所有丑数系列问题
- 我写了首诗，把二分搜索算法变成了默写题
- 我的刷题心得：算法的本质
- 用算法打败算法
- 经典动态规划：高楼扔鸡蛋
- 讲两道常考的阶乘算法题

————————————————————

本文为网站会员内容，请 点这里 查看。

【强化练习】二分搜索算法经典习题

二分搜索的精髓在于快速收缩搜索区间。本文带大家看一看二分搜索算法在数组中的经典运用场景。

> 前文 二分搜索框架详解 讲的二分搜索都是在一维数组中的，在二维矩阵中如何施展二分搜索呢？

▶ **引用本文的文章**

- 我写了首诗，把二分搜索算法变成了默写题

——————————————

本文为网站会员内容，请 点这里 查看。

田忌赛马背后的算法决策

Stars 123k 精品课程 查看 知乎 @labuladong B站 @labuladong

学算法认准 labuladong，致力于把算法讲清楚！网页版 点这里。

读完本文，你不仅学会了算法套路，还可以顺便解决如下题目：

LeetCode	力扣	难度
870. Advantage Shuffle	870. 优势洗牌	🟠

田忌赛马的故事大家应该都听说过：

田忌和齐王赛马，两人的马分上中下三等，如果同等级的马对应着比赛，田忌赢不了齐王。但是田忌遇到了孙膑，孙膑就教他用自己的下等马对齐王的上等马，再用自己的上等马对齐王的中等马，最后用自己的中等马对齐王的下等马，结果三局两胜，田忌赢了。

当然，这段历史也挺有意思的，那个讽齐王纳谏，自恋的不行的邹忌和田忌是同一时期的人，他俩后来就杠上了。不过这是题外话，我们这里就打住。

以前学到田忌赛马课文的时，我就在想，如果不是三匹马比赛，而是一百匹马比赛，孙膑还能不能合理地安排比赛的顺序，赢得齐王呢？

当时没想出什么好的点子，只觉得这里面最核心问题是要尽可能让自己占便宜，让对方吃亏。总结来说就是，**打得过就打，打不过就拿自己的垃圾和对方的精锐互换**。

不过，我一直没具体把这个思路实现出来，直到最近刷到力扣第 870 题「优势洗牌」，一眼就发现这是田忌赛马问题的加强版：

给你输入两个**长度相等**的数组 `nums1` 和 `nums2`，请你重新组织 `nums1` 中元素的位置，使得 `nums1` 的「优势」最大化。

如果 `nums1[i] > nums2[i]`，就是说 `nums1` 在索引 `i` 上对 `nums2[i]` 有「优势」。优势最大化也就是说让你重新组织 `nums1`，**尽可能多的让 `nums1[i] > nums2[i]`**。

算法签名如下：

```
int[] advantageCount(int[] nums1, int[] nums2);
```

比如输入：

```
nums1 = [12,24,8,32]
nums2 = [13,25,32,11]
```

你的算法应该返回 `[24,32,8,12]`，因为这样排列 `nums1` 的话有三个元素都有「优势」。

这就像田忌赛马的情景，`nums1` 就是田忌的马，`nums2` 就是齐王的马，数组中的元素就是马的战斗力，你就是孙膑，展示你真正的技术吧。

仔细想想，这个题的解法还是有点扑朔迷离的。什么时候应该放弃抵抗去送人头，什么时候应该硬刚？这里面应该有一种算法策略来最大化「优势」。

送人头一定是迫不得已而为之的权宜之计，否则隔壁田忌就会以为你是齐王买来的演员。只有田忌的上等马比不过齐王的上等马时，才会用下等马去和齐王的上等马互换。

对于比较复杂的问题，可以尝试从特殊情况考虑。

你想，谁应该去应对齐王最快的马？肯定是田忌最快的那匹马，我们简称一号选手。

如果田忌的一号选手比不过齐王的一号选手，那其他马肯定是白给了，显然这种情况应该用田忌垫底的马去送人头，降低己方损失，保存实力，增加接下来比赛的胜率。

但如果田忌的一号选手能比得过齐王的一号选手，那就和齐王硬刚好了，反正这把田忌可以赢。

你也许说，这种情况下说不定田忌的二号选手也能干得过齐王的一号选手？如果可以的话，让二号选手去对决齐王的一号选手，不是更节约？

就好比，如果考 60 分就能过的话，何必考 90 分？每多考一分就亏一分，刚刚好卡在 60 分是最划算的。

这种节约的策略是没问题的，但是没有必要。这也是本题有趣的地方，需要绕个脑筋急转弯：

我们暂且把田忌的一号选手称为 `T1`，二号选手称为 `T2`，齐王的一号选手称为 `Q1`。

如果 `T2` 能赢 `Q1`，你试图保存己方实力，让 `T2` 去战 `Q1`，把 `T1` 留着是为了对付谁？

显然，你担心齐王还有战力大于 `T2` 的马，可以让 `T1` 去对付。

但是你仔细想想，现在 `T2` 已经是可以战胜 `Q1` 的，`Q1` 可是齐王的最快的马耶，齐王剩下的那些马里，怎么可能还有比 `T2` 更强的马？

所以，没必要节约，最后我们得出的策略就是：

将齐王和田忌的马按照战斗力排序，然后按照排名一一对比。如果田忌的马能赢，那就比赛，如果赢不了，那就换个垫底的来送人头，保存实力。

上述思路的代码逻辑如下：

```
int n = nums1.length;

sort(nums1); // 田忌的马
sort(nums2); // 齐王的马
```

```
// 从最快的马开始比
for (int i = n - 1; i >= 0; i--) {
    if (nums1[i] > nums2[i]) {
        // 比得过，跟他比
    } else {
        // 比不过，换个垫底的来送人头
    }
}
```

根据这个思路，我们需要对两个数组排序，但是 nums2 中元素的顺序不能改变，因为计算结果的顺序依赖 nums2 的顺序，所以不能直接对 nums2 进行排序，而是利用其他数据结构来辅助。

同时，最终的解法还用到前文 双指针技巧汇总 总结的双指针算法模板，用以处理「送人头」的情况：

```
int[] advantageCount(int[] nums1, int[] nums2) {
    int n = nums1.length;
    // 给 nums2 降序排序
    PriorityQueue<int[]> maxpq = new PriorityQueue<>(
        (int[] pair1, int[] pair2) -> {
            return pair2[1] - pair1[1];
        }
    );
    for (int i = 0; i < n; i++) {
        maxpq.offer(new int[]{i, nums2[i]});
    }
    // 给 nums1 升序排序
    Arrays.sort(nums1);

    // nums1[left] 是最小值，nums1[right] 是最大值
    int left = 0, right = n - 1;
    int[] res = new int[n];

    while (!maxpq.isEmpty()) {
        int[] pair = maxpq.poll();
        // maxval 是 nums2 中的最大值，i 是对应索引
        int i = pair[0], maxval = pair[1];
        if (maxval < nums1[right]) {
            // 如果 nums1[right] 能胜过 maxval，那就自己上
            res[i] = nums1[right];
            right--;
        } else {
            // 否则用最小值混一下，养精蓄锐
            res[i] = nums1[left];
            left++;
        }
    }
    return res;
}
```

算法的时间复杂度很好分析，也就是二叉堆和排序的复杂度 O(nlogn)。

至此，这道田忌赛马的题就解决了，其代码实现上用到了双指针技巧，从最快的马开始，比得过就比，比不过就送，这样就能对任意数量的马求取一个最优的比赛策略了。

如果你有高质量的问题，可以 点击这里 进入本文的讨论区。

更多精品课程可查看 我的网站；扫码查看更多配套学习套件：

链表操作的递归思维一览

Stars 123k 精品课程 查看 知乎 @labuladong B站 @labuladong

学算法认准 labuladong，致力于把算法讲清楚！网页版 点这里。

读完本文，你不仅学会了算法套路，还可以顺便解决如下题目：

LeetCode	力扣	难度
206. Reverse Linked List	206. 反转链表	🟢
92. Reverse Linked List II	92. 反转链表 II	🟠
-	剑指 Offer 24. 反转链表	🟢
-	剑指 Offer II 024. 反转链表	🟢

反转单链表的迭代实现不是一个困难的事情，但是递归实现就有点难度了，如果再加一点难度，让你仅仅反转单链表中的一部分，你是否能**够递归实现**呢？

> 迭代反转单链表的实现参见 如何 k 个一组反转链表。

本文就来由浅入深，step by step 地解决这个问题。如果你还不会递归地反转单链表也没关系，**本文会从递归反转整个单链表开始拓展**，只要你明白单链表的结构，相信你能够有所收获。

```
// 单链表节点的结构
public class ListNode {
    int val;
    ListNode next;
    ListNode(int x) { val = x; }
}
```

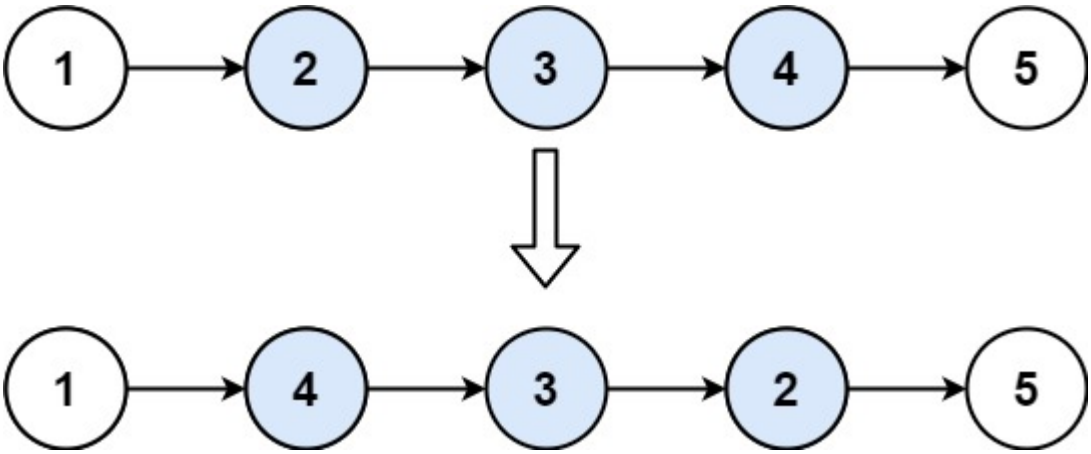
什么叫反转单链表的一部分呢，就是给你一个索引区间，让你把单链表中这部分元素反转，其他部分不变。

看下力扣第 92 题「反转链表 II」：

▼ 92. 反转链表 II Leetcode | 力扣

给你单链表的头指针 `head` 和两个整数 `left` 和 `right` ，其中 `left <= right< code>` 。请你反转从位置 `left` 到位置 `right` 的链表节点，返回 **反转后的链表** 。

示例 1：




```
输入：head = [1,2,3,4,5], left = 2, right = 4
输出：[1,4,3,2,5]
```

示例 2：

```
输入：head = [5], left = 1, right = 1
输出：[5]
```

提示：

- 链表中节点数目为 n
- 1 <= n <="500</code">
- -500 <= node.val <="500</code">
- 1 <= left <="right">

进阶： 你可以使用一趟扫描完成反转吗？

注意这里的索引是从 1 开始的。迭代的思路大概是：先用一个 for 循环找到第 m 个位置，然后再用一个 for 循环将 m 和 n 之间的元素反转。但是我们的递归解法不用一个 for 循环，纯递归实现反转。

迭代实现思路看起来虽然简单，但是细节问题很多的，反而不容易写对。相反，递归实现就很简洁优美，下面就由浅入深，先从反转整个单链表说起。

一、递归反转整个链表

这也是力扣第 206 题「反转链表」，递归反转单链表的算法可能很多读者都听说过，这里详细介绍一下，直接看代码实现：

```
// 定义：输入一个单链表头结点，将该链表反转，返回新的头结点
ListNode reverse(ListNode head) {
    if (head == null || head.next == null) {
        return head;
    }
```

```
    ListNode last = reverse(head.next);
    head.next.next = head;
    head.next = null;
    return last;
}
```

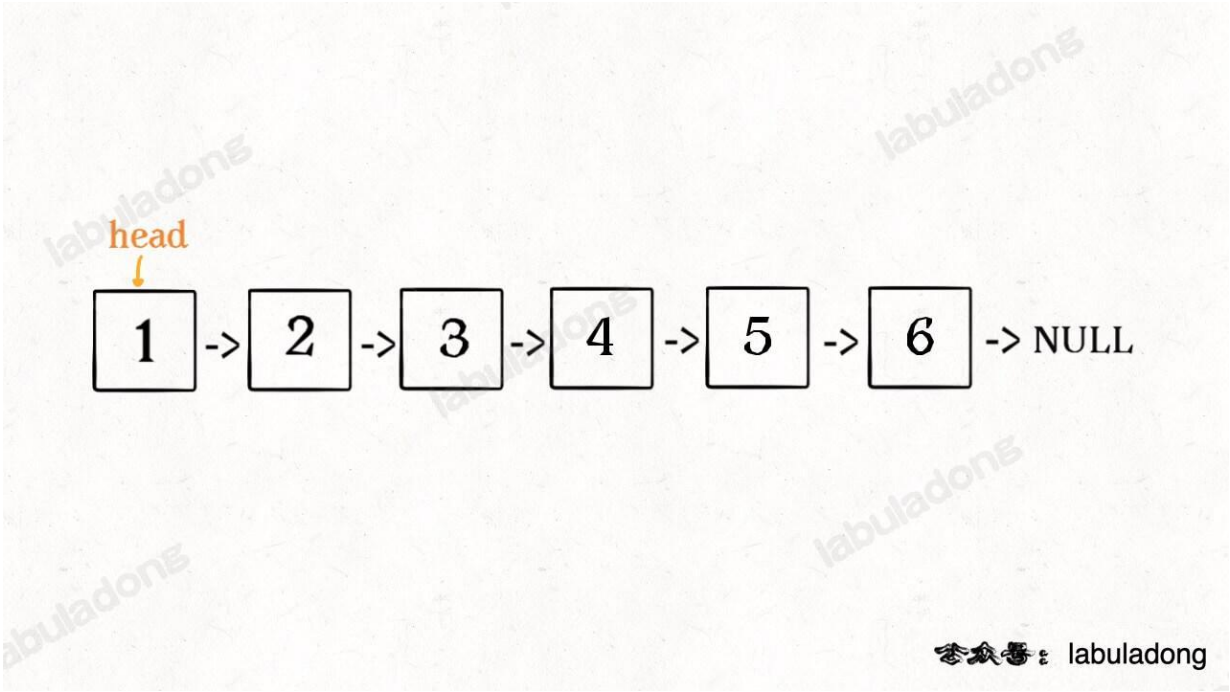
▶ 👾 代码可视化动画👾

看起来是不是感觉不知所云，完全不能理解这样为什么能够反转链表？这就对了，这个算法常常拿来显示递归的巧妙和优美，我们下面来详细解释一下这段代码。

对于递归算法，最重要的就是明确递归函数的定义。具体来说，我们的 `reverse` 函数定义是这样的：

输入一个节点 `head`，将「以 `head` 为起点」的链表反转，并返回反转之后的头结点。

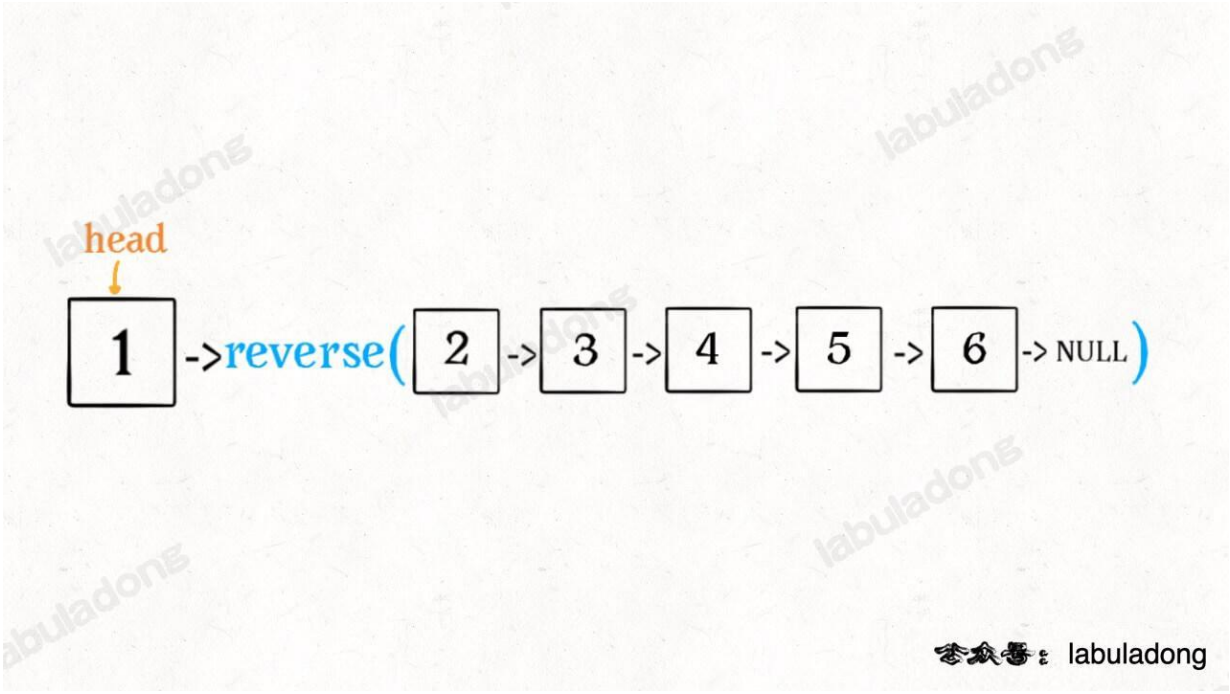
明白了函数的定义，再来看这个问题。比如说我们想反转这个链表：



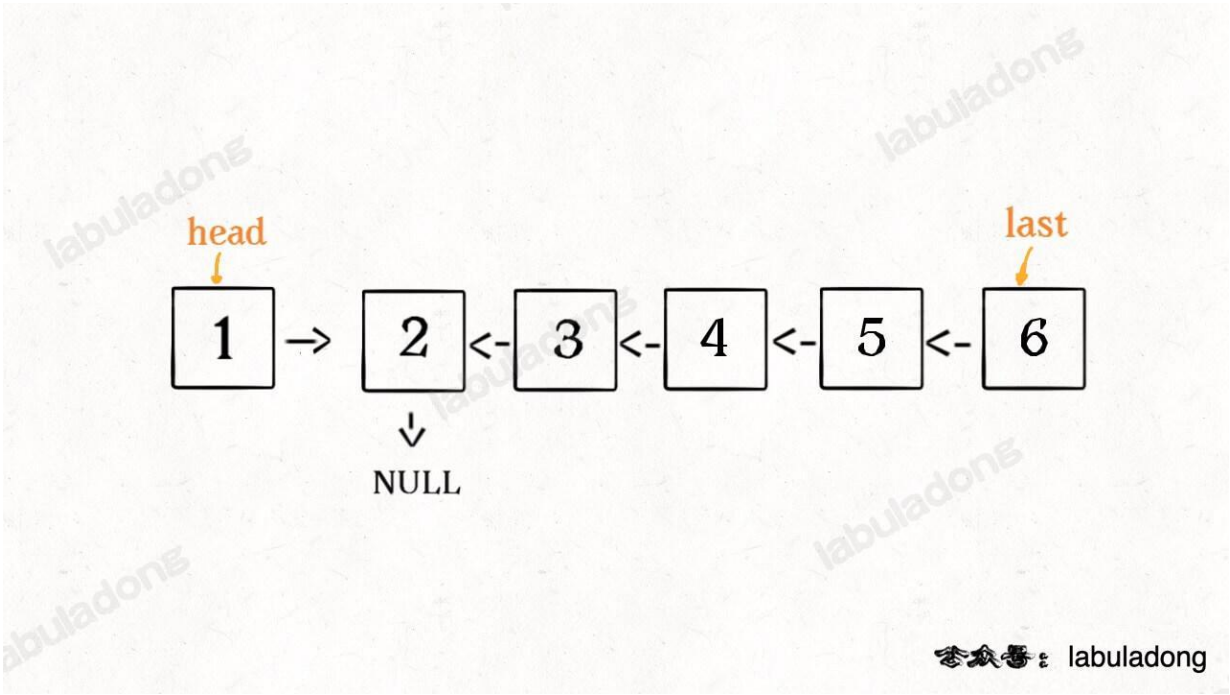
那么输入 `reverse(head)` 后，会在这里进行递归：

```
ListNode last = reverse(head.next);
```

不要跳进递归（你的脑袋能压几个栈呀？），而是要根据刚才的函数定义，来弄清楚这段代码会产生什么结果：



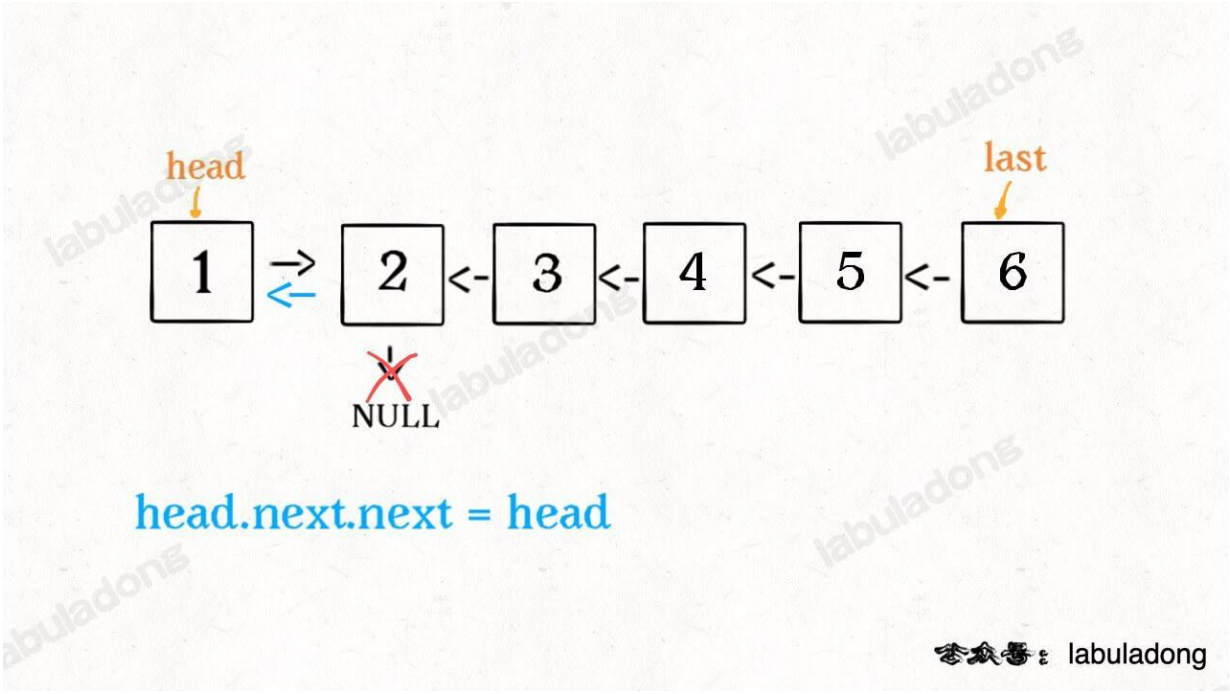
这个 `reverse(head.next)` 执行完成后，整个链表就成了这样：



并且根据函数定义，`reverse` 函数会返回反转之后的头结点，我们用变量 `last` 接收了。

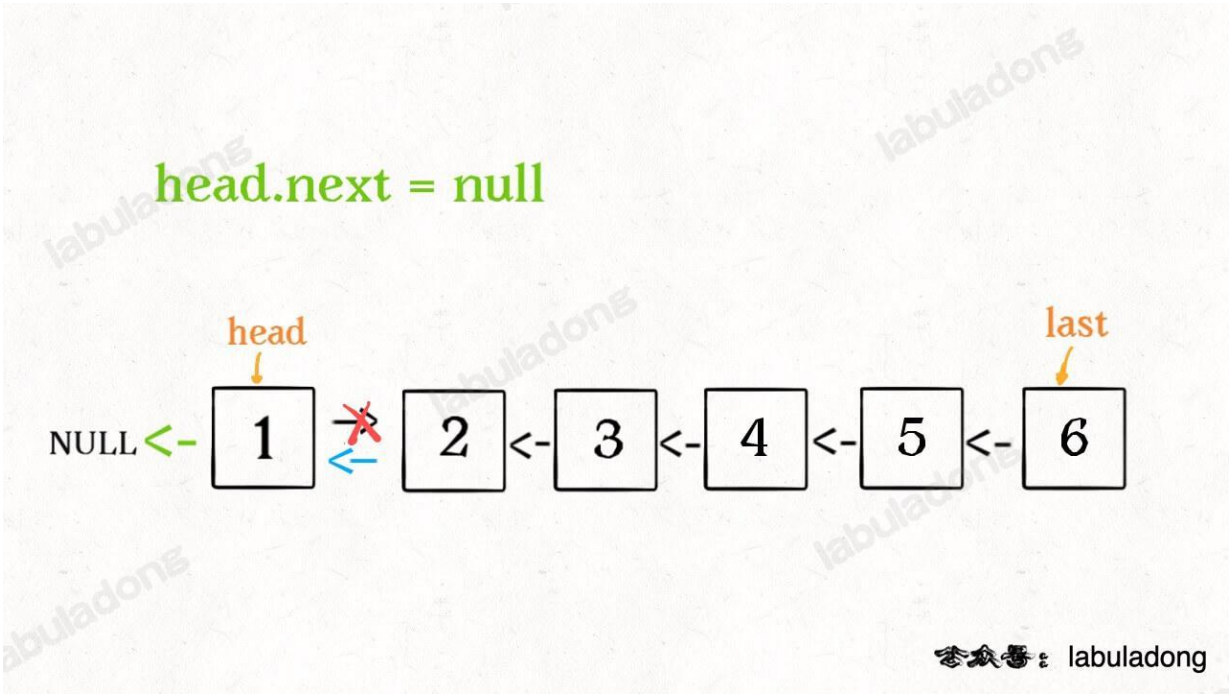
现在再来看下面的代码：

```
head.next.next = head;
```



接下来：

```
head.next = null;
return last;
```



神不神奇，这样整个链表就反转过来了！递归代码就是这么简洁优雅，不过其中有两个地方需要注意：

1、递归函数要有 base case，也就是这句：

```
if (head == null || head.next == null) {
    return head;
}
```

意思是如果链表为空或者只有一个节点的时候，反转结果就是它自己，直接返回即可。

2、当链表递归反转之后，新的头结点是 last，而之前的 head 变成了最后一个节点，别忘了链表的末尾要指向 null：

```
head.next = null;
```

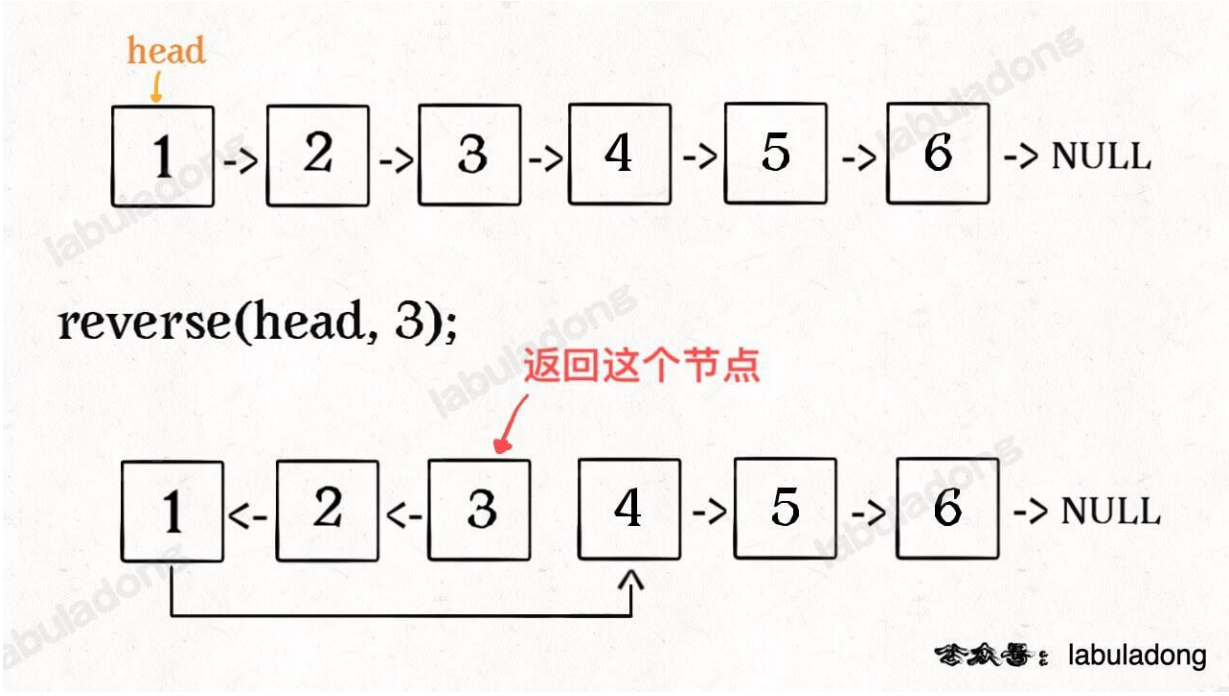
理解了这两点后，我们就可以进一步深入了，接下来的问题其实都是在这个算法上的扩展。

二、反转链表前 N 个节点

这次我们实现一个这样的函数：

```
// 将链表的前 n 个节点反转（n <= 链表长度）
ListNode reverseN(ListNode head, int n)
```

比如说对于下图链表，执行 reverseN(head, 3)：



解决思路和反转整个链表差不多，只要稍加修改即可：

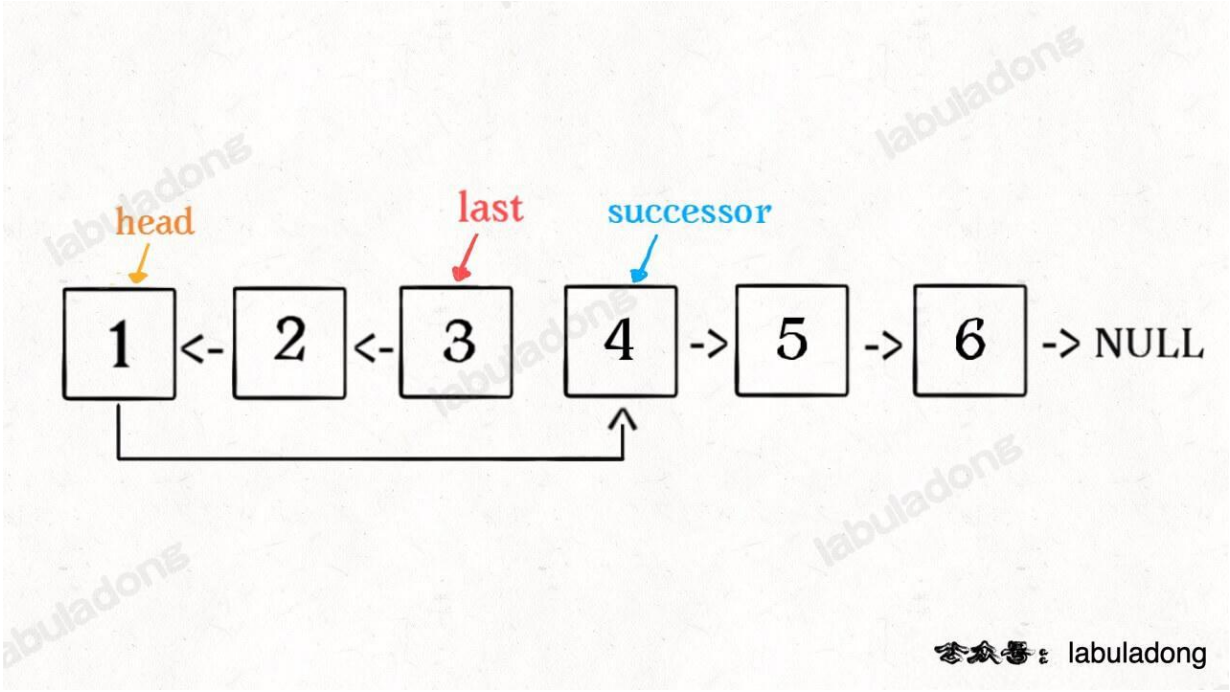
```
ListNode successor = null; // 后驱节点

// 反转以 head 为起点的 n 个节点，返回新的头结点
ListNode reverseN(ListNode head, int n) {
    if (n == 1) {
        // 记录第 n + 1 个节点
        successor = head.next;
        return head;
```

```
        }
        // 以 head.next 为起点，需要反转前 n - 1 个节点
        ListNode last = reverseN(head.next, n - 1);

        head.next.next = head;
        // 让反转之后的 head 节点和后面的节点连起来
        head.next = successor;
        return last;
    }
```

具体的区别：

1、base case 变为 `n == 1`，反转一个元素，就是它本身，同时**要记录后驱节点**。

2、刚才我们直接把 `head.next` 设置为 null，因为整个链表反转后原来的 `head` 变成了整个链表的最后一个节点。但现在 `head` 节点在递归反转之后不一定是最后一个节点了，所以要记录后驱 `successor`（第 `n + 1` 个节点），反转之后将 `head` 连接上。



OK，如果这个函数你也能看懂，就离实现「反转一部分链表」不远了。

三、反转链表的一部分

现在解决我们最开始提出的问题，给一个索引区间 `[m, n]`（索引从 1 开始），仅仅反转区间中的链表元素。

```
ListNode reverseBetween(ListNode head, int m, int n)
```

首先，如果 `m == 1`，就相当于反转链表开头的 `n` 个元素嘛，也就是我们刚才实现的功能：

```
ListNode reverseBetween(ListNode head, int m, int n) {
    // base case
    if (m == 1) {
        // 相当于反转前 n 个元素
        return reverseN(head, n);
    }
    // ...
}
```

如果 `m != 1` 怎么办？如果我们把 `head` 的索引视为 1，那么我们是想从第 `m` 个元素开始反转对吧；如果把 `head.next` 的索引视为 1 呢？那么相对于 `head.next`，反转的区间应该是从第 `m - 1` 个元素开始的；那么对于 `head.next.next` 呢……

区别于迭代思想，这就是递归思想，所以我们可以完成代码：

```
ListNode reverseBetween(ListNode head, int m, int n) {
    // base case
    if (m == 1) {
        return reverseN(head, n);
    }
    // 前进到反转的起点触发 base case
    head.next = reverseBetween(head.next, m - 1, n - 1);
    return head;
}
```

▶ 🍭 代码可视化动画🍭

至此，我们的最终大 BOSS 就被解决了。

四、最后总结

递归的思想相对迭代思想，稍微有点难以理解，处理的技巧是：不要跳进递归，而是利用明确的定义来实现算法逻辑。

处理看起来比较困难的问题，可以尝试化整为零，把一些简单的解法进行修改，解决困难的问题。

值得一提的是，递归操作链表并不高效。和迭代解法相比，虽然时间复杂度都是 O(N)，但是迭代解法的空间复杂度是 O(1)，而递归解法需要堆栈，空间复杂度是 O(N)。所以递归操作链表可以作为对递归算法的练习或者拿去和小伙伴装逼，但是考虑效率的话还是使用迭代算法更好。

最后，我在数据结构精品课中讲解了 单链表的递归实现，应该能够让你进一步加深对递归的理解。

如果你有高质量的问题，可以 点击这里 进入本文的讨论区。

▶ 引用本文的题目

安装 我的 Chrome 刷题插件 点开下列题目可直接查看解题思路：

LeetCode	力扣
2. Add Two Numbers	2. 两数相加
445. Add Two Numbers II	445. 两数相加 II
-	剑指 Offer 24. 反转链表
-	剑指 Offer II 024. 反转链表
-	剑指 Offer II 025. 链表中的两数相加

▶ 引用本文的文章

- 如何 K 个一组反转链表
- 如何判断回文链表
- 烧饼排序算法

———————————————

更多精品课程可查看 我的网站；扫码查看更多配套学习套件：

1.3 队列/栈

常言道：队列和栈是操作受限的数据结构。

为什么这样说呢？因为队列和栈底层就是数组和链表封装的。

数组和链表本身的操作可以花里胡哨，但队列和栈只给你暴露头尾操作的 API，这可不就是操作受限的数据结构么。

就算法题的角度来看，队列和栈的题目并不是很多，队列主要用在 BFS 算法，栈主要用在括号相关的问题。

公众号标签：队列和栈

名称	最新版本号	详情
PDF 教材	V5.2	下载
刷题打卡挑战	开放报名	报名
网站会员	V已上线	购买
Chrome 刷题插件	V4.4.3	使用手册
vscode 刷题插件	V1.5.4	使用手册
JetBrains IDE 刷题插件	V1.8.6	使用手册

一文秒杀三道括号题目

Stars 123k 精品课程 查看 知乎 @labuladong B站 @labuladong

学算法认准 labuladong，致力于把算法讲清楚！网页版 点这里。

读完本文，你不仅学会了算法套路，还可以顺便解决如下题目：

LeetCode	力扣	难度
1541. Minimum Insertions to Balance a Parentheses String	1541. 平衡括号字符串的最少插入次数	🟠
20. Valid Parentheses	20. 有效的括号	🟢
921. Minimum Add to Make Parentheses Valid	921. 使括号有效的最少添加	🟠

判断有效括号串

对括号的有效性判断多次在笔试中出现，现实中也很常见，比如说我们写的代码，编辑器会检查括号是否正确闭合。而且我们的代码可能会包含三种括号 `[]()\{\}`，判断起来有一点难度。

来看一看力扣第 20 题「有效的括号」，输入一个字符串，其中包含 `[]()\{\}` 六种括号，请你判断这个字符串组成的括号是否有效。

举几个例子：

```
Input: "()[]{}"
Output: true

Input: "([)]"
Output: false

Input: "{[]}"
Output: true
```

解决这个问题之前，我们先降低难度，思考一下，**如果只有一种括号 `()`**，应该如何判断字符串组成的括号是否有效呢？

假设字符串中只有圆括号，如果想让括号字符串有效，那么必须做到：

每个右括号 `)` 的左边必须有一个左括号 `(` 和它匹配。

比如说字符串 `())(((` 中，中间的两个右括号**左边**就没有左括号匹配，所以这个括号组合是无效的。

那么根据这个思路，我们可以写出算法：

```
bool isValid(string str) {
    // 待匹配的左括号数量
    int left = 0;
    for (int i = 0; i < str.size(); i++) {
        if (s[i] == '(') {
            left++;
        } else {
            // 遇到右括号
            left--;
        }

        // 右括号太多
        if (left == -1)
            return false;
    }
    // 是否所有的左括号都被匹配了
    return left == 0;
}
```

如果只有圆括号，这样就能正确判断有效性。对于三种括号的情况，我一开始想模仿这个思路，定义三个变量 `left1`，`left2`，`left3` 分别处理每种括号，虽然要多写不少 if else 分支，但是似乎可以解决问题。

但实际上直接照搬这种思路是不行的，比如说只有一个括号的情况下 `(())` 是有效的，但是多种括号的情况下，`[(])` 显然是无效的。

仅仅记录每种左括号出现的次数已经不能做出正确判断了，我们要加大存储的信息量，可以利用栈来模仿类似的思路。栈是一种先进后出的数据结构，处理括号问题的时候尤其有用。

我们这道题就用一个名为 `left` 的栈代替之前思路中的 `left` 变量，**遇到左括号就入栈，遇到右括号就去栈中寻找最近的左括号，看是否匹配**：

```
bool isValid(string str) {
    stack<char> left;
    for (char c : str) {
        if (c == '(' || c == '{' || c == '[')
            left.push(c);
        else { // 字符 c 是右括号
            if (!left.empty() && leftOf(c) == left.top())
                left.pop();
            else
                // 和最近的左括号不匹配
                return false;
        }
    }
    // 是否所有的左括号都被匹配了
    return left.empty();
```

```
}

char leftOf(char c) {
    if (c == '}') return '{';
    if (c == ')') return '(';
    return '[';
}
```

▶ 🍭 代码可视化动画🍭

接下来讲另外两个常见的问题，如何通过最小的插入次数将括号变成有效的？

平衡括号串（一）

先来个简单的，力扣第 921 题「使括号有效的最少添加」：

给你输入一个字符串 s，你可以在其中的任意位置插入左括号 (或者右括号)，请问你最少需要几次插入才能使得 s 变成一个有效的括号串？

比如说输入 s = "())("，算法应该返回 2，因为我们至少需要插入两次把 s 变成 "(())()"，这样每个左括号都有一个右括号匹配，s 是一个有效的括号串。

这其实和前文的判断括号有效性非常类似，我们直接看代码：

```
int minAddToMakeValid(string s) {
    // res 记录插入次数
    int res = 0;
    // need 变量记录右括号的需求量
    int need = 0;

    for (int i = 0; i < s.size(); i++) {
        if (s[i] == '(') {
            // 对右括号的需求 + 1
            need++;
        }

        if (s[i] == ')') {
            // 对右括号的需求 - 1
            need--;

            if (need == -1) {
                need = 0;
                // 需插入一个左括号
                res++;
            }
        }
    }

    return res + need;
}
```

▶ 🌈 代码可视化动画🌈

这段代码就是最终解法，**核心思路是以左括号为基准，通过维护对右括号的需求数 need，来计算最小的插入次数**。需要注意两个地方：

1、当 need == -1 的时候意味着什么？

因为只有遇到右括号) 的时候才会 need--，need == -1 意味着右括号太多了，所以需要插入左括号。

比如说 s = "))" 这种情况，需要插入 2 个左括号，使得 s 变成 "()()"，才是一个有效括号串。

2、算法为什么返回 res + need？

因为 res 记录的左括号的插入次数，need 记录了右括号的需求，当 for 循环结束后，若 need 不为 0，那么就意味着右括号还不够，需要插入。

比如说 s = "))(" 这种情况，插入 2 个左括号之后，还要再插入 1 个右括号，使得 s 变成 "()()()"，才是一个有效括号串。

以上就是这道题的思路，接下来我们看一道进阶题目，如果左右括号不是 1:1 配对，会出现什么问题呢？

平衡括号串（二）

这是力扣第 1541 题「平衡括号字符串的最少插入次数」：

现在假设 1 个左括号需要匹配 2 个右括号才叫做有效的括号组合，那么给你输入一个括号串 s，请问你如何计算使得 s 有效的最小插入次数呢？

核心思路还是和刚才一样，通过一个 need 变量记录对右括号的需求数，根据 need 的变化来判断是否需要插入。

第一步，我们按照刚才的思路正确维护 need 变量：

```
int minInsertions(string s) {
    // need 记录需右括号的需求量
    int res = 0, need = 0;

    for (int i = 0; i < s.size(); i++) {
        // 一个左括号对应两个右括号
        if (s[i] == '(') {
            need += 2;
        }

        if (s[i] == ')') {
            need--;
        }
    }

    return res + need;
}
```

现在想一想，当 need 为什么值的时候，我们可以确定需要进行插入？

首先，类似第一题，当 need == -1 时，意味着我们遇到一个多余的右括号，显然需要插入一个左括号。

比如说当 s = ")"，我们肯定需要插入一个左括号让 s = "()"，但是由于一个左括号需要两个右括号，所以对右括号的需求量变为 1：

```
if (s[i] == ')') {
    need--;
    // 说明右括号太多了
    if (need == -1) {
        // 需要插入一个左括号
        res++;
        // 同时，对右括号的需求变为 1
        need = 1;
    }
}
```

另外，当遇到左括号时，若对右括号的需求量为奇数，需要插入 1 个右括号。因为一个左括号需要两个右括号嘛，右括号的需求必须是偶数，这一点也是本题的难点。

所以遇到左括号时要做如下判断：

```
if (s[i] == '(') {
    need += 2;
    if (need % 2 == 1) {
        // 插入一个右括号
        res++;
        // 对右括号的需求减一
        need--;
    }
}
```

综上，我们可以写出正确的代码：

```
int minInsertions(string s) {
    int res = 0, need = 0;

    for (int i = 0; i < s.size(); i++) {
        if (s[i] == '(') {
            need += 2;
            if (need % 2 == 1) {
                res++;
                need--;
            }
        }
```

```
            if (s[i] == ')') {
                need--;
                if (need == -1) {
                    res++;
                    need = 1;
                }
            }
        }

        return res + need;
    }
```

▶ 👾 代码可视化动画👾

综上，三道括号相关的问题就解决了，其实我们前文 有效括号生成算法 也是括号相关的问题，但是使用的回溯算法技巧，和本文的几道题差别还是蛮大的，有兴趣的读者可以去看看。

如果你有高质量的问题，可以 点击这里 进入本文的讨论区。

▶ 引用本文的题目

安装 我的 Chrome 刷题插件 点开下列题目可直接查看解题思路：

LeetCode	力扣
32. Longest Valid Parentheses	32. 最长有效括号

▶ 引用本文的文章

- 回溯算法最佳实践：括号生成

——————————————————

更多精品课程可查看 我的网站；扫码查看更多配套学习套件：

算法学习网站：https://labuladong.gitee.io/algo/ 或 https://labuladong.github.io/algo/

二维码太多，长按识别不到？放大图片 -> 让对应二维码充满屏幕 -> 长按识别该二维码

队列实现栈以及栈实现队列

Stars 123k 精品课程 查看 知乎 @labuladong B站 @labuladong

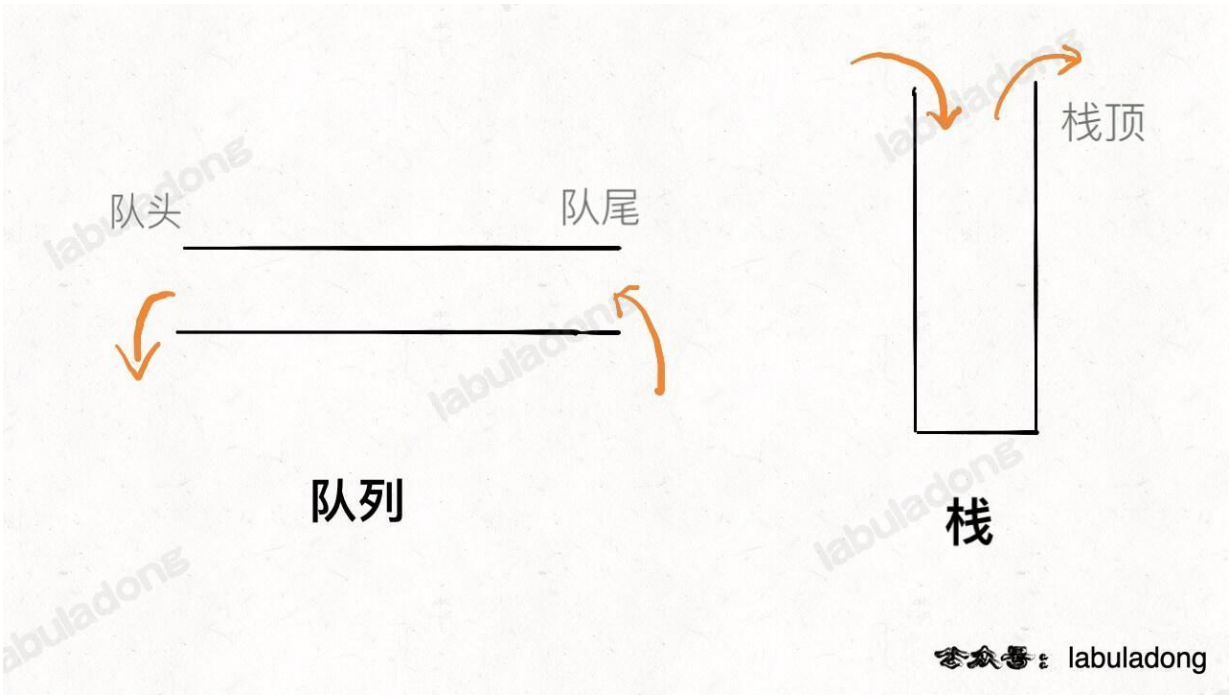
微信搜一搜 labuladong公众号

学算法认准 labuladong，致力于把算法讲清楚！网页版 点这里。

读完本文，你不仅学会了算法套路，还可以顺便解决如下题目：

LeetCode	力扣	难度
225. Implement Stack using Queues	225. 用队列实现栈	🟢
232. Implement Queue using Stacks	232. 用栈实现队列	🟢
-	剑指 Offer 09. 用两个栈实现队列	🟢
-	剑指 Offer 09. 用两个栈实现队列	🟢

队列是一种先进先出的数据结构，栈是一种先进后出的数据结构，形象一点就是这样：



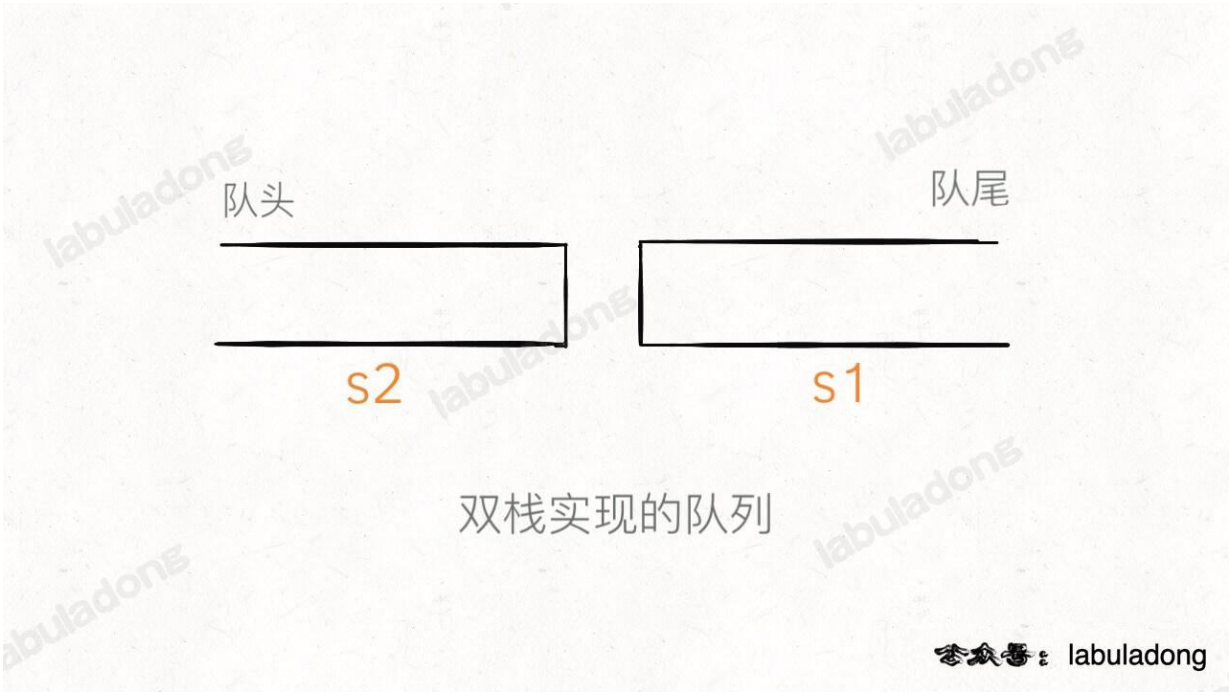
这两种数据结构底层其实都是数组或者链表实现的，只是 API 限定了它们的特性，那么今天就来看看如何使用「栈」的特性来实现一个「队列」，如何用「队列」实现一个「栈」。

一、用栈实现队列

力扣第 232 题「用栈实现队列」让我们实现的 API 如下：

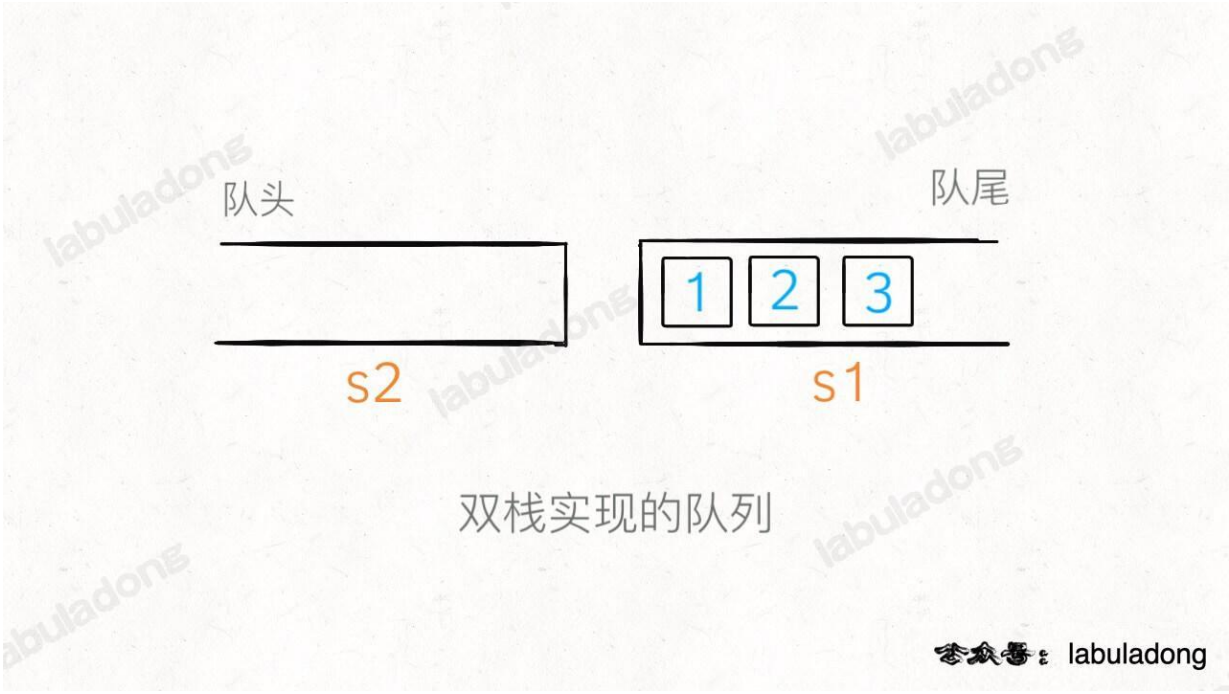
```
class MyQueue {

    /** 添加元素到队尾 */
    public void push(int x);

    /** 删除队头的元素并返回 */
    public int pop();

    /** 返回队头元素 */
    public int peek();

    /** 判断队列是否为空 */
    public boolean empty();
}
```

我们使用两个栈 s1, s2 就能实现一个队列的功能（这样放置栈可能更容易理解）：



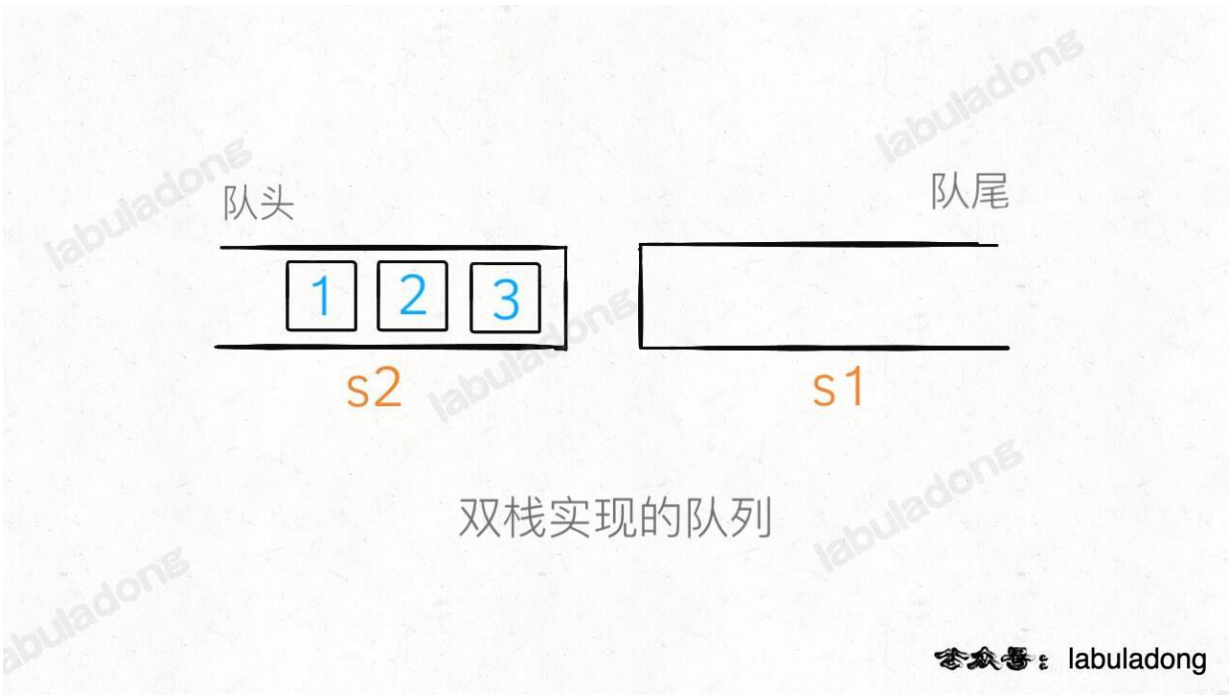

```
class MyQueue {
    private Stack<Integer> s1, s2;

    public MyQueue() {
        s1 = new Stack<>();
        s2 = new Stack<>();
    }
    // ...
}
```

当调用 push 让元素入队时，只要把元素压入 s1 即可，比如说 push 进 3 个元素分别是 1,2,3，那么底层结构就是这样：




```
class MyQueue {
    // 为了节约篇幅，省略上文给出的代码部分...

    /** 添加元素到队尾 */
    public void push(int x) {
        s1.push(x);
    }
}
```

那么如果这时候使用 peek 查看队头的元素怎么办呢？按道理队头元素应该是 1，但是在 s1 中 1 被压在栈底，现在就要轮到 s2 起到一个中转的作用了：当 s2 为空时，可以把 s1 的所有元素取出再添加进 s2，**这时候 s2 中元素就是先进先出顺序了**。



```
class MyQueue {
    // 为了节约篇幅，省略上文给出的代码部分...

    /** 返回队头元素 */
    public int peek() {
        if (s2.isEmpty())
            // 把 s1 元素压入 s2
            while (!s1.isEmpty())
                s2.push(s1.pop());
        return s2.peek();
    }
}
```

同理，对于 pop 操作，只要操作 s2 就可以了。

```
class MyQueue {
    // 为了节约篇幅，省略上文给出的代码部分...

    /** 删除队头的元素并返回 */
    public int pop() {
        // 先调用 peek 保证 s2 非空
        peek();
        return s2.pop();
    }
}
```

最后，如何判断队列是否为空呢？如果两个栈都为空的话，就说明队列为空：

```
class MyQueue {
    // 为了节约篇幅，省略上文给出的代码部分...

    /** 判断队列是否为空 */
    public boolean empty() {
        return s1.isEmpty() && s2.isEmpty();
    }
}
```

至此，就用栈结构实现了一个队列，核心思想是利用两个栈互相配合。

值得一提的是，这几个操作的时间复杂度是多少呢？有点意思的是 peek 操作，调用它时可能触发 while 循环，这样的话时间复杂度是 O(N)，但是大部分情况下 while 循环不会被触发，时间复杂度是 O(1)。由于 pop 操作调用了 peek，它的时间复杂度和 peek 相同。

像这种情况，可以说它们的**最坏时间复杂度**是 O(N)，因为包含 while 循环，**可能**需要从 s1 往 s2 搬移元素。

但是它们的**均摊时间复杂度**是 O(1)，这个要这么理解：对于一个元素，最多只可能被搬运一次，也就是说 peek 操作平均到每个元素的时间复杂度是 O(1)。

二、用队列实现栈

如果说双栈实现队列比较巧妙，那么用队列实现栈就比较简单粗暴了，只需要一个队列作为底层数据结构。

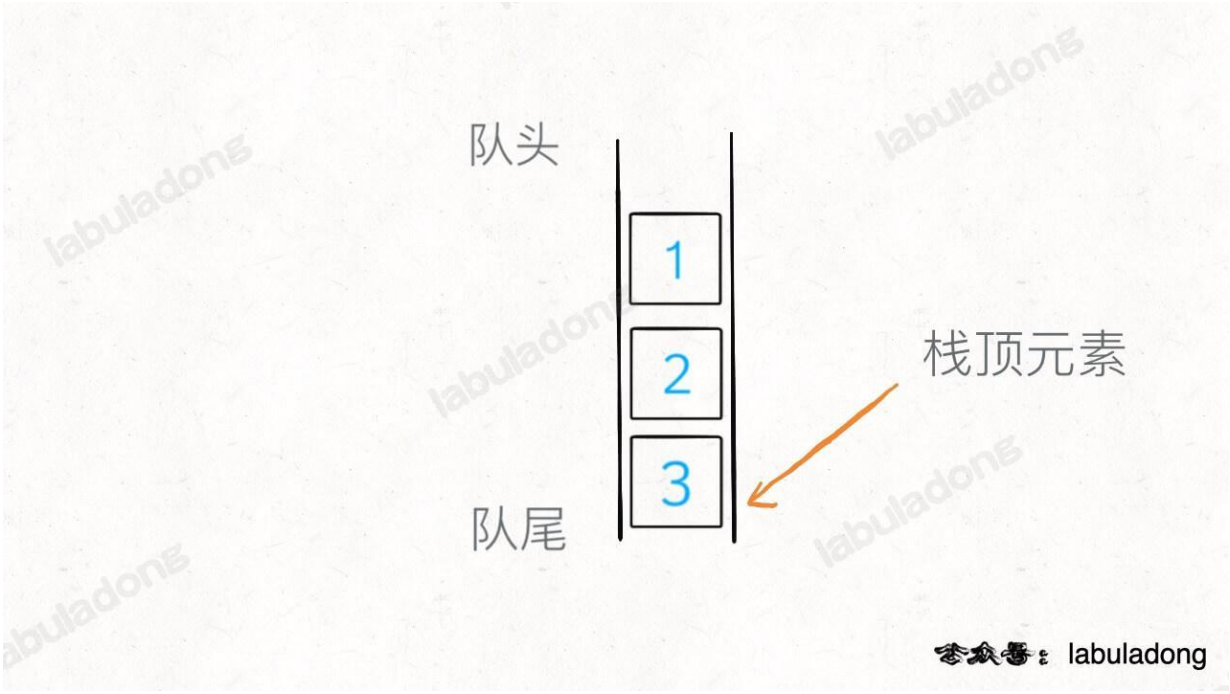
力扣第 225 题「用队列实现栈」让我们实现如下 API：

```
class MyStack {

    /** 添加元素到栈顶 */
    public void push(int x);

    /** 删除栈顶的元素并返回 */
    public int pop();

    /** 返回栈顶元素 */
    public int top();

    /** 判断栈是否为空 */
    public boolean empty();
}
```

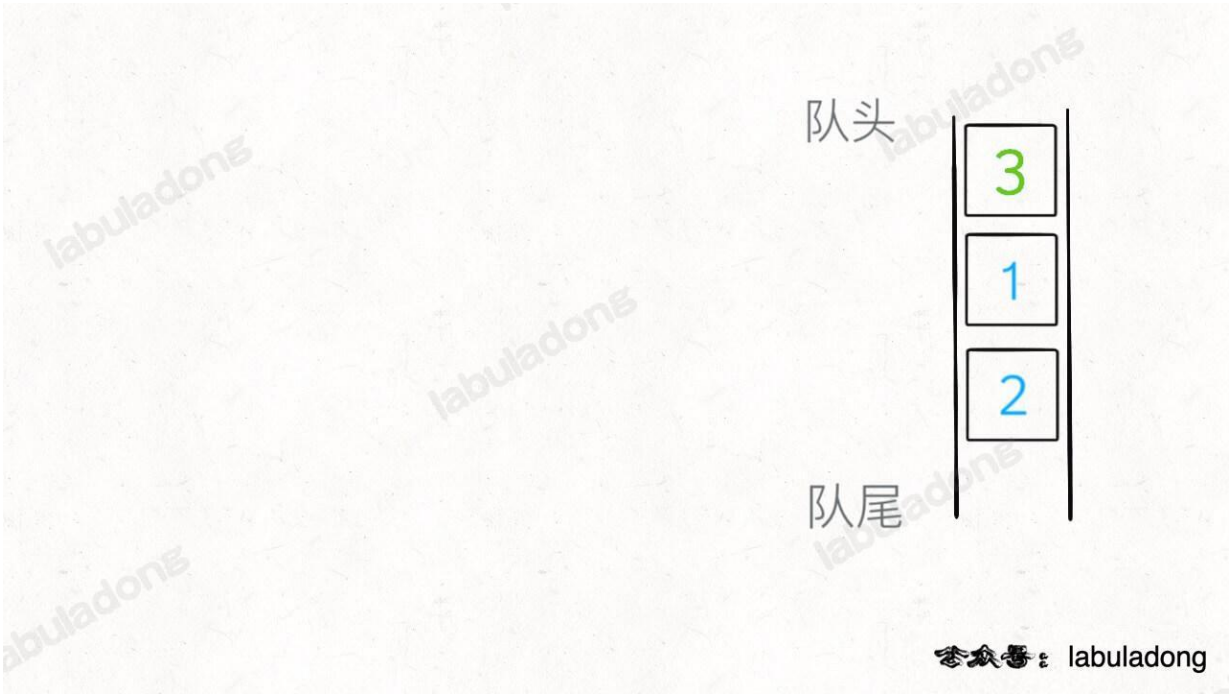
先说 push API，直接将元素加入队列，同时记录队尾元素，因为队尾元素相当于栈顶元素，如果要 top 查看栈顶元素的话可以直接返回：

```
class MyStack {
    Queue<Integer> q = new LinkedList<>();
    int top_elem = 0;

    /** 添加元素到栈顶 */
    public void push(int x) {
        // x 是队列的队尾，是栈的栈顶
        q.offer(x);
        top_elem = x;
    }

    /** 返回栈顶元素 */
    public int top() {
        return top_elem;
    }
}
```

我们的底层数据结构是先进先出的队列，每次 pop 只能从队头取元素；但是栈是后进先出，也就是说 pop API 要从队尾取元素：



解决方法简单粗暴，把队列前面的都取出来再加入队尾，让之前的队尾元素排到队头，这样就可以取出了：




```
class MyStack {
    // 为了节约篇幅，省略上文给出的代码部分...

    /** 删除栈顶的元素并返回 */
    public int pop() {
        int size = q.size();
        while (size > 1) {
            q.offer(q.poll());
            size--;
        }
        // 之前的队尾元素已经到了队头
        return q.poll();
```

```
    }
}
```

这样实现还有一点小问题就是，原来的队尾元素被提到队头并删除了，但是 top_elem 变量没有更新，我们还需要一点小修改：

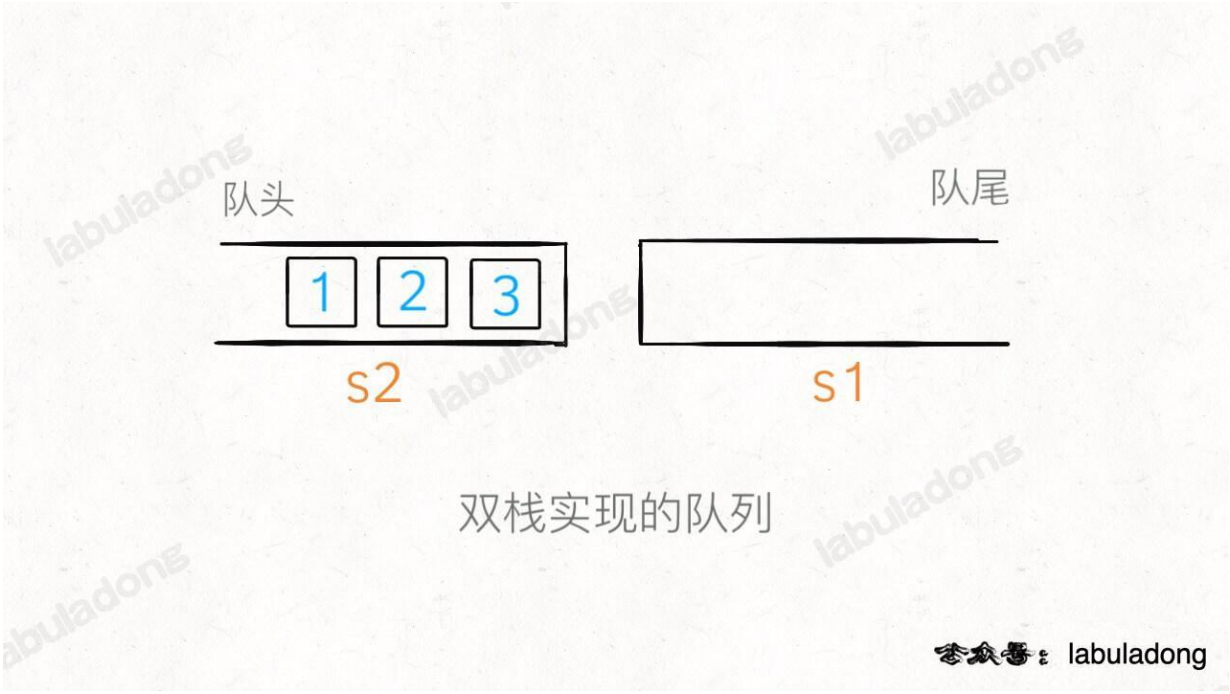
```
class MyStack {
    // 为了节约篇幅，省略上文给出的代码部分...

    /** 删除栈顶的元素并返回 */
    public int pop() {
        int size = q.size();
        // 留下队尾 2 个元素
        while (size > 2) {
            q.offer(q.poll());
            size--;
        }
        // 记录新的队尾元素
        top_elem = q.peek();
        q.offer(q.poll());
        // 删除之前的队尾元素
        return q.poll();
    }
}
```

最后，API empty 就很容易实现了，只要看底层的队列是否为空即可：

```
class MyStack {
    // 为了节约篇幅，省略上文给出的代码部分...

    /** 判断栈是否为空 */
    public boolean empty() {
        return q.isEmpty();
    }
}
```

很明显，用队列实现栈的话，pop 操作时间复杂度是 O(N)，其他操作都是 O(1)。

个人认为，用队列实现栈是没啥亮点的问题，但是**用双栈实现队列是值得学习的**。



从栈 s1 搬运元素到 s2 之后，元素在 s2 中就变成了队列的先进先出顺序，这个特性有点类似「负负得正」，确实不太容易想到。

希望本文对你有帮助。

如果你有高质量的问题，可以 点击这里 进入本文的讨论区。

▶ **引用本文的题目**

安装 我的 Chrome 刷题插件 点开下列题目可直接查看解题思路：

LeetCode	力扣
-	剑指 Offer 09. 用两个栈实现队列

———————————————

更多精品课程可查看 我的网站；扫码查看更多配套学习套件：

算法学习网站：https://labuladong.gitee.io/algo/ 或 https://labuladong.github.io/algo/

二维码太多，长按识别不到？放大图片 -> 让对应二维码充满屏幕 -> 长按识别该二维码

【强化练习】栈的经典习题

对于栈这种数据结构的考察，主要考察先进后出特点的运用，比如表达式运算、括号合法性检测等问题，下面列出几个使用栈的经典场景。

本文为网站会员内容，请 点这里 查看。

【强化练习】队列的经典习题

队列常见考点主要是元素「先进先出」的顺序特性，比如维护队列内的元素在「时序上」的某些性质，下面是几道例题，队列充当「滑动窗口」的作用。

———————————————————

本文为网站会员内容，请 点这里 查看。

单调栈结构解决三道算法题

Stars 123k 精品课程 查看 知乎 @labuladong B站 @labuladong

学算法认准 labuladong，致力于把算法讲清楚！网页版 点这里。

读完本文，你不仅学会了算法套路，还可以顺便解决如下题目：

LeetCode	力扣	难度
496. Next Greater Element I	496. 下一个更大元素 I	🟢
503. Next Greater Element II	503. 下一个更大元素 II	🟠
739. Daily Temperatures	739. 每日温度	🟠
-	剑指 Offer II 038. 每日温度	🟠

栈（stack）是很简单的一种数据结构，先进后出的逻辑顺序，符合某些问题的特点，比如说函数调用栈。单调栈实际上就是栈，只是利用了一些巧妙的逻辑，使得每次新元素入栈后，栈内的元素都保持有序（单调递增或单调递减）。

听起来有点像堆（heap）？不是的，单调栈用途不太广泛，只处理一类典型的问题，比如「下一个更大元素」，「上一个更小元素」等。本文用讲解单调队列的算法模版解决「下一个更大元素」相关问题，并且探讨处理「循环数组」的策略。至于其他的变体和经典例题，我会在下一篇文章 单调栈变体和经典习题 讲解。

单调栈模板

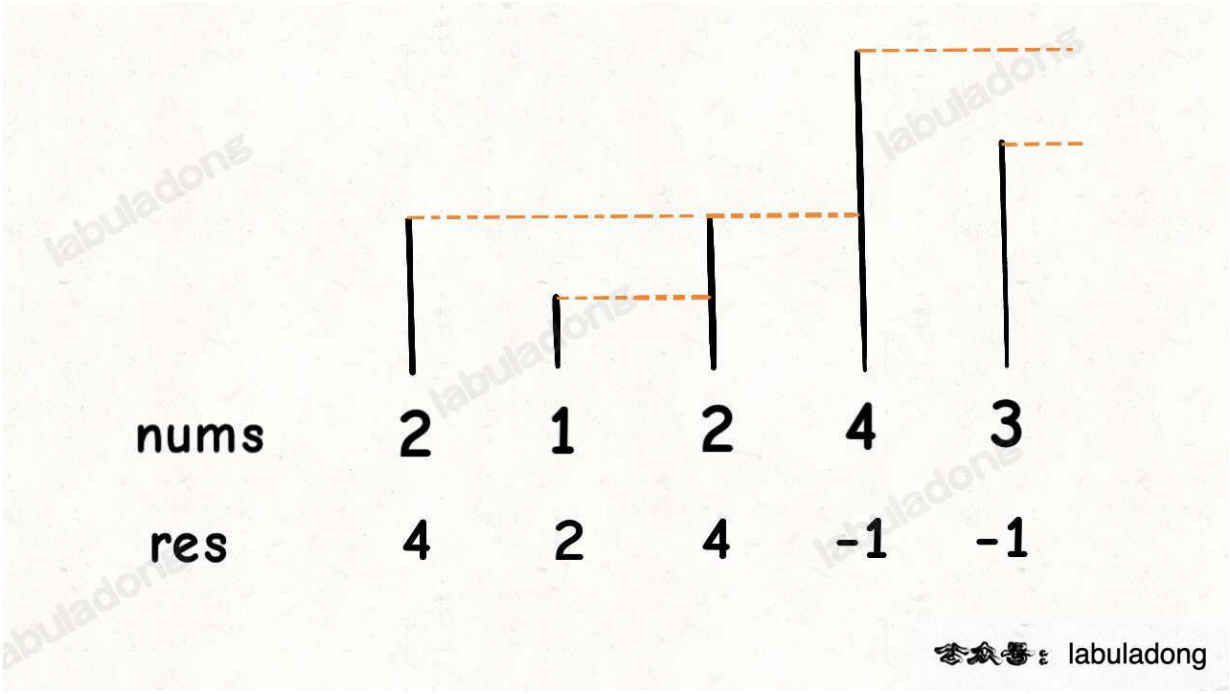
现在给你出这么一道题：输入一个数组 `nums`，请你返回一个等长的结果数组，结果数组中对应索引存储着下一个更大元素，如果没有更大的元素，就存 -1。函数签名如下：

```
int[] nextGreaterElement(int[] nums);
```

比如说，输入一个数组 `nums = [2,1,2,4,3]`，你返回数组 `[4,2,4,-1,-1]`。因为第一个 2 后面比 2 大的数是 4; 1 后面比 1 大的数是 2；第二个 2 后面比 2 大的数是 4; 4 后面没有比 4 大的数，填 -1；3 后面没有比 3 大的数，填 -1。

这道题的暴力解法很好想到，就是对每个元素后面都进行扫描，找到第一个更大的元素就行了。但是暴力解法的时间复杂度是 `O(n^2)`。

这个问题可以这样抽象思考：把数组的元素想象成并列站立的人，元素大小想象成人的身高。这些人面对你站成一列，如何求元素「2」的下一个更大元素呢？很简单，如果能够看到元素「2」，那么他后面可见的第一个人就是「2」的下一个更大元素，因为比「2」小的元素身高不够，都被「2」挡住了，第一个露出来的就是答案。



这个情景很好理解吧？带着这个抽象的情景，先来看下代码。

```
int[] nextGreaterElement(int[] nums) {
    int n = nums.length;
    // 存放答案的数组
    int[] res = new int[n];
    Stack<Integer> s = new Stack<>();
    // 倒着往栈里放
    for (int i = n - 1; i >= 0; i--) {
        // 判定个子高矮
        while (!s.isEmpty() && s.peek() <= nums[i]) {
            // 矮个起开，反正也被挡着了。。。
            s.pop();
        }
        // nums[i] 身后的更大元素
        res[i] = s.isEmpty() ? -1 : s.peek();
        s.push(nums[i]);
    }
    return res;
}
```

这就是单调队列解决问题的模板。for 循环要从后往前扫描元素，因为我们借助的是栈的结构，倒着入栈，其实是正着出栈。while 循环是把两个「个子高」元素之间的元素排除，因为他们的存在没有意义，前面挡着个「更高」的元素，所以他们不可能被作为后续进来的元素的下一个更大元素了。

这个算法的时间复杂度不是那么直观，如果你看到 for 循环嵌套 while 循环，可能认为这个算法的复杂度也是 O(n^2)，但是实际上这个算法的复杂度只有 O(n)。

分析它的时间复杂度，要从整体来看：总共有 n 个元素，每个元素都被 push 入栈了一次，而最多会被 pop 一次，没有任何冗余操作。所以总的计算规模是和元素规模 n 成正比的，也就是 O(n) 的复杂度。

问题变形

单调栈的使用技巧差不多了，首先来一个简单的变形，力扣第 496 题「下一个更大元素 I」：

▼ 496. 下一个更大元素 I Leetcode | 力扣

nums1 中数字 x 的 **下一个更大元素** 是指 x 在 nums2 中对应位置 **右侧** 的 **第一个** 比 x 大的元素。

给你两个 **没有重复元素** 的数组 nums1 和 nums2 ，下标从 **0** 开始计数，其中nums1 是 nums2 的子集。

对于每个 0 <= i < nums1.length ，找出满足 nums1[i] == nums2[j] 的下标 j ，并且在 nums2 确定 nums2[j] 的 **下一个更大元素** 。如果不存在下一个更大元素，那么本次查询的答案是 -1 。

返回一个长度为 nums1.length 的数组 ans 作为答案，满足 ans[i] 是如上所述的 **下一个更大元素** 。

示例 1：

```
输入：nums1 = [4,1,2], nums2 = [1,3,4,2].
输出：[-1,3,-1]
解释：nums1 中每个值的下一个更大元素如下所述：
- 4 ，用加粗斜体标识，nums2 = [1,3,4,2]。不存在下一个更大元素，所以答案是 -1 。
- 1 ，用加粗斜体标识，nums2 = [1,3,4,2]。下一个更大元素是 3 。
- 2 ，用加粗斜体标识，nums2 = [1,3,4,2]。不存在下一个更大元素，所以答案是 -1 。
```

示例 2：

```
输入：nums1 = [2,4], nums2 = [1,2,3,4].
输出：[3,-1]
解释：nums1 中每个值的下一个更大元素如下所述：
- 2 ，用加粗斜体标识，nums2 = [1,2,3,4]。下一个更大元素是 3 。
- 4 ，用加粗斜体标识，nums2 = [1,2,3,4]。不存在下一个更大元素，所以答案是 -1 。
```

提示：

- 1 <= nums1.length <= nums2.length <= 1000
- 0 <= nums1[i], nums2[i] <= 10^4
- nums1和nums2中所有整数 **互不相同**
- nums1 中的所有整数同样出现在 nums2 中

进阶：你可以设计一个时间复杂度为 O(nums1.length + nums2.length) 的解决方案吗?

这道题给你输入两个数组 nums1 和 nums2，让你求 nums1 中的元素在 nums2 中的下一个更大元素，函数签名如下：

```
int[] nextGreaterElement(int[] nums1, int[] nums2)
```

其实和把我们刚才的代码改一改就可以解决这道题了，因为题目说 nums1 是 nums2 的子集，那么我们先把 nums2 中每个元素的下一个更大元素算出来存到一个映射里，然后再让 nums1 中的元素去查表即可：

```
int[] nextGreaterElement(int[] nums1, int[] nums2) {
    // 记录 nums2 中每个元素的下一个更大元素
    int[] greater = nextGreaterElement(nums2);
    // 转化成映射：元素 x -> x 的下一个最大元素
    HashMap<Integer, Integer> greaterMap = new HashMap<>();
    for (int i = 0; i < nums2.length; i++) {
        greaterMap.put(nums2[i], greater[i]);
    }
    // nums1 是 nums2 的子集，所以根据 greaterMap 可以得到结果
    int[] res = new int[nums1.length];
    for (int i = 0; i < nums1.length; i++) {
        res[i] = greaterMap.get(nums1[i]);
    }
    return res;
}

int[] nextGreaterElement(int[] nums) {
    // 见上文
}
```

▶ 👾 代码可视化动画👾

再看看力扣第 739 题「每日温度」：

给你一个数组 temperatures，这个数组存放的是近几天的天气气温，你返回一个等长的数组，计算：对于每一天，你还要至少等多少天才能等到一个更暖和的气温；如果等不到那一天，填 0。函数签名如下：

```
int[] dailyTemperatures(int[] temperatures);
```

比如说给你输入 temperatures = [73,74,75,71,69,76]，你返回 [1,1,3,2,1,0]。因为第一天 73 华氏度，第二天 74 华氏度，比 73 大，所以对于第一天，只要等一天就能等到一个更暖和的气温，后面的同理。

这个问题本质上也是找下一个更大元素，只不过现在不是问你下一个更大元素的值是多少，而是问你当前元素距离下一个更大元素的索引距离而已。

相同的思路，直接调用单调栈的算法模板，稍作改动就可以，直接上代码吧：

```
int[] dailyTemperatures(int[] temperatures) {
    int n = temperatures.length;
    int[] res = new int[n];
    // 这里放元素索引，而不是元素
    Stack<Integer> s = new Stack<>();
    /* 单调栈模板 */
    for (int i = n - 1; i >= 0; i--) {
        while (!s.isEmpty() && temperatures[s.peek()] <= temperatures[i])
{
            s.pop();
        }
        // 得到索引间距
        res[i] = s.isEmpty() ? 0 : (s.peek() - i);
        // 将索引入栈，而不是元素
        s.push(i);
    }
    return res;
}
```

单调栈讲解完毕，下面开始另一个重点：如何处理「循环数组」。

如何处理环形数组

同样是求下一个更大元素，现在假设给你的数组是个环形的，如何处理？力扣第 503 题「下一个更大元素 II」就是这个问题：输入一个「环形数组」，请你计算其中每个元素的下一个更大元素。

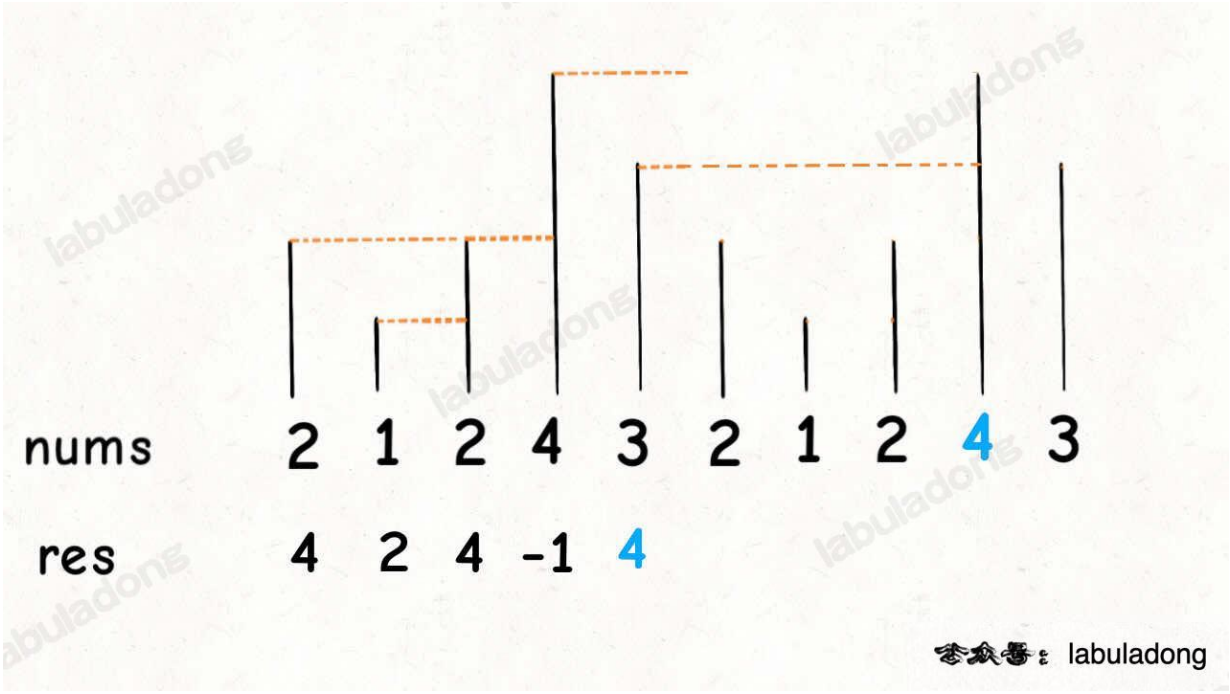
比如输入 `[2,1,2,4,3]`，你应该返回 `[4,2,4,-1,4]`，因为拥有了环形属性，**最后一个元素 3 绕了一圈后找到了比自己大的元素 4**。

我们一般是通过 % 运算符求模（余数），来模拟环形特效：

```
int[] arr = {1,2,3,4,5};
int n = arr.length, index = 0;
while (true) {
    // 在环形数组中转圈
    print(arr[index % n]);
    index++;
}
```

这个问题肯定还是要用单调栈的解题模板，但难点在于，比如输入是 `[2,1,2,4,3]`，对于最后一个元素 3，如何找到元素 4 作为下一个更大元素。

对于这种需求，常用套路就是将数组长度翻倍：



这样，元素 3 就可以找到元素 4 作为下一个更大元素了，而且其他的元素都可以被正确地计算。

有了思路，最简单的实现方式当然可以把这个双倍长度的数组构造出来，然后套用算法模板。但是，**我们可以不用构造新数组，而是利用循环数组的技巧来模拟数组长度翻倍的效果**。直接看代码吧：

```
int[] nextGreaterElements(int[] nums) {
    int n = nums.length;
    int[] res = new int[n];
    Stack<Integer> s = new Stack<>();
    // 数组长度加倍模拟环形数组
    for (int i = 2 * n - 1; i >= 0; i--) {
        // 索引 i 要求模，其他的和模板一样
        while (!s.isEmpty() && s.peek() <= nums[i % n]) {
            s.pop();
        }
        res[i % n] = s.isEmpty() ? -1 : s.peek();
        s.push(nums[i % n]);
    }
    return res;
}
```

▶ 👾 代码可视化动画👾

这样，就可以巧妙解决环形数组的问题，时间复杂度 `O(N)`。

最后提出一些问题吧，本文提供的单调栈模板是 `nextGreaterElement` 函数，可以计算每个元素的下一个更大元素，但如果题目让你计算上一个更大元素，或者计算上一个更大或相等的元素，应该如何修改对应的模板呢？而且在实际应用中，题目不会直接让你计算下一个（上一个）更大（小）的元素，你如何把问题转化成单调栈相关的问题呢？

我会在 单调栈的几种变体及习题 对比单调栈的几种其他形式，并在 给出单调栈的经典例题。更多数据结构设计类题目参见 数据结构设计经典习题。

如果你有高质量的问题，可以 点击这里 进入本文的讨论区。

▶ 引用本文的题目

安装 我的 Chrome 刷题插件 点开下列题目可直接查看解题思路：

LeetCode	力扣
1019. Next Greater Node In Linked List	1019. 链表中的下一个更大节点
1944. Number of Visible People in a Queue	1944. 队列中可以看到的人数
402. Remove K Digits	402. 移掉 K 位数字
42. Trapping Rain Water	42. 接雨水
901. Online Stock Span	901. 股票价格跨度
918. Maximum Sum Circular Subarray	918. 环形子数组的最大和

▶ 引用本文的文章

- 【强化练习】单调栈的几种变体及经典习题
- 【强化练习】单调队列的通用实现及经典习题
- 【强化练习】单调队列的通用实现及经典习题
- 一个方法团灭 LeetCode 打家劫舍问题
- 一道数组去重的算法题把我整不会了
- 单调栈代码模板的几种变体
- 单调队列结构解决滑动窗口问题
- 常用的位操作
- 数据结构设计：最大栈

——————————————

更多精品课程可查看 我的网站；扫码查看更多配套学习套件：

算法学习网站：https://labuladong.gitee.io/algo/ 或 https://labuladong.github.io/algo/

二维码太多，长按识别不到？放大图片 -> 让对应二维码充满屏幕 -> 长按识别该二维码

【强化练习】单调栈的几种变体及经典习题

本文给出单调栈模板的更多变形，后面讲的一些经典例题可以抽象成下面的这些标准场景，你到时候可以直接复制粘贴代码去解决。

▶ 引用本文的题目

安装 我的 Chrome 刷题插件 点开下列题目可直接查看解题思路：

LeetCode	力扣
1475. Final Prices With a Special Discount in a Shop	1475. 商品折扣后的最终价格
1944. Number of Visible People in a Queue	1944. 队列中可以看到的人数
901. Online Stock Span	901. 股票价格跨度

▶ 引用本文的文章

- 单调栈算法模板解决三道例题

———————————————

本文为网站会员内容，请 点这里 查看。

单调队列结构解决滑动窗口问题

Stars 123k 精品课程 查看 知乎 @labuladong B站 @labuladong

学算法认准 labuladong，致力于把算法讲清楚！网页版 点这里。

读完本文，你不仅学会了算法套路，还可以顺便解决如下题目：

LeetCode	力扣	难度
239. Sliding Window Maximum	239. 滑动窗口最大值	🔴
-	剑指 Offer 59 - I. 滑动窗口的最大值	🔴
-	剑指 Offer 59 - II. 队列的最大值	🟠

前文用 单调栈解决三道算法问题 介绍了单调栈这种特殊数据结构，本文写一个类似的数据结构「单调队列」。

也许这种数据结构的名字你没听过，其实没啥难的，就是一个「队列」，只是使用了一点巧妙的方法，使得队列中的元素全都是单调递增（或递减）的。

为啥要发明「单调队列」这种结构呢，主要是为了解决下面这个场景：

给你一个数组 `window`，已知其最值为 `A`，如果给 `window` 中添加一个数 `B`，那么比较一下 `A` 和 `B` 就可以立即算出新的最值；但如果要从 `window` 数组中减少一个数，就不能直接得到最值了，因为如果减少的这个数恰好是 `A`，就需要遍历 `window` 中的所有元素重新寻找新的最值。

这个场景很常见，但不用单调队列似乎也可以，比如优先级队列也是一种特殊的队列，专门用来动态寻找最值的，我创建一个大（小）顶堆，不就可以很快拿到最大（小）值了吗？

如果单纯地维护最值的话，优先级队列很专业，队头元素就是最值。但优先级队列无法满足标准队列结构「先进先出」的**时间顺序**，因为优先级队列底层利用二叉堆对元素进行动态排序，元素的出队顺序是元素的大小顺序，和入队的先后顺序完全没有关系。

所以，现在需要一种新的队列结构，既能够维护队列元素「先进先出」的时间顺序，又能够正确维护队列中所有元素的最值，这就是「单调队列」结构。

「单调队列」这个数据结构主要用来辅助解决滑动窗口相关的问题，前文 滑动窗口核心框架 把滑动窗口算法作为双指针技巧的一部分进行了讲解，但有些稍微复杂的滑动窗口问题不能只靠两个指针来解决，需要上更先进的数据结构。

比方说，你注意看前文 滑动窗口核心框架 讲的几道题目，每当窗口扩大（`right++`）和窗口缩小（`left++`）时，你单凭移出和移入窗口的元素即可决定是否更新答案。

但本文开头说的那个判断一个窗口中最值的例子，你无法单凭移出窗口的那个元素更新窗口的最值，除非重新遍历所有元素，但这样的话时间复杂度就上来了，这是我们不希望看到的。

我们来看看力扣第 239 题「滑动窗口最大值」，就是一道标准的滑动窗口问题：

给你输入一个数组 nums 和一个正整数 k，有一个大小为 k 的窗口在 nums 上从左至右滑动，请你输出每次窗口中 k 个元素的最大值。

函数签名如下：

```
int[] maxSlidingWindow(int[] nums, int k);
```

比如说力扣给出的一个示例：

示例:

输入: *nums* = [1,3,-1,-3,5,3,6,7], 和 *k* = 3
输出: [3,3,5,5,6,7]
解释:

```
  滑动窗口的位置                最大值
---------------               -----
[1  3  -1] -3  5  3  6  7       3
 1 [3  -1  -3] 5  3  6  7       3
 1  3 [-1  -3  5] 3  6  7       5
 1  3  -1 [-3  5  3] 6  7       5
 1  3  -1  -3 [5  3  6] 7       6
 1  3  -1  -3  5 [3  6  7]      7
```

接下来，我们就借助单调队列结构，用 O(1) 时间算出每个滑动窗口中的最大值，使得整个算法在线性时间完成。

一、搭建解题框架

在介绍「单调队列」这种数据结构的 API 之前，先来看看一个普通的队列的标准 API：

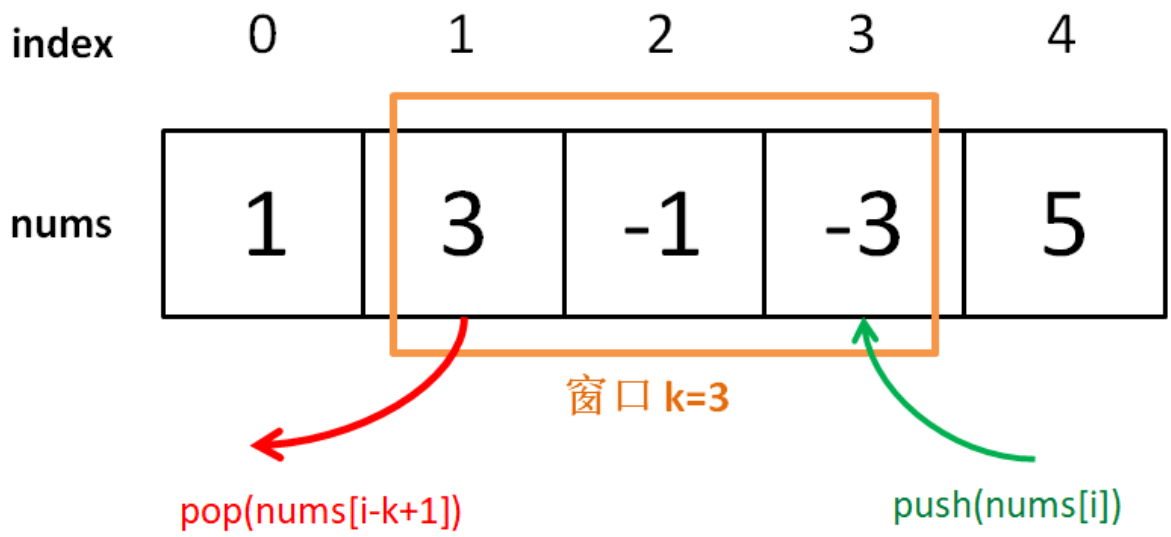
```
class Queue {
    // enqueue 操作，在队尾加入元素 n
    void push(int n);
    // dequeue 操作，删除队头元素
    void pop();
}
```

我们要实现的「单调队列」的 API 也差不多：

```
class MonotonicQueue {
    // 在队尾添加元素 n
    void push(int n);
    // 返回当前队列中的最大值
    int max();
    // 队头元素如果是 n，删除它
    void pop(int n);
}
```

当然，这几个 API 的实现方法肯定跟一般的 Queue 不一样，不过我们暂且不管，而且认为这几个操作的时间复杂度都是 O(1)，先把这道「滑动窗口」问题的解答框架搭出来：

```
int[] maxSlidingWindow(int[] nums, int k) {
    MonotonicQueue window = new MonotonicQueue();
    List<Integer> res = new ArrayList<>();

    for (int i = 0; i < nums.length; i++) {
        if (i < k - 1) {
            //先把窗口的前 k - 1 填满
            window.push(nums[i]);
        } else {
            // 窗口开始向前滑动
            // 移入新元素
            window.push(nums[i]);
            // 将当前窗口中的最大元素记入结果
            res.add(window.max());
            // 移出最后的元素
            window.pop(nums[i - k + 1]);
        }
    }
    // 将 List 类型转化成 int[] 数组作为返回值
    int[] arr = new int[res.size()];
    for (int i = 0; i < res.size(); i++) {
        arr[i] = res.get(i);
    }
    return arr;
}
```



这个思路很简单，能理解吧？下面我们开始重头戏，单调队列的实现。

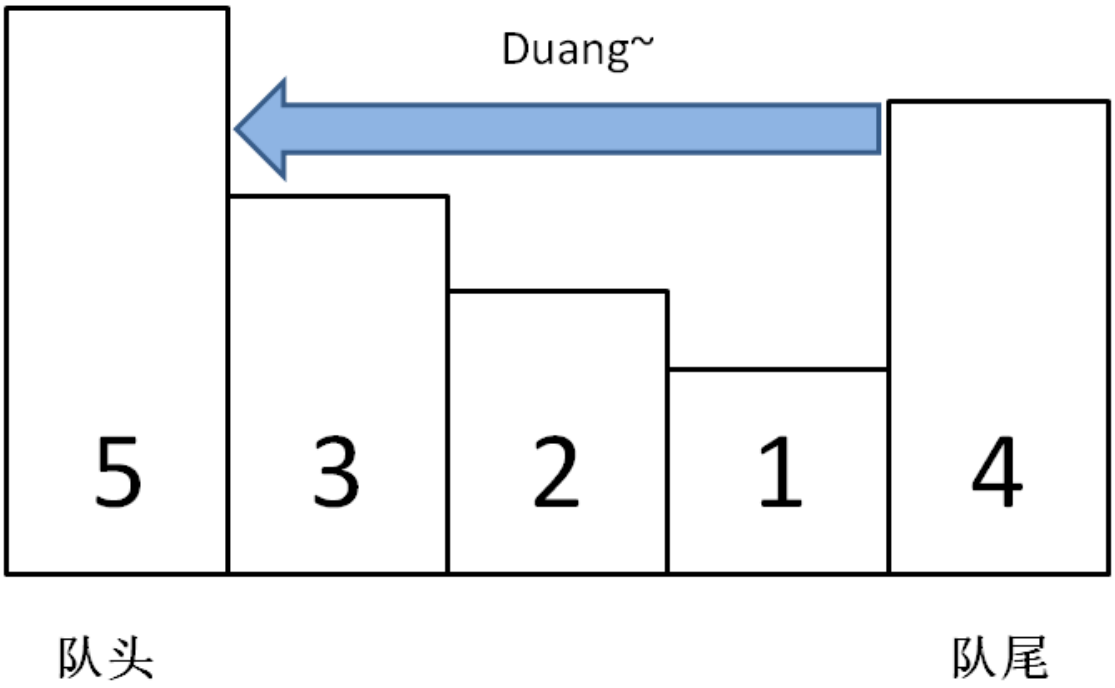
二、实现单调队列数据结构

观察滑动窗口的过程就能发现，实现「单调队列」必须使用一种数据结构支持在头部和尾部进行插入和删除，很明显双链表是满足这个条件的。

「单调队列」的核心思路和「单调栈」类似，`push` 方法依然在队尾添加元素，但是要把前面比自己小的元素都删掉：

```
class MonotonicQueue {
// 双链表，支持头部和尾部增删元素
// 维护其中的元素自尾部到头部单调递增
private LinkedList<Integer> maxq = new LinkedList<>();

// 在尾部添加一个元素 n，维护 maxq 的单调性质
public void push(int n) {
    // 将前面小于自己的元素都删除
    while (!maxq.isEmpty() && maxq.getLast() < n) {
        maxq.pollLast();
    }
    maxq.addLast(n);
}
```

你可以想象，加入数字的大小代表人的体重，体重大的会把前面体重不足的压扁，直到遇到更大的量级才停住。



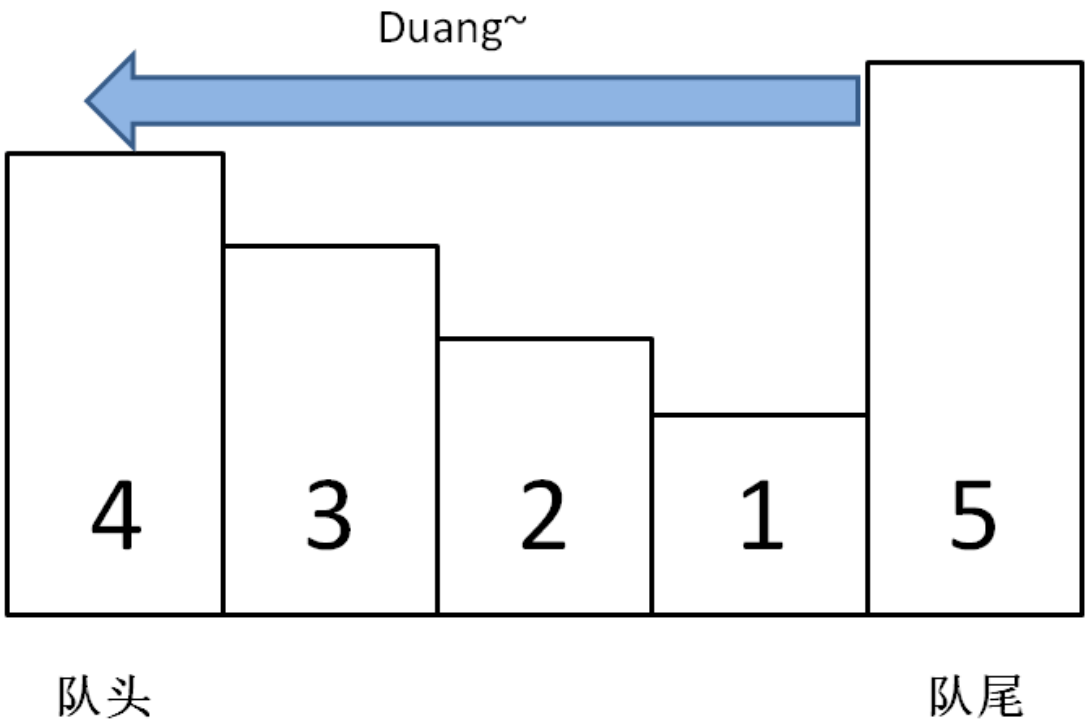
如果每个元素被加入时都这样操作，最终单调队列中的元素大小就会保持一个**单调递减**的顺序，因此我们的 `max` 方法可以可以这样写：

```
class MonotonicQueue {
    // 为了节约篇幅，省略上文给出的代码部分...

    public int max() {
        // 队头的元素肯定是最大的
        return maxq.getFirst();
    }
}
```

`pop` 方法在队头删除元素 `n`，也很好写：

```
class MonotonicQueue {
    // 为了节约篇幅，省略上文给出的代码部分...

    public void pop(int n) {
        if (n == maxq.getFirst()) {
            maxq.pollFirst();
        }
    }
}
```

之所以要判断 `n == maxq.getFirst()`，是因为我们想删除的队头元素 `n` 可能已经被「压扁」了，可能已经不存在了，所以这时候就不用删除了：



至此，单调队列设计完毕，看下完整的解题代码：

```
/* 单调队列的实现 */
class MonotonicQueue {
    LinkedList<Integer> maxq = new LinkedList<>();
    public void push(int n) {
        // 将小于 n 的元素全部删除
        while (!maxq.isEmpty() && maxq.getLast() < n) {
            maxq.pollLast();
        }
        // 然后将 n 加入尾部
        maxq.addLast(n);
    }

    public int max() {
        return maxq.getFirst();
    }

    public void pop(int n) {
        if (n == maxq.getFirst()) {
            maxq.pollFirst();
        }
    }
}

/* 解题函数的实现 */
int[] maxSlidingWindow(int[] nums, int k) {
    MonotonicQueue window = new MonotonicQueue();
    List<Integer> res = new ArrayList<>();
```

```
        for (int i = 0; i < nums.length; i++) {
            if (i < k - 1) {
                //先填满窗口的前 k - 1
                window.push(nums[i]);
            } else {
                // 窗口向前滑动，加入新数字
                window.push(nums[i]);
                // 记录当前窗口的最大值
                res.add(window.max());
                // 移出旧数字
                window.pop(nums[i - k + 1]);
            }
        }
        // 需要转成 int[] 数组再返回
        int[] arr = new int[res.size()];
        for (int i = 0; i < res.size(); i++) {
            arr[i] = res.get(i);
        }
        return arr;
    }
```

有一点细节问题不要忽略，在实现 `MonotonicQueue` 时，我们使用了 Java 的 `LinkedList`，因为链表结构支持在头部和尾部快速增删元素；而在解法代码中的 `res` 则使用的 `ArrayList` 结构，因为后续会按照索引取元素，所以数组结构更合适。

关于单调队列 API 的时间复杂度，读者可能有疑惑：`push` 操作中含有 while 循环，时间复杂度应该不是 `O(1)` 呀，那么本算法的时间复杂度应该不是线性时间吧？

这里就用到了 算法时空复杂度分析使用手册 中讲到的摊还分析：

单独看 `push` 操作的复杂度确实不是 `O(1)`，但是算法整体的复杂度依然是 `O(N)` 线性时间。要这样想，`nums` 中的每个元素最多被 `push` 和 `pop` 一次，没有任何多余操作，所以整体的复杂度还是 `O(N)`。空间复杂度就很简单了，就是窗口的大小 `O(k)`。

拓展延伸

最后，我提出几个问题请大家思考：

1、本文给出的 `MonotonicQueue` 类只实现了 `max` 方法，你是否能够再额外添加一个 `min` 方法，在 `O(1)` 的时间返回队列中所有元素的最小值？

2、本文给出的 `MonotonicQueue` 类的 `pop` 方法还需要接收一个参数，这显然有悖于标准队列的做法，请你修复这个缺陷。

3、请你实现 `MonotonicQueue` 类的 `size` 方法，返回单调队列中元素的个数（注意，由于每次 `push` 方法都可能从底层的 `q` 列表中删除元素，所以 `q` 中的元素个数并不是单调队列的元素个数）。

也就是说，你是否能够实现单调队列的通用实现：

```
/* 单调队列的通用实现，可以高效维护最大值和最小值 */
class MonotonicQueue<E extends Comparable<E>> {
```

```
    // 标准队列 API，向队尾加入元素
    public void push(E elem);

    // 标准队列 API，从队头弹出元素，符合先进先出的顺序
    public E pop();

    // 标准队列 API，返回队列中的元素个数
    public int size();

    // 单调队列特有 API，O(1) 时间计算队列中元素的最大值
    public E max();

    // 单调队列特有 API，O(1) 时间计算队列中元素的最小值
    public E min();
}
```

我将在 单调队列通用实现及应用 中给出单调队列的通用实现和经典习题。更多数据结构设计类题目参见 数据结构设计经典习题。

如果你有高质量的问题，可以 点击这里 进入本文的讨论区。

▶ 引用本文的题目

安装 我的 Chrome 刷题插件 点开下列题目可直接查看解题思路：

LeetCode	力扣
1425. Constrained Subsequence Sum	1425. 带限制的子序列和
1696. Jump Game VI	1696. 跳跃游戏 VI
862. Shortest Subarray with Sum at Least K	862. 和至少为 K 的最短子数组
918. Maximum Sum Circular Subarray	918. 环形子数组的最大和
-	剑指 Offer 59 - I. 滑动窗口的最大值

▶ 引用本文的文章

- 数据结构设计：最大栈
- 算法时空复杂度分析实用指南

——————————————————

更多精品课程可查看 我的网站；扫码查看更多配套学习套件：

算法学习网站：https://labuladong.gitee.io/algo/ 或 https://labuladong.github.io/algo/

二维码太多，长按识别不到？放大图片 -> 让对应二维码充满屏幕 -> 长按识别该二维码

【强化练习】单调队列的通用实现及经典习题

通用实现

我先提供一个单调队列结构的通用实现，这里涉及 Java 的泛型，`E` 就代表任意类型，本站开头的 Java 语言基础 有讲过，这里就不细讲了。

`E extends Comparable<E>` 的意思是这个类型 `E` 需要实现 `Comparable` 接口，即类型 `E` 是可比较的，比如 `Integer, String` 这种实现了 `compareTo` 方法的类型。原因也很好理解，因为你要求队列中元素的最值嘛，所以元素当然得是有大小之分（可比较）的。

我们原先的简陋实现包含了 `max` 方法的实现，其原理是在底层维护了一个队列 `maxq`，维护这个队列中从尾部到头部的元素单调递增。

▶ 引用本文的题目

安装 我的 Chrome 刷题插件 点开下列题目可直接查看解题思路：

LeetCode	力扣
1425. Constrained Subsequence Sum	1425. 带限制的子序列和
1438. Longest Continuous Subarray With Absolute Diff Less Than or Equal to Limit	1438. 绝对差不超过限制的最长连续子数组
1696. Jump Game VI	1696. 跳跃游戏 VI
862. Shortest Subarray with Sum at Least K	862. 和至少为 K 的最短子数组
918. Maximum Sum Circular Subarray	918. 环形子数组的最大和

▶ 引用本文的文章

- 单调队列结构解决滑动窗口问题

————————————————

本文为网站会员内容，请 点这里 查看。

一道数组去重的算法题把我整不会了

Stars 123k 精品课程 查看 知乎 @labuladong B站 @labuladong

学算法认准 labuladong，致力于把算法讲清楚！网页版 点这里。

读完本文，你不仅学会了算法套路，还可以顺便解决如下题目：

LeetCode	力扣	难度
1081. Smallest Subsequence of Distinct Characters	1081. 不同字符的最小子序列	🟠
316. Remove Duplicate Letters	316. 去除重复字母	🟠

关于去重算法，应该没什么难度，往哈希集合里面塞不就行了么？

最多给你加点限制，问你怎么给有序数组原地去重，这个我们前文 双指针技巧秒杀七道数组题目 讲过。

本文讲的问题应该是去重相关算法中难度最大的了，把这个问题搞懂，就再也不用怕数组去重问题了。

这是力扣第 316 题「去除重复字母」，题目如下：

▼ 316. 去除重复字母 Leetcode | 力扣

给你一个字符串 `s` ，请你去除字符串中重复的字母，使得每个字母只出现一次。需保证 **返回结果的字典序最小**（要求不能打乱其他字符的相对位置）。

示例 1：

```
输入：s = "bcabc"
输出："abc"
```

示例 2：

```
输入：s = "cbacdcbc"
输出："acdb"
```

提示：

- $1 <= s.length <= 10^4$

- `s` 由小写英文字母组成

注意：该题与 1081 https://leetcode-cn.com/problems/smallest-subsequence-of-distinct-characters 相同

这道题和第 1081 题「不同字符的最小子序列」的解法是完全相同的，你可以把这道题的解法代码直接粘过去把 1081 题也干掉。

题目的要求总结出来有三点：

要求一、**要去重**。

要求二、去重字符串中的字符顺序**不能打乱 `s` 中字符出现的相对顺序**。

要求三、在所有符合上一条要求的去重字符串中，**字典序最小**的作为最终结果。

上述三条要求中，要求三可能有点难理解，举个例子。

比如说输入字符串 `s = "babc"`，去重且符合相对位置的字符串有两个，分别是 `"bac"` 和 `"abc"`，但是我们的算法得返回 `"abc"`，因为它的字典序更小。

按理说，如果我们想要有序的结果，那就得对原字符串排序对吧，但是排序后就不能保证符合 `s` 中字符出现顺序了，这似乎是矛盾的。

其实这里会借鉴前文 单调栈解题框架 中讲到的「单调栈」的思路，没看过也无妨，等会你就明白了。

如果你有高质量的问题，可以 点击这里 进入本文的讨论区。

▶ **引用本文的文章**

- 数据结构设计：最大栈

————————————————

本文为网站会员内容，请 点这里 查看。

1.4 数据结构设计

数据结构设计题主要就是给你提需求，让你实现 API，而且要求这些 API 的复杂度尽可能低。

根据我的经验，设计题中哈希表的出现频率很高，一般都是各类其他数据结构和哈希表组合，从而改善这些基本数据结构的特性，获得「超能力」。

公众号标签：数据结构设计

名称	最新版本号	详情
PDF 教材	V5.2	下载
刷题打卡挑战	开放报名	报名
网站会员	V已上线	购买
Chrome 刷题插件	V4.4.3	使用手册
vscode 刷题插件	V1.5.4	使用手册
JetBrains IDE 刷题插件	V1.8.6	使用手册

算法就像搭乐高：带你手撸 LRU 算法

Stars 123k 精品课程 查看 知乎 @labuladong B站 @labuladong

微信搜一搜 labuladong公众号

学算法认准 labuladong，致力于把算法讲清楚！网页版 点这里。

读完本文，你不仅学会了算法套路，还可以顺便解决如下题目：

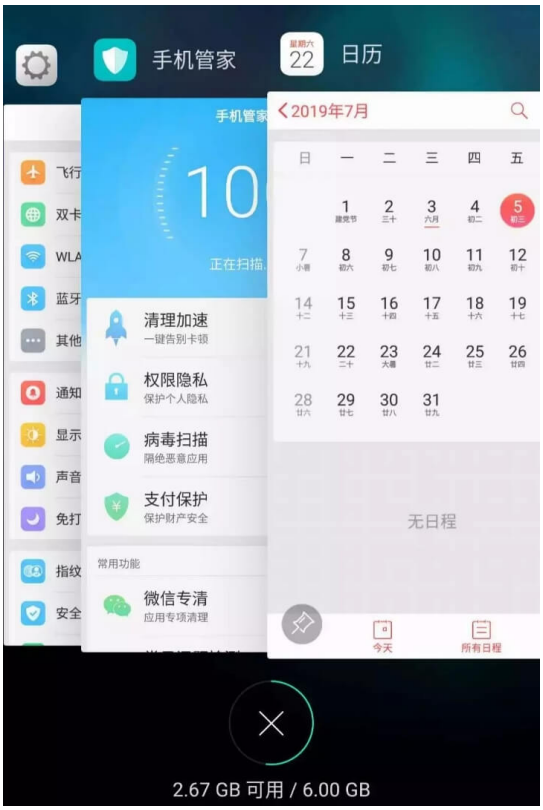
LeetCode	力扣	难度
146. LRU Cache	146. LRU 缓存	🟠
-	剑指 Offer II 031. 最近最少使用缓存	🟠

LRU 算法就是一种缓存淘汰策略，原理不难，但是面试中写出没有 bug 的算法比较有技巧，需要对数据结构进行层层抽象和拆解，本文就带你写一手漂亮的代码。

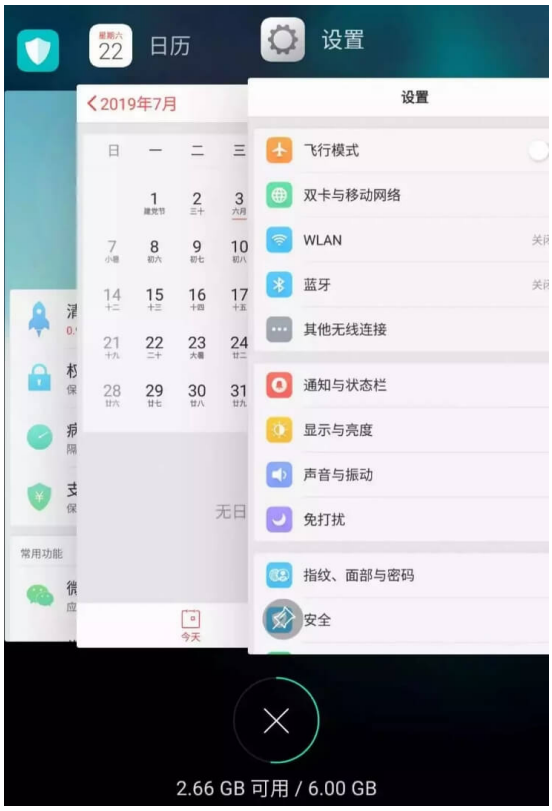
计算机的缓存容量有限，如果缓存满了就要删除一些内容，给新内容腾位置。但问题是，删除哪些内容呢？我们肯定希望删掉哪些没什么用的缓存，而把有用的数据继续留在缓存里，方便之后继续使用。那么，什么样的数据，我们判定为「有用的」的数据呢？

LRU 缓存淘汰算法就是一种常用策略。LRU 的全称是 Least Recently Used，也就是说我们认为最近使用过的数据应该是是「有用的」，很久都没用过的数据应该是无用的，内存满了就优先删那些很久没用过的数据。

举个简单的例子，安卓手机都可以把软件放到后台运行，比如我先后打开了「设置」「手机管家」「日历」，那么现在他们在后台排列的顺序是这样的：

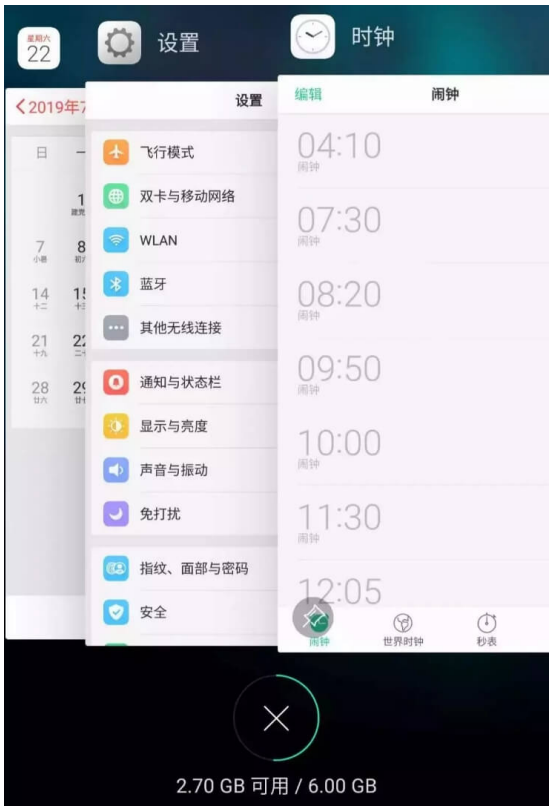


但是这时候如果我访问了一下「设置」界面，那么「设置」就会被提前到第一个，变成这样：



假设我的手机只允许我同时开 3 个应用程序，现在已经满了。那么如果我新开了一个应用「时钟」，就必须关闭一个应用为「时钟」腾出一个位置，关那个呢？

按照 LRU 的策略，就关最底下的「手机管家」，因为那是最久未使用的，然后把新开的应用放到最上面：



现在你应该理解 LRU（Least Recently Used）策略了。当然还有其他缓存淘汰策略，比如不要按访问的时序来淘汰，而是按访问频率（LFU 策略）来淘汰等等，各有应用场景。本文讲解 LRU 算法策略，我会在 LFU 算法详解 中讲解 LFU 算法。

一、LRU 算法描述

力扣第 146 题「LRU缓存机制」就是让你设计数据结构：

首先要接收一个 `capacity` 参数作为缓存的最大容量，然后实现两个 API，一个是 `put(key, val)` 方法存入键值对，另一个是 `get(key)` 方法获取 `key` 对应的 `val`，如果 `key` 不存在则返回 -1。

注意哦，`get` 和 `put` 方法必须都是 `O(1)` 的时间复杂度，我们举个具体例子来看看 LRU 算法怎么工作。

```
/* 缓存容量为 2 */
LRUCache cache = new LRUCache(2);
// 你可以把 cache 理解成一个队列
// 假设左边是队头，右边是队尾
// 最近使用的排在队头，久未使用的排在队尾
// 圆括号表示键值对 (key, val)

cache.put(1, 1);
// cache = [(1, 1)]

cache.put(2, 2);
// cache = [(2, 2), (1, 1)]

cache.get(1);       // 返回 1
// cache = [(1, 1), (2, 2)]
// 解释：因为最近访问了键 1，所以提前至队头
// 返回键 1 对应的值 1
```

```
cache.put(3, 3);
// cache = [(3, 3), (1, 1)]
// 解释：缓存容量已满，需要删除内容空出位置
// 优先删除久未使用的数据，也就是队尾的数据
// 然后把新的数据插入队头

cache.get(2);       // 返回 -1（未找到）
// cache = [(3, 3), (1, 1)]
// 解释：cache 中不存在键为 2 的数据

cache.put(1, 4);
// cache = [(1, 4), (3, 3)]
// 解释：键 1 已存在，把原始值 1 覆盖为 4
// 不要忘了也要将键值对提前到队头
```

二、LRU 算法设计

分析上面的操作过程，要让 `put` 和 `get` 方法的时间复杂度为 O(1)，我们可以总结出 `cache` 这个数据结构必要的条件：

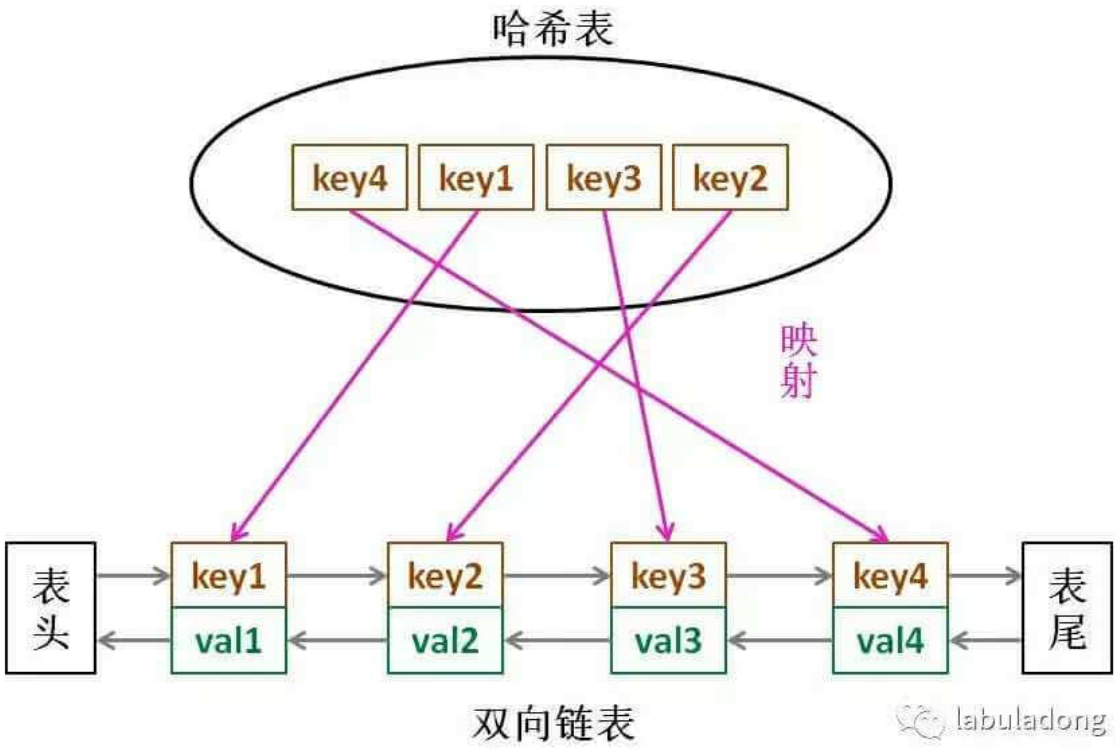
1、显然 `cache` 中的元素必须有时序，以区分最近使用的和久未使用的数据，当容量满了之后要删除最久未使用的那个元素腾位置。

2、我们要在 `cache` 中快速找某个 `key` 是否已存在并得到对应的 `val`；

3、每次访问 `cache` 中的某个 `key`，需要将这个元素变为最近使用的，也就是说 `cache` 要支持在任意位置快速插入和删除元素。

那么，什么数据结构同时符合上述条件呢？哈希表查找快，但是数据无固定顺序；链表有顺序之分，插入删除快，但是查找慢。所以结合一下，形成一种新的数据结构：哈希链表 `LinkedHashMap`。

LRU 缓存算法的核心数据结构就是哈希链表，双向链表和哈希表的结合体。这个数据结构长这样：



借助这个结构，我们来逐一分析上面的 3 个条件：

1、如果我们每次默认从链表尾部添加元素，那么显然越靠尾部的元素就是最近使用的，越靠头部的元素就是最久未使用的。

2、对于某一个 `key`，我们可以通过哈希表快速定位到链表中的节点，从而取得对应 `val`。

3、链表显然是支持在任意位置快速插入和删除的，改改指针就行。只不过传统的链表无法按照索引快速访问某一个位置的元素，而这里借助哈希表，可以通过 `key` 快速映射到任意一个链表节点，然后进行插入和删除。

也许读者会问，为什么要是双向链表，单链表行不行？另外，既然哈希表中已经存了 `key`，为什么链表中还要存 `key` 和 `val` 呢，只存 `val` 不就行了？

想的时候都是问题，只有做的时候才有答案。这样设计的原因，必须等我们亲自实现 LRU 算法之后才能理解，所以我们开始看代码吧～

三、代码实现

很多编程语言都有内置的哈希链表或者类似 LRU 功能的库函数，但是为了帮大家理解算法的细节，我们先自己造轮子实现一遍 LRU 算法，然后再使用 Java 内置的 `LinkedHashMap` 来实现一遍。

首先，我们把双链表的节点类写出来，为了简化，`key` 和 `val` 都认为是 int 类型：

```
class Node {
    public int key, val;
    public Node next, prev;
    public Node(int k, int v) {
        this.key = k;
        this.val = v;
```

```
    }
}
```

然后依靠我们的 Node 类型构建一个双链表，实现几个 LRU 算法必须的 API：

```
class DoubleList {
    // 头尾虚节点
    private Node head, tail;
    // 链表元素数
    private int size;

    public DoubleList() {
        // 初始化双向链表的数据
        head = new Node(0, 0);
        tail = new Node(0, 0);
        head.next = tail;
        tail.prev = head;
        size = 0;
    }

    // 在链表尾部添加节点 x，时间 O(1)
    public void addLast(Node x) {
        x.prev = tail.prev;
        x.next = tail;
        tail.prev.next = x;
        tail.prev = x;
        size++;
    }

    // 删除链表中的 x 节点（x 一定存在）
    // 由于是双链表且给的是目标 Node 节点，时间 O(1)
    public void remove(Node x) {
        x.prev.next = x.next;
        x.next.prev = x.prev;
        size--;
    }

    // 删除链表中第一个节点，并返回该节点，时间 O(1)
    public Node removeFirst() {
        if (head.next == tail)
            return null;
        Node first = head.next;
        remove(first);
        return first;
    }

    // 返回链表长度，时间 O(1)
    public int size() { return size; }

}
```

到这里就能回答刚才「为什么必须要用双向链表」的问题了，因为我们需要删除操作。删除一个节点不光要得到该节点本身的指针，也需要操作其前驱节点的指针，而双向链表才能支持直接查找前驱，保证操作的时间复杂度 O(1)。

注意我们实现的双链表 API 只能从尾部插入，也就是说靠尾部的数据是最近使用的，靠头部的数据是最久未使用的。

有了双向链表的实现，我们只需要在 LRU 算法中把它和哈希表结合起来即可，先搭出代码框架：

```
class LRUCache {
    // key -> Node(key, val)
    private HashMap<Integer, Node> map;
    // Node(k1, v1) <-> Node(k2, v2)...
    private DoubleList cache;
    // 最大容量
    private int cap;

    public LRUCache(int capacity) {
        this.cap = capacity;
        map = new HashMap<>();
        cache = new DoubleList();
    }
```

先不慌去实现 LRU 算法的 `get` 和 `put` 方法。由于我们要同时维护一个双链表 `cache` 和一个哈希表 `map`，很容易漏掉一些操作，比如说删除某个 `key` 时，在 `cache` 中删除了对应的 `Node`，但是却忘记在 `map` 中删除 `key`。

解决这种问题的有效方法是：在这两种数据结构之上提供一层抽象 API。

说的有点玄幻，实际上很简单，就是尽量让 LRU 的主方法 `get` 和 `put` 避免直接操作 `map` 和 `cache` 的细节。我们可以先实现下面几个函数：

```
class LRUCache {
    // 为了节约篇幅，省略上文给出的代码部分...

    /* 将某个 key 提升为最近使用的 */
    private void makeRecently(int key) {
        Node x = map.get(key);
        // 先从链表中删除这个节点
        cache.remove(x);
        // 重新插到队尾
        cache.addLast(x);
    }

    /* 添加最近使用的元素 */
    private void addRecently(int key, int val) {
        Node x = new Node(key, val);
        // 链表尾部就是最近使用的元素
        cache.addLast(x);
        // 别忘了在 map 中添加 key 的映射
```

```
        map.put(key, x);
    }

    /* 删除某一个 key */
    private void deleteKey(int key) {
        Node x = map.get(key);
        // 从链表中删除
        cache.remove(x);
        // 从 map 中删除
        map.remove(key);
    }

    /* 删除最久未使用的元素 */
    private void removeLeastRecently() {
        // 链表头部的第一个元素就是最久未使用的
        Node deletedNode = cache.removeFirst();
        // 同时别忘了从 map 中删除它的 key
        int deletedKey = deletedNode.key;
        map.remove(deletedKey);
    }
}
```

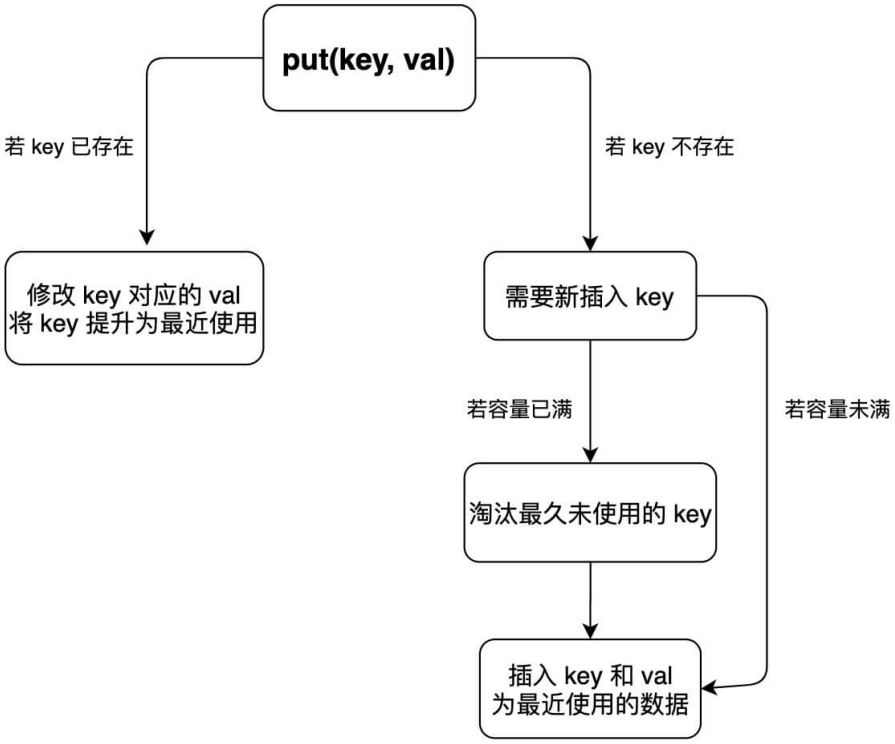
这里就能回答之前的问答题「为什么要在链表中同时存储 key 和 val，而不是只存储 val」，注意 `removeLeastRecently` 函数中，我们需要用 `deletedNode` 得到 `deletedKey`。

也就是说，当缓存容量已满，我们不仅仅要删除最后一个 `Node` 节点，还要把 `map` 中映射到该节点的 `key` 同时删除，而这个 `key` 只能由 `Node` 得到。如果 `Node` 结构中只存储 `val`，那么我们就无法得知 `key` 是什么，就无法删除 `map` 中的键，造成错误。

上述方法就是简单的操作封装，调用这些函数可以避免直接操作 `cache` 链表和 `map` 哈希表，下面我先来实现 LRU 算法的 `get` 方法：

```
class LRUCache {
    // 为了节约篇幅，省略上文给出的代码部分...

    public int get(int key) {
        if (!map.containsKey(key)) {
            return -1;
        }
        // 将该数据提升为最近使用的
        makeRecently(key);
        return map.get(key).val;
    }
}
```

`put` 方法稍微复杂一些，我们先来画个图搞清楚它的逻辑：



这样我们可以轻松写出 `put` 方法的代码：

```
class LRUCache {
    // 为了节约篇幅，省略上文给出的代码部分...

    public void put(int key, int val) {
        if (map.containsKey(key)) {
            // 删除旧的数据
            deleteKey(key);
            // 新插入的数据为最近使用的数据
            addRecently(key, val);
            return;
        }

        if (cap == cache.size()) {
            // 删除最久未使用的元素
            removeLeastRecently();
        }
        // 添加为最近使用的元素
        addRecently(key, val);
    }
}
```

至此，你应该已经完全掌握 LRU 算法的原理和实现了，我们最后用 Java 的内置类型 `LinkedHashMap` 来实现 LRU 算法，逻辑和之前完全一致，我就不过多解释了：

```
class LRUCache {
    int cap;
```

```
    LinkedHashMap<Integer, Integer> cache = new LinkedHashMap<>();
    public LRUCache(int capacity) {
        this.cap = capacity;
    }

    public int get(int key) {
        if (!cache.containsKey(key)) {
            return -1;
        }
        // 将 key 变为最近使用
        makeRecently(key);
        return cache.get(key);
    }

    public void put(int key, int val) {
        if (cache.containsKey(key)) {
            // 修改 key 的值
            cache.put(key, val);
            // 将 key 变为最近使用
            makeRecently(key);
            return;
        }

        if (cache.size() >= this.cap) {
            // 链表头部就是最久未使用的 key
            int oldestKey = cache.keySet().iterator().next();
            cache.remove(oldestKey);
        }
        // 将新的 key 添加链表尾部
        cache.put(key, val);
    }

    private void makeRecently(int key) {
        int val = cache.get(key);
        // 删除 key，重新插入到队尾
        cache.remove(key);
        cache.put(key, val);
    }
}
```

至此，LRU 算法就没有什么神秘的了。更多数据结构设计相关的题目参见 数据结构设计经典习题。

接下来可阅读：

- 手把手带你实现 LFU 算法

如果你有高质量的问题，可以 点击这里 进入本文的讨论区。

▶ **引用本文的题目**

安装 我的 Chrome 刷题插件 点开下列题目可直接查看解题思路：

LeetCode	力扣
-	剑指 Offer II 031. 最近最少使用缓存

▶ 引用本文的文章

- 一文读懂 session 和 cookie
- 常数时间删除/查找数组中的任意元素
- 数据结构设计：最大栈
- 算法就像搭乐高：带你手撸 LFU 算法
- 算法笔试「骗分」套路

——————————————

更多精品课程可查看 我的网站；扫码查看更多配套学习套件：

算法就像搭乐高：带你手撸 LFU 算法

Stars 123k 精品课程 查看 知乎 @labuladong B站 @labuladong

学算法认准 labuladong，致力于把算法讲清楚！网页版 点这里。

读完本文，你不仅学会了算法套路，还可以顺便解决如下题目：

LeetCode	力扣	难度
460. LFU Cache	460. LFU 缓存	🔴

上篇文章 带你手写LRU算法 写了 LRU 缓存淘汰算法的实现方法，本文来写另一个著名的缓存淘汰算法：LFU 算法。

LRU 算法的淘汰策略是 Least Recently Used，也就是每次淘汰那些最久没被使用的数据；而 LFU 算法的淘汰策略是 Least Frequently Used，也就是每次淘汰那些使用次数最少的数据。

LRU 算法的核心数据结构是使用哈希链表 `LinkedHashMap`，首先借助链表的有序性使得链表元素维持插入顺序，同时借助哈希映射的快速访问能力使得我们可以在 O(1) 时间访问链表的任意元素。

从实现难度上来说，LFU 算法的难度大于 LRU 算法，因为 LRU 算法相当于把数据按照时间排序，这个需求借助链表很自然就能实现，你一直从链表头部加入元素的话，越靠近头部的元素就是新的数据，越靠近尾部的元素就是旧的数据，我们进行缓存淘汰的时候只要简单地将尾部的元素淘汰掉就行了。

而 LFU 算法相当于是把数据按照访问频次进行排序，这个需求恐怕没有那么简单，而且还有一种情况，如果多个数据拥有相同的访问频次，我们就得删除最早插入的那个数据。也就是说 LFU 算法是淘汰访问频次最低的数据，如果访问频次最低的数据有多条，需要淘汰最旧的数据。

所以说 LFU 算法是要复杂很多的，而且经常出现在面试中，因为 LFU 缓存淘汰算法在工程实践中经常使用，也有可能是因为 LRU 算法太简单了。**不过话说回来，这种著名的算法的套路都是固定的，关键是由于逻辑较复杂，不容易写出漂亮且没有 bug 的代码。**

那么本文我就带你拆解 LFU 算法，自顶向下，逐步求精，就是解决复杂问题的不二法门。

一、算法描述

要求你写一个类，接受一个 `capacity` 参数，实现 `get` 和 `put` 方法：

```
class LFUCache {
    // 构造容量为 capacity 的缓存
    public LFUCache(int capacity) {}
```

```
    // 在缓存中查询 key
    public int get(int key) {}
    // 将 key 和 val 存入缓存
    public void put(int key, int val) {}
}
```

`get(key)` 方法会去缓存中查询键 `key`，如果 `key` 存在，则返回 `key` 对应的 `val`，否则返回 -1。

`put(key, value)` 方法插入或修改缓存。如果 `key` 已存在，则将它对应的值改为 `val`；如果 `key` 不存在，则插入键值对 `(key, val)`。

当缓存达到容量 `capacity` 时，则应该在插入新的键值对之前，删除使用频次（后文用 `freq` 表示）最低的键值对。如果 `freq` 最低的键值对有多个，则删除其中最旧的那个。

```
// 构造一个容量为 2 的 LFU 缓存
LFUCache cache = new LFUCache(2);

// 插入两对 (key, val)，对应的 freq 为 1
cache.put(1, 10);
cache.put(2, 20);

// 查询 key 为 1 对应的 val
// 返回 10，同时键 1 对应的 freq 变为 2
cache.get(1);

// 容量已满，淘汰 freq 最小的键 2
// 插入键值对 (3, 30)，对应的 freq 为 1
cache.put(3, 30);

// 键 2 已经被淘汰删除，返回 -1
cache.get(2);
```

二、思路分析

一定先从最简单的开始，根据 LFU 算法的逻辑，我们先列举出算法执行过程中的几个显而易见的事实：

1、调用 `get(key)` 方法时，要返回该 `key` 对应的 `val`。

2、只要用 `get` 或者 `put` 方法访问一次某个 `key`，该 `key` 的 `freq` 就要加一。

3、如果在容量满了的时候进行插入，则需要将 `freq` 最小的 `key` 删除，如果最小的 `freq` 对应多个 `key`，则删除其中最旧的那一个。

好的，我们希望能够在 O(1) 的时间内解决这些需求，可以使用基本数据结构来逐个击破：

1、使用一个 `HashMap` 存储 `key` 到 `val` 的映射，就可以快速计算 `get(key)`。

```
HashMap<Integer, Integer> keyToVal;
```

2、使用一个 HashMap 存储 key 到 freq 的映射，就可以快速操作 key 对应的 freq。

```
HashMap<Integer, Integer> keyToFreq;
```

3、这个需求应该是 LFU 算法的核心，所以我们分开说：

如果你有高质量的问题，可以 点击这里 进入本文的讨论区。

▶ 引用本文的文章

- 常数时间删除/查找数组中的任意元素
- 数据结构设计：最大栈
- 算法就像搭乐高：带你手撸 LRU 算法

——————————————————

本文为网站会员内容，请 点这里 查看。

【强化练习】哈希表更多习题

哈希表在算法题中是常考的数据结构，主要出现在数据结构的设计题，或者配合数组、字符串等结构进行考察（比如之前的 前缀和习题），这里列出一些常见的哈希表考题。

———————————————————

本文为网站会员内容，请 点这里 查看。

给我常数时间，我可以删除/查找数组中的任意元素

Stars 123k 精品课程 查看 知乎 @labuladong B站 @labuladong

学算法认准 labuladong，致力于把算法讲清楚！网页版 点这里。

读完本文，你不仅学会了算法套路，还可以顺便解决如下题目：

LeetCode	力扣	难度
380. Insert Delete GetRandom O(1)	380. O(1) 时间插入、删除和获取随机元素	🟠
710. Random Pick with Blacklist	710. 黑名单中的随机数	🔴
-	剑指 Offer II 030. 插入、删除和随机访问都是 O(1) 的容器	🟠

本文讲两道比较有技巧性的数据结构设计题，都是和随机读取元素相关的，我在前文 谈谈游戏中的随机算法 也写过类似的问题。

这些问题的一个技巧点在于，如何结合哈希表和数组，使得数组的删除操作时间复杂度也变成 O(1)？下面来一道道看。

实现随机集合

这是力扣第 380 题「常数时间插入、删除和获取随机元素」，看下题目：

▼ 380. O(1) 时间插入、删除和获取随机元素 Leetcode | 力扣

实现`RandomizedSet` 类：

- `RandomizedSet()` 初始化 `RandomizedSet` 对象
- `bool insert(int val)` 当元素 `val` 不存在时，向集合中插入该项，并返回 `true` ；否则，返回 `false` 。
- `bool remove(int val)` 当元素 `val` 存在时，从集合中移除该项，并返回 `true` ；否则，返回 `false` 。
- `int getRandom()` 随机返回现有集合中的一项（测试用例保证调用此方法时集合中至少存在一个元素）。每个元素应该有 **相同的概率** 被返回。

你必须实现类的所有函数，并满足每个函数的 **平均** 时间复杂度为 `O(1)` 。

示例：

输入
["RandomizedSet", "insert", "remove", "insert", "getRandom", "remove", "insert", "getRandom"]
[[], [1], [2], [2], [], [1], [2], []]
输出
[null, true, false, true, 2, true, false, 2]

解释
RandomizedSet randomizedSet = new RandomizedSet();
randomizedSet.insert(1); // 向集合中插入 1 。返回 true 表示 1 被成功地插入。
randomizedSet.remove(2); // 返回 false ，表示集合中不存在 2 。
randomizedSet.insert(2); // 向集合中插入 2 。返回 true 。集合现在包含 [1,2] 。
randomizedSet.getRandom(); // getRandom 应随机返回 1 或 2 。
randomizedSet.remove(1); // 从集合中移除 1 ，返回 true 。集合现在包含 [2] 。
randomizedSet.insert(2); // 2 已在集合中，所以返回 false 。
randomizedSet.getRandom(); // 由于 2 是集合中唯一的数字，getRandom 总是返回 2 。

提示：

- $-2^{31} <= val <= 2^{31} - 1$
- 最多调用 insert、remove 和 getRandom 函数 $2 * 10^5$ 次
- 在调用 getRandom 方法时，数据结构中 **至少存在一个** 元素。

就是让我们实现如下一个类：

```
class RandomizedSet {
public:
    /** 如果 val 不存在集合中，则插入并返回 true，否则直接返回 false */
     bool insert(int val) {}

    /** 如果 val 在集合中，则删除并返回 true，否则直接返回 false */
    bool remove(int val) {}

    /** 从集合中等概率地随机获得一个元素 */
    int getRandom() {}
}
```

本题的难点在于两点：

1、插入，删除，获取随机元素这三个操作的时间复杂度必须都是 O(1)。

2、getRandom 方法返回的元素必须等概率返回随机元素，也就是说，如果集合里面有 n 个元素，每个元素被返回的概率必须是 1/n。

我们先来分析一下：对于插入，删除，查找这几个操作，哪种数据结构的时间复杂度是 O(1)？

HashSet 肯定算一个对吧。哈希集合的底层原理就是一个大数组，我们把元素通过哈希函数映射到一个索引上；如果用拉链法解决哈希冲突，那么这个索引可能连着一个链表或者红黑树。

那么请问对于这样一个标准的 HashSet，你能否在 O(1) 的时间内实现 getRandom 函数？

其实是不能的，因为根据刚才说到的底层实现，元素是被哈希函数「分散」到整个数组里面的，更别说还有拉链法等等解决哈希冲突的机制，所以做不到 O(1) 时间「等概率」随机获取元素。

除了 HashSet，还有一些类似的数据结构，比如哈希链表 LinkedHashSet，我们前文 手把手实现LRU算法 和 手把手实现LFU算法 讲过这类数据结构的实现原理，本质上就是哈希表配合双链表，元素存储在双链表中。

但是，LinkedHashSet 只是给 HashSet 增加了有序性，依然无法按要求实现我们的 getRandom 函数，因为底层用链表结构存储元素的话，是无法在 O(1) 的时间内访问某一个元素的。

根据上面的分析，对于 getRandom 方法，如果想「等概率」且「在 O(1) 的时间」取出元素，一定要满足：**底层用数组实现，且数组必须是紧凑的**。

这样我们就可以直接生成随机数作为索引，从数组中取出该随机索引对应的元素，作为随机元素。

但如果用数组存储元素的话，插入，删除的时间复杂度怎么可能是 O(1) 呢？

可以做到！对数组尾部进行插入和删除操作不会涉及数据搬移，时间复杂度是 O(1)。

所以，如果我们想在 O(1) 的时间删除数组中的某一个元素 val，可以先把这个元素交换到数组的尾部，然后再 pop 掉。

交换两个元素必须通过索引进行交换对吧，那么我们需要一个哈希表 valToIndex 来记录每个元素值对应的索引。

有了思路铺垫，我们直接看代码：

```
class RandomizedSet {
public:
    // 存储元素的值
    vector<int> nums;
    // 记录每个元素对应在 nums 中的索引
    unordered_map<int,int> valToIndex;

    bool insert(int val) {
        // 若 val 已存在，不用再插入
        if (valToIndex.count(val)) {
            return false;
        }
        // 若 val 不存在，插入到 nums 尾部，
        // 并记录 val 对应的索引值
        valToIndex[val] = nums.size();
        nums.push_back(val);
        return true;
    }

    bool remove(int val) {
        // 若 val 不存在，不用再删除
        if (!valToIndex.count(val)) {
            return false;
```

```
        }
        // 先拿到 val 的索引
        int index = valToIndex[val];
        // 将最后一个元素对应的索引修改为 index
        valToIndex[nums.back()] = index;
        // 交换 val 和最后一个元素
        swap(nums[index], nums.back());
        // 在数组中删除元素 val
        nums.pop_back();
        // 删除元素 val 对应的索引
        valToIndex.erase(val);
        return true;
    }

    int getRandom() {
        // 随机获取 nums 中的一个元素
        return nums[rand() % nums.size()];
    }
};
```

注意 `remove(val)` 函数，对 `nums` 进行插入、删除、交换时，都要记得修改哈希表 `valToIndex`，否则会出现错误。

至此，这道题就解决了，每个操作的复杂度都是 O(1)，且随机抽取的元素概率是相等的。

避开黑名单的随机数

有了上面一道题的铺垫，我们来看一道更难一些的题目，力扣第 710 题「黑名单中的随机数」，我来描述一下题目：

给你输入一个正整数 `N`，代表左闭右开区间 `[0,N)`，再给你输入一个数组 `blacklist`，其中包含一些「黑名单数字」，且 `blacklist` 中的数字都是区间 `[0,N)` 中的数字。

现在要求你设计如下数据结构：

```
class Solution {
public:
    // 构造函数，输入参数
    Solution(int N, vector<int>& blacklist) {}

    // 在区间 [0,N) 中等概率随机选取一个元素并返回
    // 这个元素不能是 blacklist 中的元素
    int pick() {}
};
```

`pick` 函数会被多次调用，每次调用都要在区间 `[0,N)` 中「等概率随机」返回一个「不在 `blacklist` 中」的整数。

这应该不难理解吧，比如给你输入 `N = 5, blacklist = [1,3]`，那么多次调用 `pick` 函数，会等概率随机返回 0, 2, 4 中的某一个数字。

而且题目要求，在 `pick` 函数中应该尽可能少调用随机数生成函数 `rand()`。

这句话什么意思呢，比如说我们可能想出如下拍脑袋的解法：

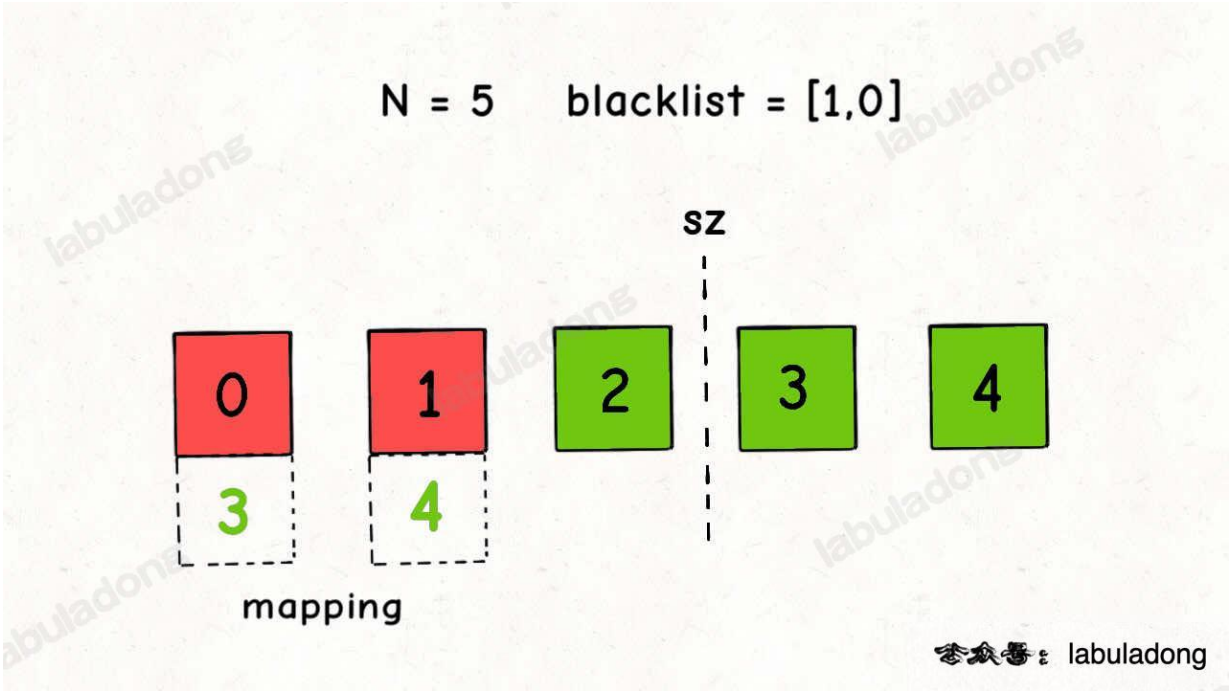
```
int pick() {
    int res = rand() % N;
    while (res exists in blacklist) {
        // 重新随机一个结果
        res = rand() % N;
    }
    return res;
}
```

这个函数会多次调用 `rand()` 函数，执行效率竟然和随机数相关，不是一个漂亮的解法。

聪明的解法类似上一道题，我们可以将区间 `[0,N)` 看做一个数组，然后将 `blacklist` 中的元素移到数组的最末尾，同时用一个哈希表进行映射：

根据这个思路，我们可以写出第一版代码（还存在几处错误）：

```
class Solution {
public:
    int sz;
    unordered_map<int, int> mapping;

    Solution(int N, vector<int>& blacklist) {
        // 最终数组中的元素个数
        sz = N - blacklist.size();
        // 最后一个元素的索引
        int last = N - 1;
        // 将黑名单中的索引换到最后去
        for (int b : blacklist) {
            mapping[b] = last;
            last--;
        }
    }

    // 后文实现
    int pick() {}
};
```



如上图，相当于把黑名单中的数字都交换到了区间 `[sz, N)` 中，同时把 `[0, sz)` 中的黑名单数字映射到了正常数字。

根据这个逻辑，我们可以写出 `pick` 函数：

```
int pick() {
    // 随机选取一个索引
    int index = rand() % sz;
    // 这个索引命中了黑名单，
    // 需要被映射到其他位置
    if (mapping.count(index)) {
        return mapping[index];
    }
    // 若没命中黑名单，则直接返回
    return index;
}
```

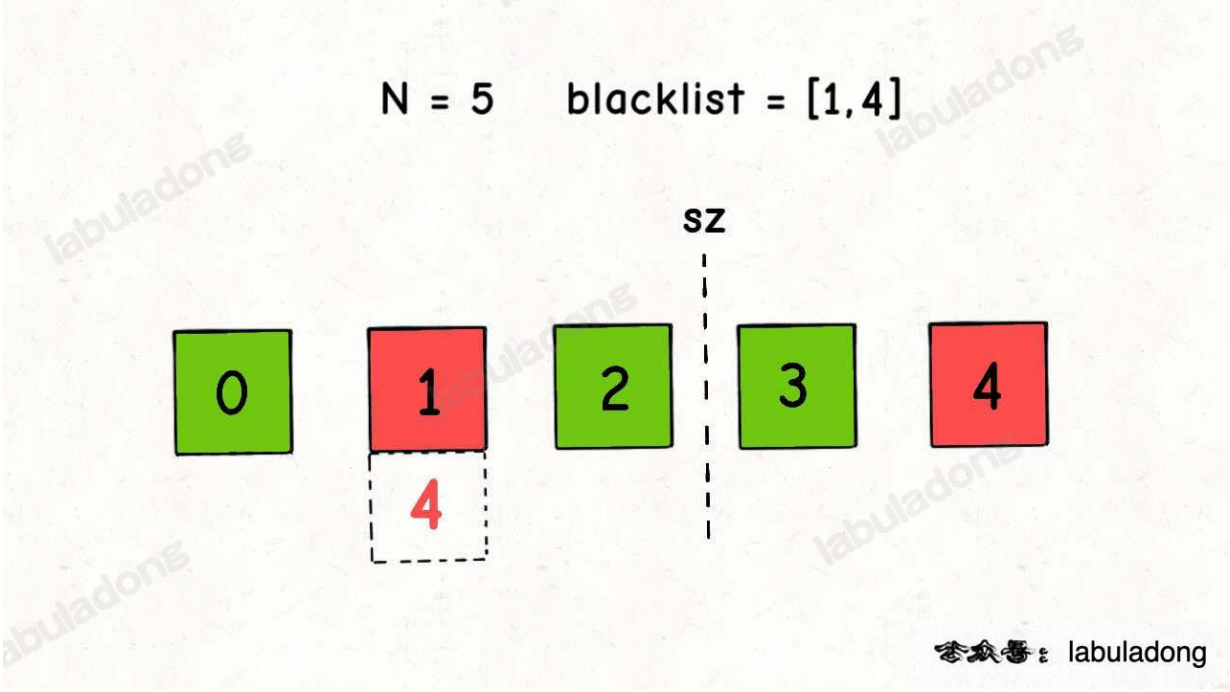
这个 `pick` 函数已经没有问题了，但是构造函数还有两个问题。

第一个问题，如下这段代码：

```
int last = N - 1;
// 将黑名单中的索引换到最后去
for (int b : blacklist) {
    mapping[b] = last;
    last--;
}
```

我们将黑名单中的 `b` 映射到 `last`，但是我们能确定 `last` 不在 `blacklist` 中吗？

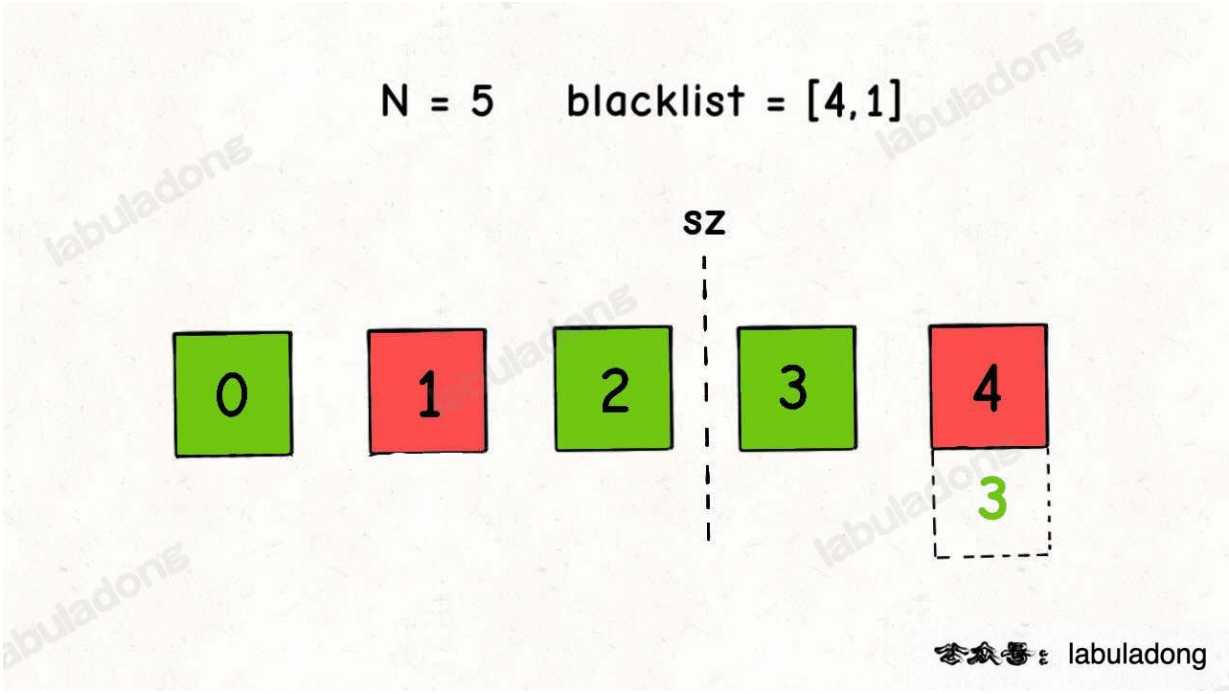
比如下图这种情况，我们的预期应该是 1 映射到 3，但是错误地映射到 4：



在对 `mapping[b]` 赋值时，要保证 `last` 一定不在 `blacklist` 中，可以如下操作：

```
// 构造函数
Solution(int N, vector<int>& blacklist) {
    sz = N - blacklist.size();
    // 先将所有黑名单数字加入 map
    for (int b : blacklist) {
        // 这里赋值多少都可以
        // 目的仅仅是把键存进哈希表
        // 方便快速判断数字是否在黑名单内
        mapping[b] = 666;
    }

    int last = N - 1;
    for (int b : blacklist) {
        // 跳过所有黑名单中的数字
        while (mapping.count(last)) {
            last--;
        }
        // 将黑名单中的索引映射到合法数字
        mapping[b] = last;
        last--;
    }
}
```

第二个问题，如果 `blacklist` 中的黑名单数字本身就存在区间 `[sz, N)` 中，那么就没必要在 `mapping` 中建立映射，比如这种情况：



我们根本不用管 4，只希望把 1 映射到 3，但是按照 `blacklist` 的顺序，会把 4 映射到 3，显然是错误的。

我们可以稍微修改一下，写出正确的解法代码：

```
class Solution {
public:
    int sz;
    unordered_map<int, int> mapping;

    Solution(int N, vector<int>& blacklist) {
        sz = N - blacklist.size();
        for (int b : blacklist) {
            mapping[b] = 666;
        }

        int last = N - 1;
        for (int b : blacklist) {
            // 如果 b 已经在区间 [sz, N)
            // 可以直接忽略
            if (b >= sz) {
                continue;
            }
            while (mapping.count(last)) {
                last--;
            }
            mapping[b] = last;
            last--;
        }
    }

    int pick() {
        // 随机选取一个索引
        int index = rand() % sz;
```

```
            // 这个索引命中了黑名单，
            // 需要被映射到其他位置
            if (mapping.count(index)) {
                return mapping[index];
            }
            // 若没命中黑名单，则直接返回
            return index;
        }
    };
```

至此，这道题也解决了，总结一下本文的核心思想：

1、如果想高效地，等概率地随机获取元素，就要使用数组作为底层容器。

2、如果要保持数组元素的紧凑性，可以把待删除元素换到最后，然后 pop 掉末尾的元素，这样时间复杂度就是 O(1) 了。当然，我们需要额外的哈希表记录值到索引的映射。

3、对于第二题，数组中含有「空洞」（黑名单数字），也可以利用哈希表巧妙处理映射关系，让数组在逻辑上是紧凑的，方便随机取元素。

本文就到这里，更多数据结构设计相关的题目参见 数据结构设计经典习题。

如果你有高质量的问题，可以 点击这里 进入本文的讨论区。

▶ 引用本文的题目

安装 我的 Chrome 刷题插件 点开下列题目可直接查看解题思路：

LeetCode	力扣
519. Random Flip Matrix	519. 随机翻转矩阵
-	剑指 Offer II 030. 插入、删除和随机访问都是 O(1) 的容器

▶ 引用本文的文章

- 带权重的随机选择算法
- 谈谈游戏中的随机算法

——————————————

更多精品课程可查看 我的网站；扫码查看更多配套学习套件：

算法学习网站：https://labuladong.gitee.io/algo/ 或 https://labuladong.github.io/algo/

二维码太多，长按识别不到？放大图片 -> 让对应二维码充满屏幕 -> 长按识别该二维码

一道求中位数的算法题把我整不会了

Stars 123k 精品课程 查看 知乎 @labuladong B站 @labuladong

微信搜一搜 labuladong公众号

学算法认准 labuladong，致力于把算法讲清楚！网页版 点这里。

读完本文，你不仅学会了算法套路，还可以顺便解决如下题目：

LeetCode	力扣	难度
295. Find Median from Data Stream	295. 数据流的中位数	🔴
-	剑指 Offer 41. 数据流中的中位数	🔴

如果输入一个数组，让你求中位数，这个好办，排个序，如果数组长度是奇数，最中间的一个元素就是中位数，如果数组长度是偶数，最中间两个元素的平均数作为中位数。

如果数据规模非常巨大，排序不太现实，那么也可以使用概率算法，随机抽取一部分数据，排序，求中位数，作为所有数据的中位数。

本文说的中位数算法比较困难，也比较精妙，是力扣第 295 题「数据流的中位数」：

▼ 295. 数据流的中位数 Leetcode | 力扣

中位数是有序整数列表中的中间值。如果列表的大小是偶数，则没有中间值，中位数是两个中间值的平均值。

- 例如 `arr = [2,3,4]` 的中位数是 `3` 。
- 例如 `arr = [2,3]` 的中位数是 `(2 + 3) / 2 = 2.5` 。

实现 MedianFinder 类:

- `MedianFinder()` 初始化 `MedianFinder` 对象。
- `void addNum(int num)` 将数据流中的整数 `num` 添加到数据结构中。
- `double findMedian()` 返回到目前为止所有元素的中位数。与实际答案相差 10^{-5} 以内的答案将被接受。

示例 1：

输入

```
["MedianFinder", "addNum", "addNum", "findMedian", "addNum", "findMedian"]
[[], [1], [2], [], [3], []]
```

输出
```
[null, null, null, 1.5, null, 2.0]
```

解释
```
MedianFinder medianFinder = new MedianFinder();
medianFinder.addNum(1);    // arr = [1]
medianFinder.addNum(2);    // arr = [1, 2]
medianFinder.findMedian(); // 返回 1.5 ((1 + 2) / 2)
medianFinder.addNum(3);    // arr[1, 2, 3]
medianFinder.findMedian(); // return 2.0
```

提示:

- $-10^5 <= num <= 10^5$
- 在调用 findMedian 之前，数据结构中至少有一个元素
- 最多 $5 * 10^4$ 次调用 addNum 和 findMedian

就是让你设计这样一个类：

```
class MedianFinder {

    // 添加一个数字
    public void addNum(int num) {}

    // 计算当前添加的所有数字的中位数
    public double findMedian() {}
}
```

其实，所有关于「流」的算法都比较难，比如我在前文 谈谈游戏中的随机算法 写过如何从数据流中等概率随机抽取一个元素，如果说你没有接触过这个问题的话，还是很难想到解法的。

这道题要求在数据流中计算平均数，我们先想一想常规思路。

尝试分析

一个直接的解法可以用一个数组记录所有 addNum 添加进来的数字，通过插入排序的逻辑保证数组中的元素有序，当调用 findMedian 方法时，可以通过数组索引直接计算中位数。

但是用数组作为底层容器的问题也很明显，addNum 搜索插入位置的时候可以用二分搜索算法，但是插入操作需要搬移数据，所以最坏时间复杂度为 O(N)。

那换链表？链表插入元素很快，但是查找插入位置的时候只能线性遍历，最坏时间复杂度还是 O(N)，而且 findMedian 方法也需要遍历寻找中间索引，最坏时间复杂度也是 O(N)。

那么就用平衡二叉树呗，增删查改复杂度都是 O(logN)，这样总行了吧？

比如用 Java 提供的 TreeSet 容器，底层是红黑树，addNum 直接插入，findMedian 可以通过当前元素的个数推出计算中位数的元素的排名。

很遗憾，依然不行，这里有两个问题：

第一，`TreeSet` 是一种 `Set`，其中不存在重复元素的元素，但是我们的数据流可能输入重复数据的，而且计算中位数也是需要算上重复元素的。

第二，`TreeSet` 并没有实现一个通过排名快速计算元素的 API。假设我想找到 `TreeSet` 中第 5 大的元素，并没有一个现成可用的方法实现这个需求。

> 如果让你实现一个在二叉搜索树中通过排名计算对应元素的方法 `select(int index)`，你会怎么设计？你可以思考一下，我会把答案写在留言区置顶。

除了平衡二叉树，还有没有什么常用的数据结构是动态有序的？优先级队列（二叉堆）行不行？

好像也不太行，因为优先级队列是一种受限的数据结构，只能从堆顶添加/删除元素，我们的 `addNum` 方法可以从堆顶插入元素，但是 `findMedian` 函数需要从数据中间取，这个功能优先级队列是没办法提供的。

可以看到，求个中位数还是挺难的，我们使尽浑身解数都没有一个高效地思路，下面直接来看解法吧，比较巧妙。

如果你有高质量的问题，可以 点击这里 进入本文的讨论区。

▶ **引用本文的题目**

安装 我的 Chrome 刷题插件 点开下列题目可直接查看解题思路：

LeetCode	力扣
-	剑指 Offer 41. 数据流中的中位数

▶ **引用本文的文章**

- 东哥带你刷二叉搜索树（特性篇）

————————————————

本文为网站会员内容，请 点这里 查看。

二叉堆详解实现优先级队列

Stars 123k 精品课程 查看 知乎 @labuladong B站 @labuladong

学算法认准 labuladong，致力于把算法讲清楚！网页版 点这里。

二叉堆（Binary Heap）没什么神秘，性质比二叉搜索树 BST 还简单。

其主要操作就两个，`sink`（下沉）和 `swim`（上浮），用以维护二叉堆的性质。其主要应用有两个，首先是一种排序方法「堆排序」，第二是一种很有用的数据结构「优先级队列」。

那么本文以实现优先级队列（Priority Queue）为例，来讲讲一下二叉堆怎么运作的。

一、二叉堆概览

首先，二叉堆和二叉树有啥关系呢，为什么人们总是把二叉堆画成一棵二叉树?

如果你有高质量的问题，可以 点击这里 进入本文的讨论区。

▶ **引用本文的题目**

安装 我的 Chrome 刷题插件 点开下列题目可直接查看解题思路：

LeetCode	力扣
1104. Path In Zigzag Labelled Binary Tree	1104. 二叉树寻路
1845. Seat Reservation Manager	1845. 座位预约管理系统
23. Merge k Sorted Lists	23. 合并K个升序链表
347. Top K Frequent Elements	347. 前 K 个高频元素
451. Sort Characters By Frequency	451. 根据字符出现频率排序
662. Maximum Width of Binary Tree	662. 二叉树最大宽度
692. Top K Frequent Words	692. 前K个高频单词
703. Kth Largest Element in a Stream	703. 数据流中的第 K 大元素
-	剑指 Offer 40. 最小的k个数
-	剑指 Offer II 059. 数据流的第 K 大数值
-	剑指 Offer II 060. 出现频率最高的 k 个数字

LeetCode	力扣
-	剑指 Offer II 078. 合并排序链表

▶ 引用本文的文章

- Dijkstra 算法模板及应用
- 双指针技巧秒杀七道链表题目
- 如何调度考生的座位
- 快速排序详解及应用
- 设计朋友圈时间线功能

———————————————

本文为网站会员内容，请 点这里 查看。

【强化练习】优先级队列经典习题

二叉堆的主要应用是优先级队列，而优先级队列的特色是**动态排序**，插入的元素可以自动维护正确的顺序。当然，后文讲的 二叉搜索树 也可以做到动态排序，优先级队列的限制是只能从队头和队尾操作元素。

一般来说，用到优先级队列的题目主要分两类，一类是合并多个有序链表这类题，另一类是寻找第 k 个最大元素这类题，我们分别来看。

> 先来看第一类，合并有序链表这样的题目。

▶ **引用本文的文章**

- 二叉堆详解实现优先级队列

————————————————

本文为网站会员内容，请 点这里 查看。

如何实现一个计算器

Stars 123k 精品课程 查看 知乎 @labuladong B站 @labuladong

学算法认准 labuladong，致力于把算法讲清楚！网页版 点这里。

读完本文，你不仅学会了算法套路，还可以顺便解决如下题目：

LeetCode	力扣	难度
224. Basic Calculator	224. 基本计算器	🔴
227. Basic Calculator II	227. 基本计算器 II	🟠
772. Basic Calculator III🔒	772. 基本计算器 III🔒	🔴

我们最终要实现的计算器功能如下：

1、输入一个字符串，可以包含 `+ - * /`、数字、括号以及空格，你的算法返回运算结果。

2、要符合运算法则，括号的优先级最高，先乘除后加减。

3、除号是整数除法，无论正负都向 0 取整（5/2=2，-5/2=-2）。

4、可以假定输入的算式一定合法，且计算过程不会出现整型溢出，不会出现除数为 0 的意外情况。

比如输入如下字符串，算法会返回 9：

```
  3 * (2 - 6 / (3 - 7))
= 3 * (2 - 6 / (-4))
= 3 * (2 - (-1))
= 9
```

可以看到，这就已经非常接近我们实际生活中使用的计算器了，虽然我们以前肯定都用过计算器，但是如果简单思考一下其算法实现，就会大惊失色：

1、按照常理处理括号，要先计算最内层的括号，然后向外慢慢化简。这个过程我们手算都容易出错，何况写成算法呢！

2、要做到先乘除，后加减，这一点教会小朋友还不算难，但教给计算机恐怕有点困难。

3、要处理空格。我们为了美观，习惯性在数字和运算符之间打个空格，但是计算之中得想办法忽略这些空格。

我记得很多大学数据结构的教材上，在讲栈这种数据结构的时候，应该都会用计算器举例，但是有一说一，讲的真的垃圾，不知道多少未来的计算机科学家就被这种简单的数据结构劝退了。

那么本文就来聊聊怎么实现上述一个功能完备的计算器功能，**关键在于层层拆解问题，化整为零，逐个击破**，几条简单的算法规则就可以处理极其复杂的运算，相信这种思维方式能帮大家解决各种复杂问题。

下面就来拆解，从最简单的一个问题开始。

一、字符串转整数

是的，就是这么一个简单的问题，首先告诉我，怎么把一个字符串形式的**正**整数，转化成 int 型？

```
string s = "458";

int n = 0;
for (int i = 0; i < s.size(); i++) {
    char c = s[i];
    n = 10 * n + (c - '0');
}
// n 现在就等于 458
```

这个还是很简单的吧，老套路了。但是即便这么简单，依然有坑：**`(c - '0')` 的这个括号不能省略，否则可能造成整型溢出**。

因为变量 `c` 是一个 ASCII 码，如果不加括号就会先加后减，想象一下 `s` 如果接近 INT_MAX，就会溢出。所以用括号保证先减后加才行。

二、处理加减法

现在进一步，**如果输入的这个算式只包含加减法，而且不存在空格**，你怎么计算结果？我们拿字符串算式 `1-12+3` 为例，来说一个很简单的思路：

1、先给第一个数字加一个默认符号 `+`，变成 `+1-12+3`。

2、把一个运算符和数字组合成一对儿，也就是三对儿 `+1`，`-12`，`+3`，把它们转化成数字，然后放到一个栈中。

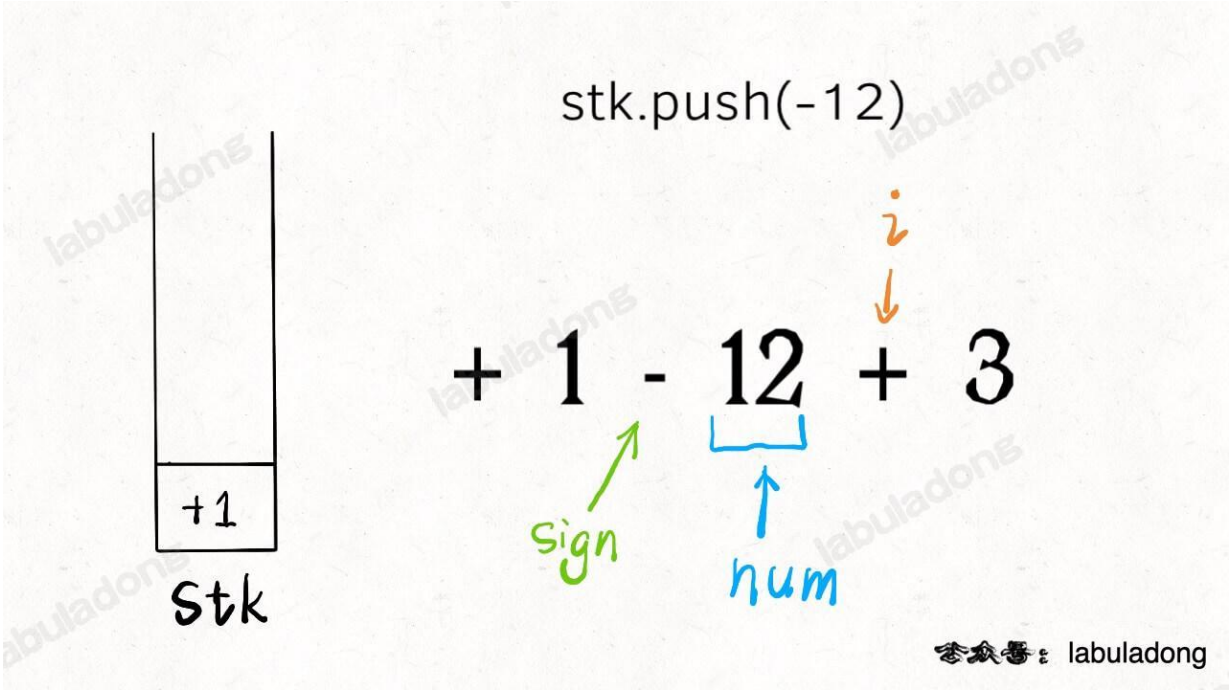
3、将栈中所有的数字求和，就是原算式的结果。

我们直接看代码，结合一张图就看明白了：

```
int calculate(string s) {
    stack<int> stk;
    // 记录算式中的数字
    int num = 0;
    // 记录 num 前的符号，初始化为 +
    char sign = '+';
    for (int i = 0; i < s.size(); i++) {
        char c = s[i];
        // 如果是数字，连续读取到 num
```

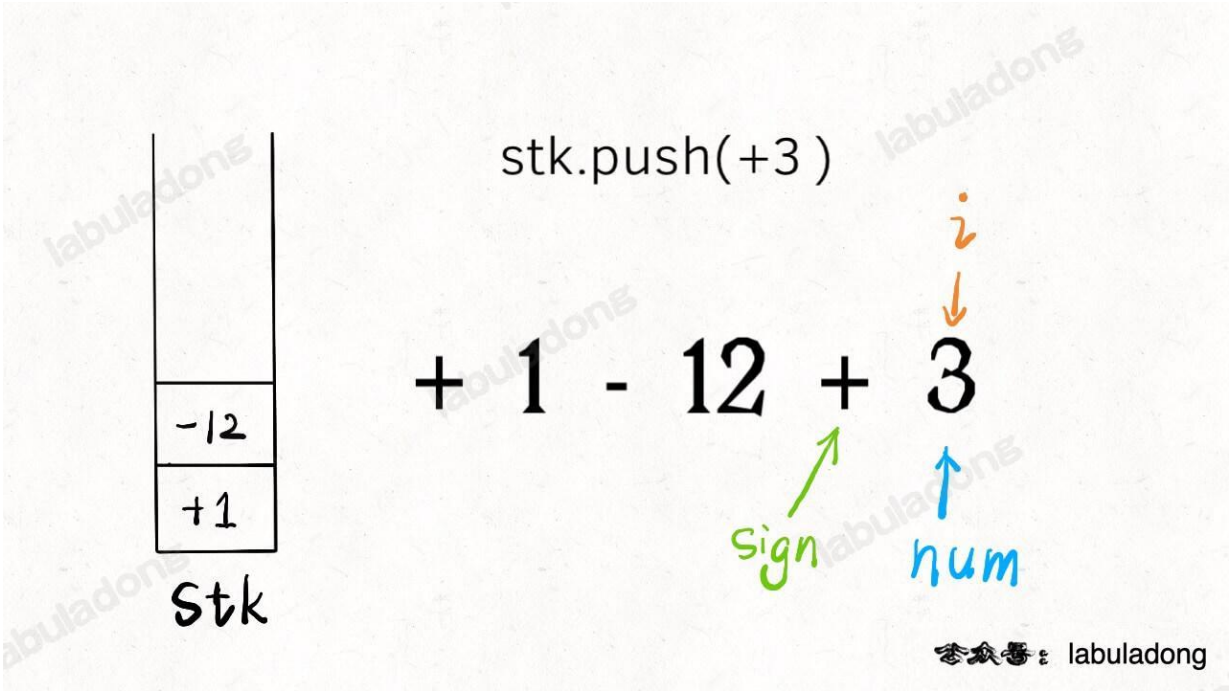
```
            if (isdigit(c))
                num = 10 * num + (c - '0');
            // 如果不是数字，就是遇到了下一个符号，
            // 之前的数字和符号就要存进栈中
            if (!isdigit(c) || i == s.size() - 1) {
                switch (sign) {
                    case '+':
                        stk.push(num); break;
                    case '-':
                        stk.push(-num); break;
                }
                // 更新符号为当前符号，数字清零
                sign = c;
                num = 0;
            }
        }
        // 将栈中所有结果求和就是答案
        int res = 0;
        while (!stk.empty()) {
            res += stk.top();
            stk.pop();
        }
        return res;
    }
```

我估计就是中间带 `switch` 语句的部分有点不好理解吧，`i` 就是从左到右扫描，`sign` 和 `num` 跟在它身后。当 `s[i]` 遇到一个运算符时，情况是这样的：



所以说，此时要根据 `sign` 的 case 不同选择 `nums` 的正负号，存入栈中，然后更新 `sign` 并清零 `nums` 记录下一对儿符合和数字的组合。

另外注意，不只是遇到新的符号会触发入栈，当 `i` 走到了算式的尽头（`i == s.size() - 1`），也应该将前面的数字入栈，方便后续计算最终结果。



至此，仅处理紧凑加减法字符串的算法就完成了，请确保理解以上内容，后续的内容就基于这个框架修修改改就完事儿了。

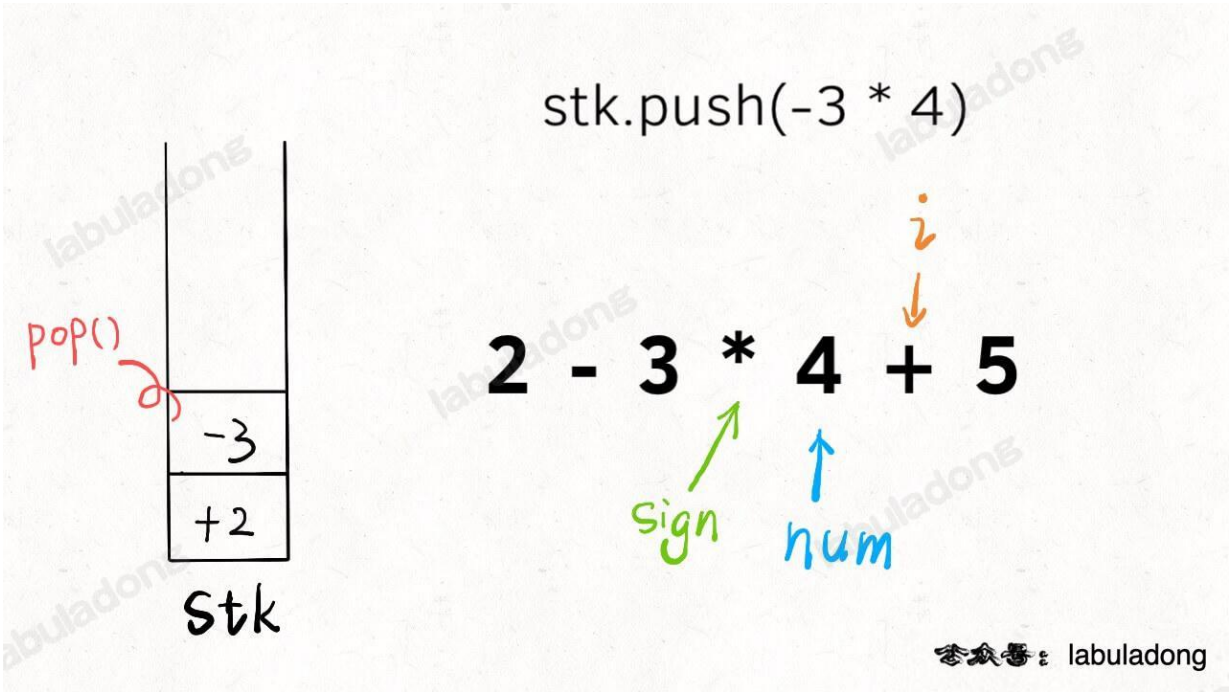
三、处理乘除法

其实思路跟仅处理加减法没啥区别，拿字符串 `2-3*4+5` 举例，核心思路依然是把字符串分解成符号和数字的组合。

比如上述例子就可以分解为 `+2`，`-3`，`*4`，`+5` 几对儿，我们刚才不是没有处理乘除号吗，很简单，**其他部分都不用变**，在 `switch` 部分加上对应的 case 就行了：

```
for (int i = 0; i < s.size(); i++) {
    char c = s[i];
    if (isdigit(c))
        num = 10 * num + (c - '0');

    if (!isdigit(c) || i == s.size() - 1) {
        switch (sign) {
            int pre;
            case '+':
                stk.push(num); break;
            case '-':
                stk.push(-num); break;
            // 只要拿出前一个数字做对应运算即可
            case '*':
                pre = stk.top();
                stk.pop();
                stk.push(pre * num);
                break;
            case '/':
                pre = stk.top();
                stk.pop();
                stk.push(pre / num);
```

```
                break;
            }
            // 更新符号为当前符号，数字清零
            sign = c;
            num = 0;
        }
    }
```



乘除法优先于加减法体现在，乘除法可以和栈顶的数结合，而加减法只能把自己放入栈。

现在我们思考一下**如何处理字符串中可能出现的空格字符**。其实也非常简单，想想空格字符的出现，会影响我们现有代码的哪一部分？

```
// 如果 c 非数字
if (!isdigit(c) || i == s.size() - 1) {
    switch (c) {...}
    sign = c;
    num = 0;
}
```

显然空格会进入这个 if 语句，但是我们并不想让空格的情况进入这个 if，因为这里会更新 `sign` 并清零 `nums`，空格根本就不是运算符，应该被忽略。

那么只要多加一个条件即可：

```
if ((!isdigit(c) && c != ' ') || i == s.size() - 1) {
    ...
}
```

好了，现在我们的算法已经可以按照正确的法则计算加减乘除，并且自动忽略空格符，剩下的就是如何让算法正确识别括号了。

四、处理括号

处理算式中的括号看起来应该是最难的，但真没有看起来那么难。

为了规避编程语言的繁琐细节，我把前面解法的代码翻译成 Python 版本：

```
def calculate(s: str) -> int:

    def helper(s: List) -> int:
        stack = []
        sign = '+'
        num = 0

        while len(s) > 0:
            c = s.pop(0)
            if c.isdigit():
                num = 10 * num + int(c)

            if (not c.isdigit() and c != ' ') or len(s) == 0:
                if sign == '+':
                    stack.append(num)
                elif sign == '-':
                    stack.append(-num)
                elif sign == '*':
                    stack[-1] = stack[-1] * num
                elif sign == '/':
                    # python 除法向 0 取整的写法
                    stack[-1] = int(stack[-1] / float(num))
                num = 0
                sign = c

        return sum(stack)
    # 需要把字符串转成双端队列方便操作
    return helper(collections.deque(s))
```

这段代码跟刚才 C++ 代码完全相同，唯一的区别是，不是从左到右遍历字符串，而是不断从左边 `pop` 出字符，本质还是一样的。

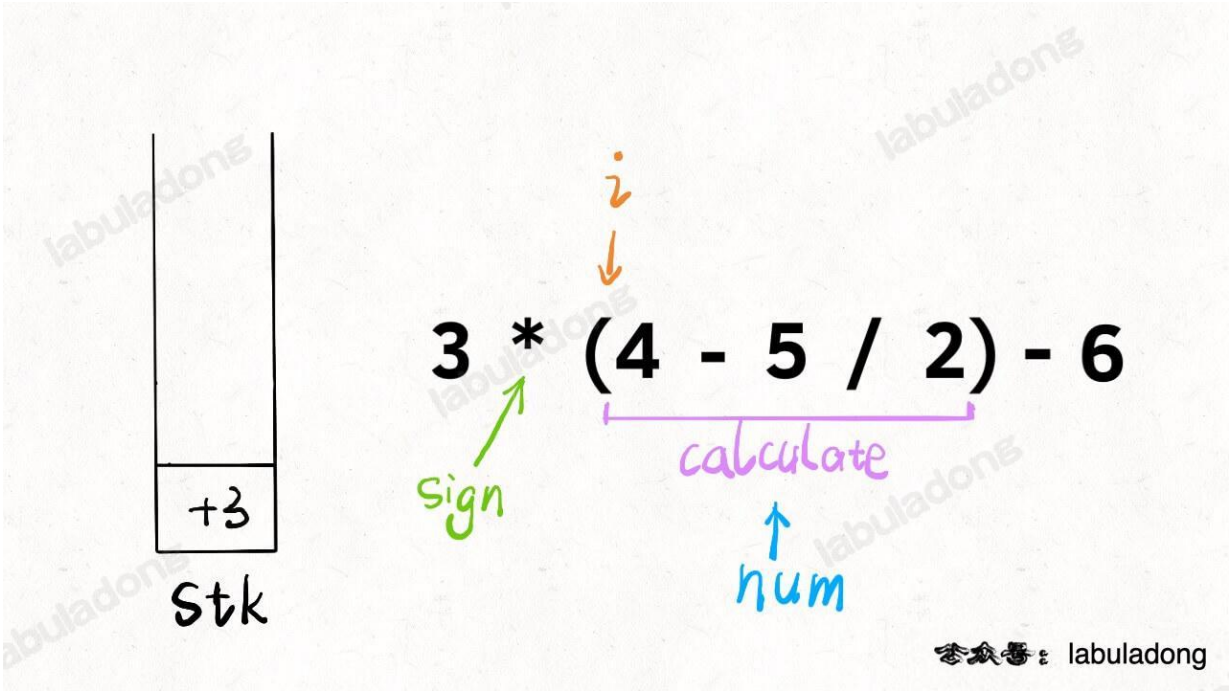
那么，为什么说处理括号没有看起来那么难呢，**因为括号具有递归性质**。我们拿字符串 `3*(4-5/2)-6` 举例：

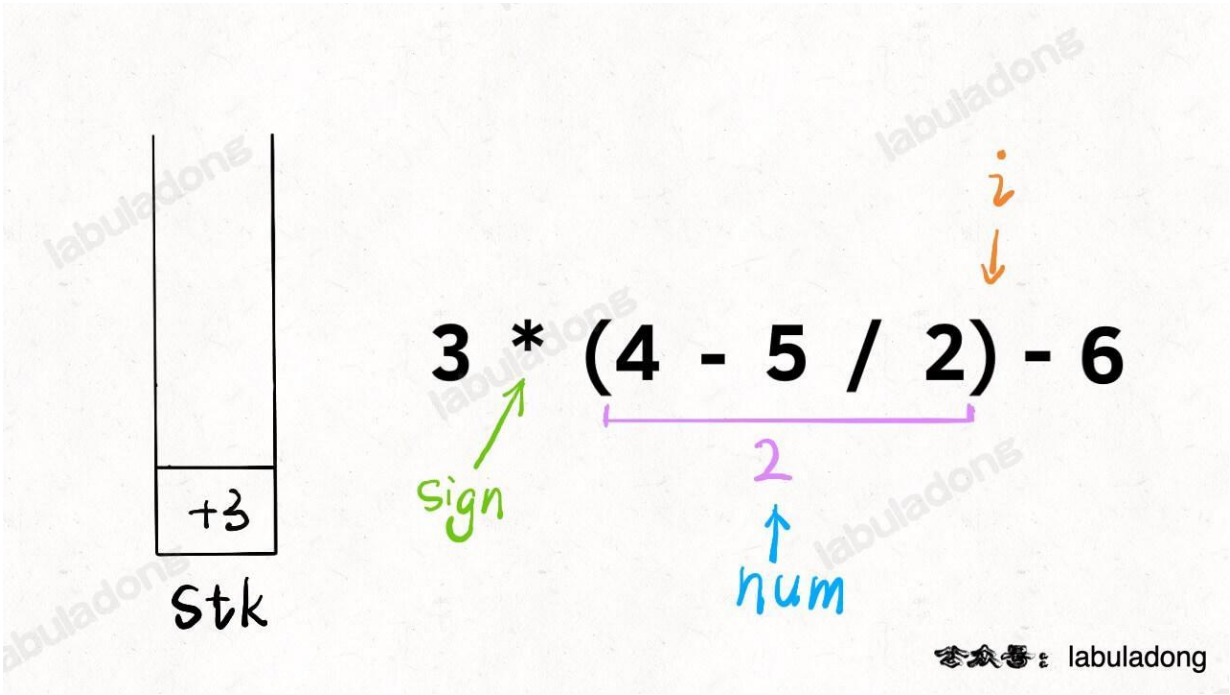
```
calculate(3 * (4 - 5/2) - 6)
= 3 * calculate(4 - 5/2) - 6
= 3 * 2 - 6
= 0
```

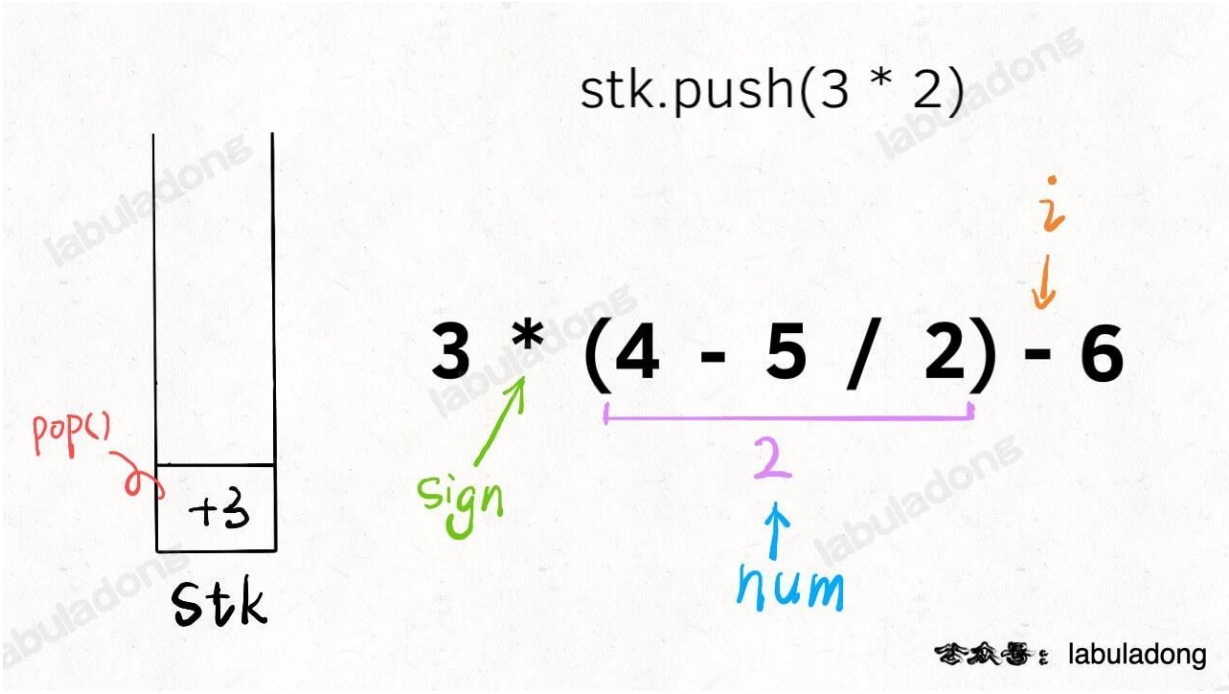
可以脑补一下，无论多少层括号嵌套，通过 calculate 函数递归调用自己，都可以将括号中的算式化简成一个数字。**换句话说，括号包含的算式，我们直接视为一个数字就行了**。

现在的问题是，递归的开始条件和结束条件是什么？**遇到 (开始递归，遇到) 结束递归**：

```
def calculate(s: str) -> int:

    def helper(s: List) -> int:
        stack = []
        sign = '+'
        num = 0

        while len(s) > 0:
            c = s.popleft()
            if c.isdigit():
                num = 10 * num + int(c)
            # 遇到左括号开始递归计算 num
            if c == '(':
                num = helper(s)

            if (not c.isdigit() and c != ' ') or len(s) == 0:
                if sign == '+':
                    stack.append(num)
                elif sign == '-':
                    stack.append(-num)
                elif sign == '*':
                    stack[-1] = stack[-1] * num
                elif sign == '/':
                    # python 除法向 0 取整的写法
                    stack[-1] = int(stack[-1] / float(num))
                num = 0
                sign = c
            # 遇到右括号返回递归结果
            if c == ')': break
        return sum(stack)

    return helper(collections.deque(s))
```


i
3 * (4 - 5 / 2) - 6
sign
calculate
num
+3
Stk
公众号：labuladong


i
3 * (4 - 5 / 2) - 6
sign
2
num
+3
Stk
公众号：labuladong



你看，加了两三行代码，就可以处理括号了，这就是递归的魅力。至此，计算器的全部功能就实现了，通过对问题的层层拆解化整为零，再回头看，这个问题似乎也没那么复杂嘛。

五、最后总结

本文借实现计算器的问题，主要想表达的是一种处理复杂问题的思路。

我们首先从字符串转数字这个简单问题开始，进而处理只包含加减法的算式，进而处理包含加减乘除四则运算的算式，进而处理空格字符，进而处理包含括号的算式。

可见，对于一些比较困难的问题，其解法并不是一蹴而就的，而是步步推进，螺旋上升的。如果一开始给你原题，你不会做，甚至看不懂答案，都很正常，关键在于我们自己如何简化问题，如何以退为进。

退而求其次是一种很聪明策略。你想想啊，假设这是一道考试题，你不会实现这个计算器，但是你写了字符串转整数的算法并指出了容易溢出的陷阱，那起码可以得 20 分吧；如果你能够处理加减法，那可以得 40 分吧；如果你能处理加减乘除四则运算，那起码够 70 分了；再加上处理空格字符，80 有了吧。我就是不会处理括号，那就算了，80 已经很 OK 了好不好。

如果你有高质量的问题，可以 点击这里 进入本文的讨论区。

▶ **引用本文的文章**

- 算法笔试「骗分」套路

——————————————

更多精品课程可查看 我的网站；扫码查看更多配套学习套件：

算法学习网站：https://labuladong.gitee.io/algo/ 或 https://labuladong.github.io/algo/

二维码太多，长按识别不到？放大图片 -> 让对应二维码充满屏幕 -> 长按识别该二维码

【强化练习】更多经典设计习题

设计类题目都是让你把基本数据结构进行组合，去解决某些具体场景中的问题。我们先来看几道比较简单但比较有意思的题目吧。

▶ 引用本文的文章

- 单调栈算法模板解决三道例题
- 单调队列结构解决滑动窗口问题
- 常数时间删除/查找数组中的任意元素
- 数据结构设计：最大栈
- 算法就像搭乐高：带你手撸 LFU 算法
- 算法就像搭乐高：带你手撸 LRU 算法
- 设计朋友圈时间线功能

———————————————

本文为网站会员内容，请 点这里 查看。

仗剑篇、进阶数据结构

进阶数据结构包括树和图，从定义上来说树是特殊的图，但实际场景中树和图的区别还是蛮大的，所以要分开说。

因为树算法大多涉及递归操作，而图有很多大家耳熟能详的经典算法，所以我把它们归为进阶数据结构。

公众号标签：手把手刷数据结构

2.1 二叉树

> 我的 二叉树专题 按照固定的公式和思维模式讲解了 150 道二叉树题目，可以手把手带你刷完二叉树分类的题目，迅速掌握递归思维。

二叉树的重要性是我在公众号经常强调的，可以说 BFS 算法、DFS 算法、回溯算法、动态规划、分治算法、图论算法都是二叉树算法的衍生，其中都有二叉树题目的思维模式和代码框架。

我做的第一期专项训练营就是二叉树专题，足以看出我对这个专题的重视。

单单二叉树的遍历，如果往原理上问，就能考倒一大片人，比如你告诉我，二叉树的前序遍历结果怎么算？

你肯定可以写出如下代码：

```
List<Integer> res = new LinkedList<>();

// 返回前序遍历结果
List<Integer> preorder(TreeNode root) {
    traverse(root);
    return res;
}

// 二叉树遍历函数
void traverse(TreeNode root) {
    if (root == null) {
        return;
    }
    // 前序遍历位置
    res.addLast(root.val);
    traverse(root.left);
    traverse(root.right);
}
```

还有别的想法吗？没有了？

还可以这样写：

```
// 定义：输入一棵二叉树的根节点，返回这棵树的前序遍历结果
List<Integer> preorder(TreeNode root) {
    List<Integer> res = new LinkedList<>();
    if (root == null) {
        return res;
    }
    // 前序遍历的结果，root.val 在第一个
    res.add(root.val);
    // 后面接着左子树的前序遍历结果
```

```
        res.addAll(preorder(root.left));
        // 最后接着右子树的前序遍历结果
        res.addAll(preorder(root.right));
        return res;
    }
```

这两个解法，前者是 回溯算法核心思路，后者是 动态规划核心思路，可以说你理解透彻二叉树，就成功了一半。

最后，我后续还会推出各个专题的训练营，持续关注我的公众号就好。

公众号标签：二叉树

名称	最新版本号	详情
PDF 教材	V5.2	下载
刷题打卡挑战	开放报名	报名
网站会员	V已上线	购买
Chrome 刷题插件	V4.4.3	使用手册
vscode 刷题插件	V1.5.4	使用手册
JetBrains IDE 刷题插件	V1.8.6	使用手册

东哥带你刷二叉树（纲领篇）

Stars 123k 精品课程 查看 知乎 @labuladong B站 @labuladong

学算法认准 labuladong，致力于把算法讲清楚！网页版 点这里。

读完本文，你不仅学会了算法套路，还可以顺便解决如下题目：

LeetCode	力扣	难度
104. Maximum Depth of Binary Tree	104. 二叉树的最大深度	🟢
144. Binary Tree Preorder Traversal	144. 二叉树的前序遍历	🟢
543. Diameter of Binary Tree	543. 二叉树的直径	🟢
-	剑指 Offer 55 - I. 二叉树的深度	🟢

> tip：本文有视频版：二叉树/递归的框架思维（纲领篇）。建议关注我的 B 站账号，我会用视频领读的方式带大家学习那些稍有难度的算法技巧。

我的公众号历史文章的整个脉络都是按照 学习数据结构和算法的框架思维 提出的框架来构建的，其中着重强调了二叉树题目的重要性，所以把本文放在第一章的必读系列中。

我刷了这么多年题，浓缩出二叉树算法的一个总纲放在这里，也许用词不是特别专业化，也没有什么教材会收录我的这些经验总结，但目前各个刷题平台的题库，没有一道二叉树题目能跳出本文划定的框架。如果你能发现一道题目和本文给出的框架不兼容，请留言告知我。

先在开头总结一下，二叉树解题的思维模式分两类：

1、是否可以通过遍历一遍二叉树得到答案？如果可以，用一个 `traverse` 函数配合外部变量来实现，这叫「遍历」的思维模式。

2、是否可以定义一个递归函数，通过子问题（子树）的答案推导出原问题的答案？如果可以，写出这个递归函数的定义，并充分利用这个函数的返回值，这叫「分解问题」的思维模式。

无论使用哪种思维模式，你都需要思考：

如果单独抽出一个二叉树节点，它需要做什么事情？需要在什么时候（前/中/后序位置）做？其他的节点不用你操心，递归函数会帮你在所有节点上执行相同的操作。

本文中会用题目来举例，但都是最最简单的题目，所以不用担心自己看不懂，我可以帮你从最简单的问题中提炼出所有二叉树题目的共性，并将二叉树中蕴含的思维进行升华，反手用到 动态规划，回溯算法，分治算

法，图论算法 中去，这也是我一直强调框架思维的原因。希望你在学习了上述高级算法后，也能回头再来看看本文，会对它们有更深刻的认识。

首先，我还是要不厌其烦地强调一下二叉树这种数据结构及相关算法的重要性。

二叉树的重要性

举个例子，比如两个经典排序算法 快速排序 和 归并排序，对于它俩，你有什么理解？

如果你告诉我，快速排序就是个二叉树的前序遍历，归并排序就是个二叉树的后序遍历，那么我就知道你是个算法高手了。

为什么快速排序和归并排序能和二叉树扯上关系？我们来简单分析一下他们的算法思想和代码框架：

快速排序的逻辑是，若要对 `nums[lo..hi]` 进行排序，我们先找一个分界点 `p`，通过交换元素使得 `nums[lo..p-1]` 都小于等于 `nums[p]`，且 `nums[p+1..hi]` 都大于 `nums[p]`，然后递归地去 `nums[lo..p-1]` 和 `nums[p+1..hi]` 中寻找新的分界点，最后整个数组就被排序了。

快速排序的代码框架如下：

```
void sort(int[] nums, int lo, int hi) {
    /****** 前序遍历位置 ******/
    // 通过交换元素构建分界点 p
    int p = partition(nums, lo, hi);
    /************************/

    sort(nums, lo, p - 1);
    sort(nums, p + 1, hi);
}
```

先构造分界点，然后去左右子数组构造分界点，你看这不就是一个二叉树的前序遍历吗？

再说说归并排序的逻辑，若要对 `nums[lo..hi]` 进行排序，我们先对 `nums[lo..mid]` 排序，再对 `nums[mid+1..hi]` 排序，最后把这两个有序的子数组合并，整个数组就排好序了。

归并排序的代码框架如下：

```
// 定义：排序 nums[lo..hi]
void sort(int[] nums, int lo, int hi) {
    int mid = (lo + hi) / 2;
    // 排序 nums[lo..mid]
    sort(nums, lo, mid);
    // 排序 nums[mid+1..hi]
    sort(nums, mid + 1, hi);

    /****** 后序位置 ******/
    // 合并 nums[lo..mid] 和 nums[mid+1..hi]
    merge(nums, lo, mid, hi);
    /**********************/
}
```

先对左右子数组排序，然后合并（类似合并有序链表的逻辑），你看这是不是二叉树的后序遍历框架？另外，这不就是传说中的分治算法嘛，不过如此呀。

如果你一眼就识破这些排序算法的底细，还需要背这些经典算法吗？不需要。你可以手到擒来，从二叉树遍历框架就能扩展出算法了。

说了这么多，旨在说明，二叉树的算法思想的运用广泛，甚至可以说，只要涉及递归，都可以抽象成二叉树的问题。

接下来我们从二叉树的前中后序开始讲起，让你深刻理解这种数据结构的魅力。

深入理解前中后序

我先甩给你几个问题，请默默思考 30 秒：

1、你理解的二叉树的前中后序遍历是什么，仅仅是三个顺序不同的 List 吗？

2、请分析，后序遍历有什么特殊之处？

3、请分析，为什么多叉树没有中序遍历？

答不上来，说明你对前中后序的理解仅仅局限于教科书，不过没关系，我用类比的方式解释一下我眼中的前中后序遍历。

首先，回顾一下 学习数据结构和算法的框架思维 中说到的二叉树遍历框架：

```
void traverse(TreeNode root) {
    if (root == null) {
        return;
    }
    // 前序位置
    traverse(root.left);
    // 中序位置
    traverse(root.right);
    // 后序位置
}
```

先不管所谓前中后序，单看 `traverse` 函数，你说它在做什么事情？

其实它就是一个能够遍历二叉树所有节点的一个函数，和你遍历数组或者链表本质上没有区别：

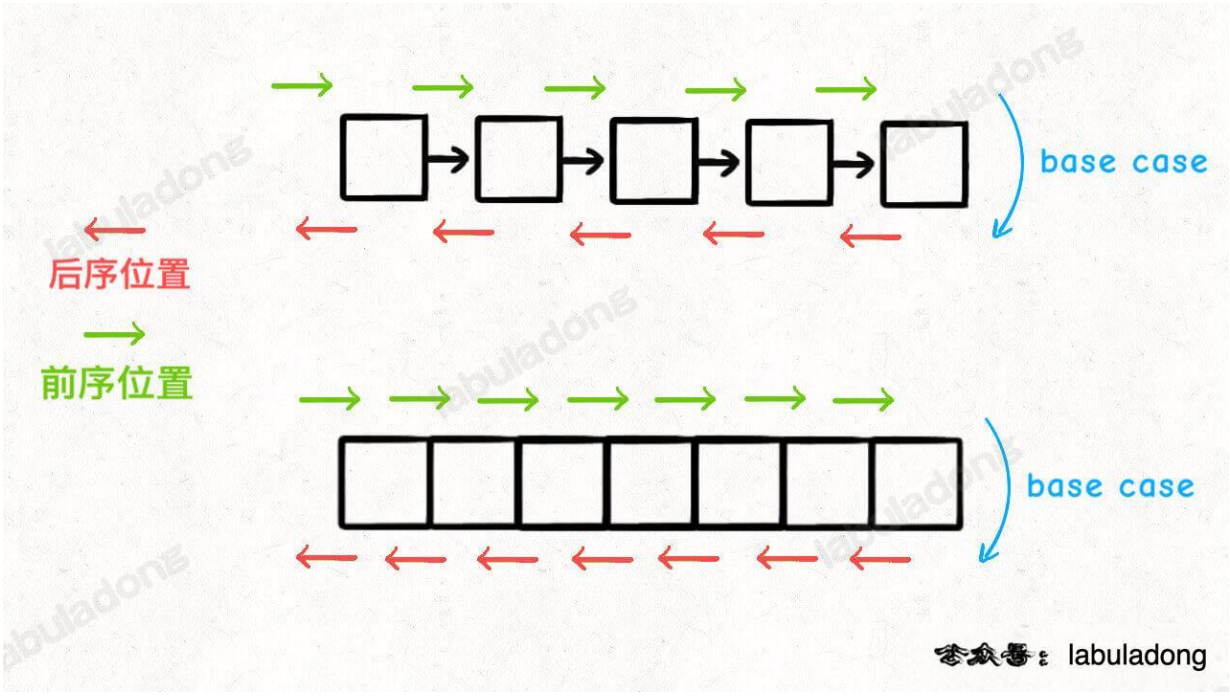
```
/* 迭代遍历数组 */
void traverse(int[] arr) {
    for (int i = 0; i < arr.length; i++) {

    }
}

/* 递归遍历数组 */
```

```
void traverse(int[] arr, int i) {
    if (i == arr.length) {
        return;
    }
    // 前序位置
    traverse(arr, i + 1);
    // 后序位置
}

/* 迭代遍历单链表 */
void traverse(ListNode head) {
    for (ListNode p = head; p != null; p = p.next) {

    }
}

/* 递归遍历单链表 */
void traverse(ListNode head) {
    if (head == null) {
        return;
    }
    // 前序位置
    traverse(head.next);
    // 后序位置
}
```

单链表和数组的遍历可以是迭代的，也可以是递归的，**二叉树这种结构无非就是二叉链表**，由于没办法简单改写成迭代形式，所以一般说二叉树的遍历框架都是指递归的形式。

你也注意到了，只要是递归形式的遍历，都可以有前序位置和后序位置，分别在递归之前和递归之后。

所谓前序位置，就是刚进入一个节点（元素）的时候，后序位置就是即将离开一个节点（元素）的时候，那么进一步，你把代码写在不同位置，代码执行的时机也不同：



比如说，如果让你**倒序打印**一条单链表上所有节点的值，你怎么搞？

实现方式当然有很多，但如果你对递归的理解足够透彻，可以利用后序位置来操作：

```
/* 递归遍历单链表，倒序打印链表元素 */
void traverse(ListNode head) {
    if (head == null) {
        return;
    }
    traverse(head.next);
    // 后序位置
    print(head.val);
}
```

结合上面那张图，你应该知道为什么这段代码能够倒序打印单链表了吧，本质上是利用递归的堆栈帮你实现了倒序遍历的效果。

那么说回二叉树也是一样的，只不过多了一个中序位置罢了。

教科书里只会问你前中后序遍历结果分别是什么，所以对于一个只上过大学数据结构课程的人来说，他大概以为二叉树的前中后序只不过对应三种顺序不同的 `List<Integer>` 列表。

但是我想说，**前中后序是遍历二叉树过程中处理每一个节点的三个特殊时间点**，绝不仅仅是三个顺序不同的 List：

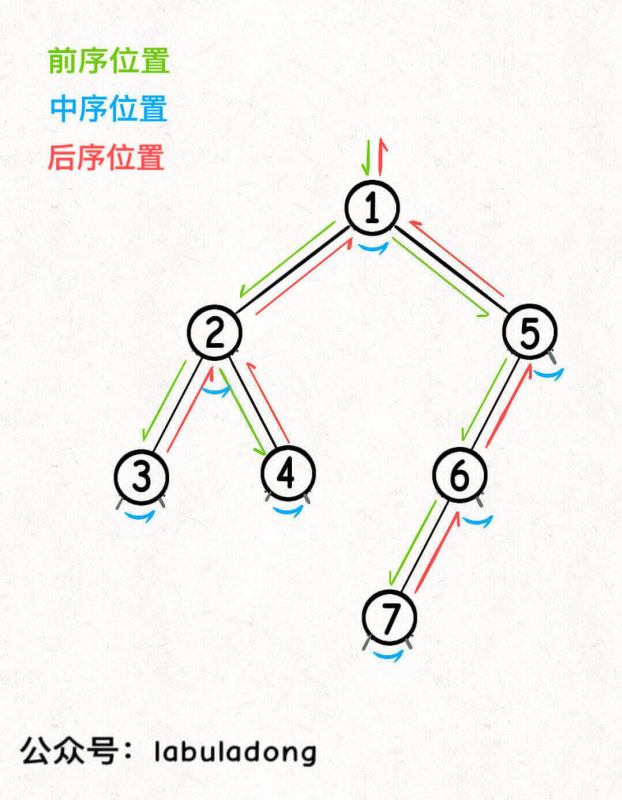
前序位置的代码在刚刚进入一个二叉树节点的时候执行；

后序位置的代码在将要离开一个二叉树节点的时候执行；

中序位置的代码在一个二叉树节点左子树都遍历完，即将开始遍历右子树的时候执行。

你注意本文的用词，我一直说前中后序「位置」，就是要和大家常说的前中后序「遍历」有所区别：你可以在前序位置写代码往一个 List 里面塞元素，那最后得到的就是前序遍历结果；但并不是说你就不可以写更复杂的代码做更复杂的事。

画成图，前中后序三个位置在二叉树上是这样：



你可以发现每个节点都有「唯一」属于自己的前中后序位置，所以我说前中后序遍历是遍历二叉树过程中处理每一个节点的三个特殊时间点。

这里你也可以理解为什么多叉树没有中序位置，因为二叉树的每个节点只会进行唯一一次左子树切换右子树，而多叉树节点可能有很多子节点，会多次切换子树去遍历，所以多叉树节点没有「唯一」的中序遍历位置。

说了这么多基础的，就是要帮你对二叉树建立正确的认识，然后你会发现：

二叉树的所有问题，就是让你在前中后序位置注入巧妙的代码逻辑，去达到自己的目的，你只需要单独思考每一个节点应该做什么，其他的不用你管，抛给二叉树遍历框架，递归会在所有节点上做相同的操作。

你也可以看到，图论算法基础 把二叉树的遍历框架扩展到了图，并以遍历为基础实现了图论的各种经典算法，不过这是后话，本文就不多说了。

两种解题思路

前文 我的算法学习心得 说过：

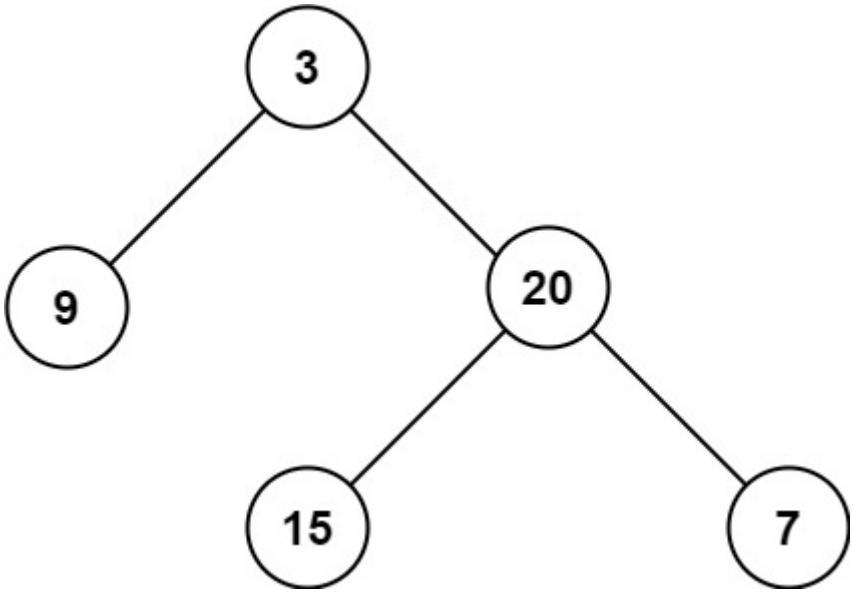
二叉树题目的递归解法可以分两类思路，第一类是遍历一遍二叉树得出答案，第二类是通过分解问题计算出答案，这两类思路分别对应着 回溯算法核心框架 和 动态规划核心框架。

> 这里说一下我的函数命名习惯：二叉树中用遍历思路解题时函数签名一般是 `void traverse(...)`，没有返回值，靠更新外部变量来计算结果，而用分解问题思路解题时函数名根据该函数具体功能而定，而且一般会有返回值，返回值是子问题的计算结果。
>
> 与此对应的，你会发现我在 回溯算法核心框架 中给出的函数签名一般也是没有返回值的 `void backtrack(...)`，而在 动态规划核心框架 中给出的函数签名是带有返回值的 `dp` 函数。这也说明它俩和二叉树之间千丝万缕的联系。

> 虽然函数命名没有什么硬性的要求，但我还是建议你也遵循我的这种风格，这样更能突出函数的作用和解题的思维模式，便于你自己理解和运用。

当时我是用二叉树的最大深度这个问题来举例，重点在于把这两种思路和动态规划和回溯算法进行对比，而本文的重点在于分析这两种思路如何解决二叉树的题目。

力扣第 104 题「二叉树的最大深度」就是最大深度的题目，所谓最大深度就是根节点到「最远」叶子节点的最长路径上的节点数，比如输入这棵二叉树，算法应该返回 3：



你做这题的思路是什么？显然遍历一遍二叉树，用一个外部变量记录每个节点所在的深度，取最大值就可以得到最大深度，**这就是遍历二叉树计算答案的思路**。

解法代码如下：

```
// 记录最大深度
int res = 0;
// 记录遍历到的节点的深度
int depth = 0;

// 主函数
int maxDepth(TreeNode root) {
    traverse(root);
    return res;
}

// 二叉树遍历框架
void traverse(TreeNode root) {
    if (root == null) {
        return;
    }
    // 前序位置
    depth++;
    if (root.left == null && root.right == null) {
        // 到达叶子节点，更新最大深度
        res = Math.max(res, depth);
```

```
        }
        traverse(root.left);
        traverse(root.right);
        // 后序位置
        depth--;
    }
```

▶ 🌟 代码可视化动画🌟

这个解法应该很好理解，但为什么需要在前序位置增加 `depth`，在后序位置减小 `depth`?

因为前面说了，前序位置是进入一个节点的时候，后序位置是离开一个节点的时候，`depth` 记录当前递归到的节点深度，你把 `traverse` 理解成在二叉树上游走的一个指针，所以当然要这样维护。

至于对 `res` 的更新，你放到前中后序位置都可以，只要保证在进入节点之后，离开节点之前（即 `depth` 自增之后，自减之前）就行了。

当然，你也很容易发现一棵二叉树的最大深度可以通过子树的最大深度推导出来，**这就是分解问题计算答案的思路**。

解法代码如下：

```
// 定义：输入根节点，返回这棵二叉树的最大深度
int maxDepth(TreeNode root) {
    if (root == null) {
        return 0;
    }
    // 利用定义，计算左右子树的最大深度
    int leftMax = maxDepth(root.left);
    int rightMax = maxDepth(root.right);
    // 整棵树的最大深度等于左右子树的最大深度取最大值，
    // 然后再加上根节点自己
    int res = Math.max(leftMax, rightMax) + 1;

    return res;
}
```

▶ 🎃 代码可视化动画🎃

只要明确递归函数的定义，这个解法也不难理解，但为什么主要的代码逻辑集中在后序位置?

因为这个思路正确的核心在于，你确实可以通过子树的最大深度推导出原树的深度，所以当然要首先利用递归函数的定义算出左右子树的最大深度，然后推出原树的最大深度，主要逻辑自然放在后序位置。

如果你理解了最大深度这个问题的两种思路，**那么我们再回头看看最基本的二叉树前中后序遍历**，就比如算前序遍历结果吧。

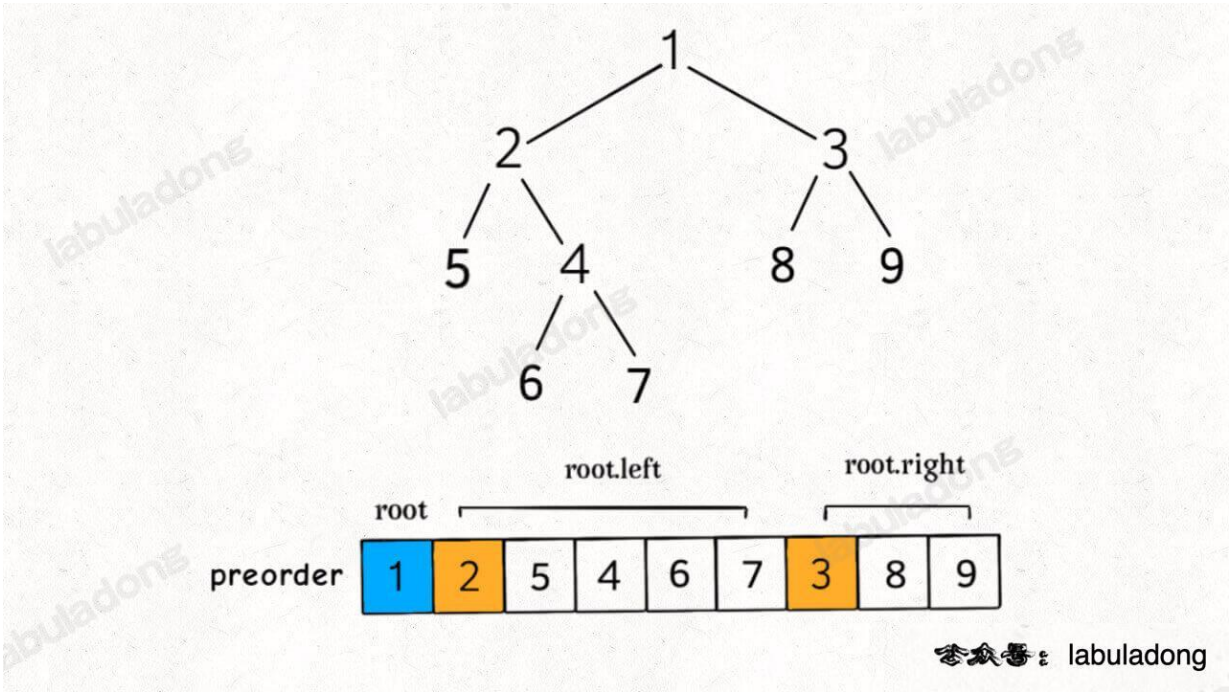
我们熟悉的解法就是用「遍历」的思路，我想应该没什么好说的：

```
List<Integer> res = new LinkedList<>();

// 返回前序遍历结果
List<Integer> preorderTraverse(TreeNode root) {
    traverse(root);
    return res;
}

// 二叉树遍历函数
void traverse(TreeNode root) {
    if (root == null) {
        return;
    }
    // 前序位置
    res.add(root.val);
    traverse(root.left);
    traverse(root.right);
}
```

但你是否能够用「分解问题」的思路，来计算前序遍历的结果？

换句话说，不要用像 `traverse` 这样的辅助函数和任何外部变量，单纯用题目给的 `preorderTraverse` 函数递归解题，你会不会？

我们知道前序遍历的特点是，根节点的值排在首位，接着是左子树的前序遍历结果，最后是右子树的前序遍历结果：



那这不就可以分解问题了么，**一棵二叉树的前序遍历结果 = 根节点 + 左子树的前序遍历结果 + 右子树的前序遍历结果**。

所以，你可以这样实现前序遍历算法：

```
// 定义：输入一棵二叉树的根节点，返回这棵树的前序遍历结果
List<Integer> preorderTraverse(TreeNode root) {
    List<Integer> res = new LinkedList<>();
    if (root == null) {
        return res;
    }
    // 前序遍历的结果，root.val 在第一个
    res.add(root.val);
    // 利用函数定义，后面接着左子树的前序遍历结果
    res.addAll(preorderTraverse(root.left));
    // 利用函数定义，最后接着右子树的前序遍历结果
    res.addAll(preorderTraverse(root.right));
    return res;
}
```

中序和后序遍历也是类似的，只要把 `add(root.val)` 放到中序和后序对应的位置就行了。

这个解法短小精干，但为什么不常见呢？

一个原因是**这个算法的复杂度不好把控**，比较依赖语言特性。

Java 的话无论 ArrayList 还是 LinkedList，`addAll` 方法的复杂度都是 O(N)，所以总体的最坏时间复杂度会达到 O(N^2)，除非你自己实现一个复杂度为 O(1) 的 `addAll` 方法，底层用链表的话是可以做到的，因为多条链表只要简单的指针操作就能连接起来。

当然，最主要的原因还是因为教科书上从来没有这么教过……

上文举了两个简单的例子，但还有不少二叉树的题目是可以同时使用两种思路来思考和求解的，这就要靠你自己多去练习和思考，不要仅仅满足于一种熟悉的解法思路。

综上，遇到一道二叉树的题目时的通用思考过程是：

1、是否可以通过遍历一遍二叉树得到答案？如果可以，用一个 `traverse` 函数配合外部变量来实现。

2、是否可以定义一个递归函数，通过子问题（子树）的答案推导出原问题的答案？如果可以，写出这个递归函数的定义，并充分利用这个函数的返回值。

3、无论使用哪一种思维模式，你都要明白二叉树的每一个节点需要做什么，需要在什么时候（前中后序）做。

我的刷题插件 更新了所有值得一做的二叉树题目思路，全部归类为上述两种思路，你如果按照插件提供的思路解法过一遍二叉树的所有题目，不仅可以完全掌握递归思维，而且可以更容易理解高级的算法：

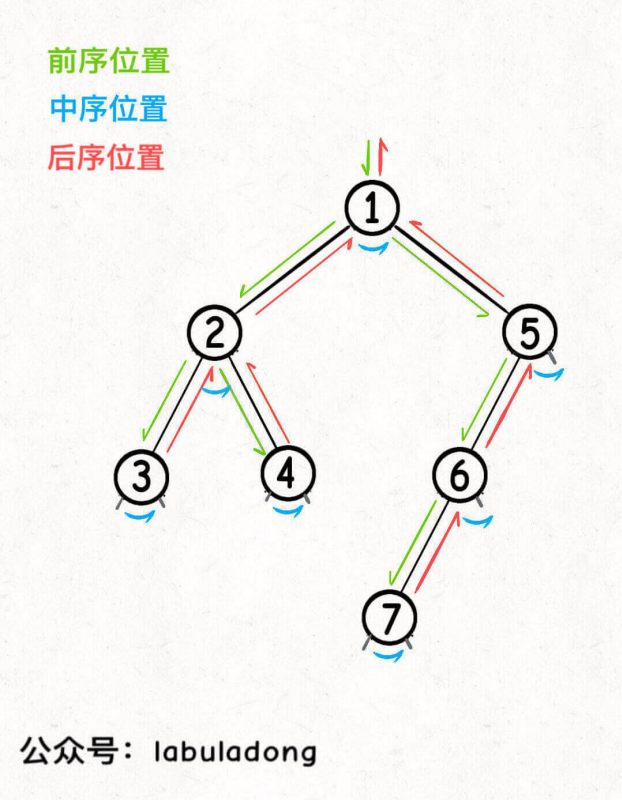
后序位置的特殊之处

说后序位置之前，先简单说下中序和前序。

中序位置主要用在 BST 场景中，你完全可以把 BST 的中序遍历认为是遍历有序数组。

前序位置本身其实没有什么特别的性质，之所以你发现好像很多题都是在前序位置写代码，实际上是因为我们习惯把那些对前中后序位置不敏感的代码写在前序位置罢了。

你可以发现，前序位置的代码执行是自顶向下的，而后序位置的代码执行是自底向上的：



这不奇怪，因为本文开头就说了前序位置是刚刚进入节点的时刻，后序位置是即将离开节点的时刻。

但这里面大有玄妙，意味着前序位置的代码只能从函数参数中获取父节点传递来的数据，而后序位置的代码不仅可以获取参数数据，还可以获取到子树通过函数返回值传递回来的数据。

举具体的例子，现在给你一棵二叉树，我问你两个简单的问题：

1、如果把根节点看做第 1 层，如何打印出每一个节点所在的层数？

2、如何打印出每个节点的左右子树各有多少节点？

第一个问题可以这样写代码：

```
// 二叉树遍历函数
void traverse(TreeNode root, int level) {
    if (root == null) {
        return;
    }
    // 前序位置
    printf("节点 %s 在第 %d 层", root, level);
    traverse(root.left, level + 1);
    traverse(root.right, level + 1);
}

// 这样调用
traverse(root, 1);
```

第二个问题可以这样写代码：

```
// 定义：输入一棵二叉树，返回这棵二叉树的节点总数
int count(TreeNode root) {
    if (root == null) {
        return 0;
    }
    int leftCount = count(root.left);
    int rightCount = count(root.right);
    // 后序位置
    printf("节点 %s 的左子树有 %d 个节点，右子树有 %d 个节点",
            root, leftCount, rightCount);

    return leftCount + rightCount + 1;
}
```

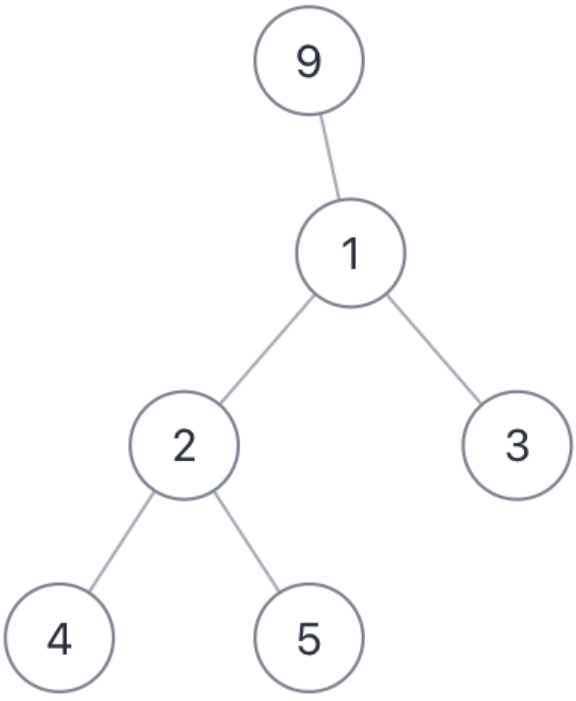
这两个问题的根本区别在于：一个节点在第几层，你从根节点遍历过来的过程就能顺带记录，用递归函数的参数就能传递下去；而以一个节点为根的整棵子树有多少个节点，你需要遍历完子树之后才能数清楚，然后通过递归函数的返回值拿到答案。

结合这两个简单的问题，你品味一下后序位置的特点，只有后序位置才能通过返回值获取子树的信息。

那么换句话说，一旦你发现题目和子树有关，那大概率要给函数设置合理的定义和返回值，在后序位置写代码了。

接下来看下后序位置是如何在实际的题目中发挥作用的，简单聊下力扣第 543 题「二叉树的直径」，让你计算一棵二叉树的最长直径长度。

所谓二叉树的「直径」长度，就是任意两个结点之间的路径长度。最长「直径」并不一定要穿过根结点，比如下面这棵二叉树：



它的最长直径是 3，即 [4,2,1,3]，[4,2,1,9] 或者 [5,2,1,3] 这几条「直径」的长度。

解决这题的关键在于，**每一条二叉树的「直径」长度，就是一个节点的左右子树的最大深度之和**。

现在让我求整棵树中的最长「直径」，那直截了当的思路就是遍历整棵树中的每个节点，然后通过每个节点的左右子树的最大深度算出每个节点的「直径」，最后把所有「直径」求个最大值即可。

最大深度的算法我们刚才实现过了，上述思路就可以写出以下代码：

```
class Solution {
    // 记录最大直径的长度
    int maxDiameter = 0;

    public int diameterOfBinaryTree(TreeNode root) {
        // 对每个节点计算直径，求最大直径
        traverse(root);
        return maxDiameter;
    }

    // 遍历二叉树
    void traverse(TreeNode root) {
        if (root == null) {
            return;
        }
        // 对每个节点计算直径
        int leftMax = maxDepth(root.left);
        int rightMax = maxDepth(root.right);
        int myDiameter = leftMax + rightMax;
        // 更新全局最大直径
        maxDiameter = Math.max(maxDiameter, myDiameter);

        traverse(root.left);
        traverse(root.right);
    }

    // 计算二叉树的最大深度
    int maxDepth(TreeNode root) {
        if (root == null) {
            return 0;
        }
        int leftMax = maxDepth(root.left);
        int rightMax = maxDepth(root.right);
        return 1 + Math.max(leftMax, rightMax);
    }
}
```

这个解法是正确的，但是运行时间很长，原因也很明显，`traverse` 遍历每个节点的时候还会调用递归函数 `maxDepth`，而 `maxDepth` 是要遍历子树的所有节点的，所以最坏时间复杂度是 O(N^2)。

这就出现了刚才探讨的情况，**前序位置无法获取子树信息，所以只能让每个节点调用 `maxDepth` 函数去算子树的深度**。

那如何优化？我们应该把计算「直径」的逻辑放在后序位置，准确说应该是放在 maxDepth 的后序位置，因为 maxDepth 的后序位置是知道左右子树的最大深度的。

所以，稍微改一下代码逻辑即可得到更好的解法：

```
class Solution {
    // 记录最大直径的长度
    int maxDiameter = 0;

    public int diameterOfBinaryTree(TreeNode root) {
        maxDepth(root);
        return maxDiameter;
    }

    int maxDepth(TreeNode root) {
        if (root == null) {
            return 0;
        }
        int leftMax = maxDepth(root.left);
        int rightMax = maxDepth(root.right);
        // 后序位置，顺便计算最大直径
        int myDiameter = leftMax + rightMax;
        maxDiameter = Math.max(maxDiameter, myDiameter);

        return 1 + Math.max(leftMax, rightMax);
    }
}
```

▶ 👾 代码可视化动画👾

这下时间复杂度只有 maxDepth 函数的 O(N) 了。

讲到这里，照应一下前文：遇到子树问题，首先想到的是给函数设置返回值，然后在后序位置做文章。

> 思考题：请你思考一下，运用后序遍历的题目使用的是「遍历」的思路还是「分解问题」的思路？我会在文末给出答案。

反过来，如果你写出了类似一开始的那种递归套递归的解法，大概率也需要反思是不是可以通过后序遍历优化了。

我的刷题插件对于这类考察后序遍历的题目也有特殊的说明，并且会给出前置题目，帮助你由浅入深理解这类题目：

以树的视角看动归/回溯/DFS算法的区别和联系

前文我说动态规划/回溯算法就是二叉树算法两种不同思路的表现形式，相信能看到这里的读者应该也认可了我这个观点。但有细心的读者经常问我：东哥，你的理解思路让我豁然开朗，但你好像一直没讲过 DFS 算法？

其实我在 一文秒杀所有岛屿题目 中就是用的 DFS 算法，但我确实没有单独用一篇文章讲 DFS 算法，**因为 DFS 算法和回溯算法非常类似，只是在细节上有所区别**。

这个细节上的差别是什么呢？其实就是「做选择」和「撤销选择」到底在 for 循环外面还是里面的区别，DFS 算法在外面，回溯算法在里面。

为什么有这个区别？还是要结合着二叉树理解。这一部分我就把回溯算法、DFS 算法、动态规划三种经典的算法思想，以及它们和二叉树算法的联系和区别，用一句话来说明：

动归/DFS/回溯算法都可以看做二叉树问题的扩展，只是它们的关注点不同：

- **动态规划算法属于分解问题的思路，它的关注点在整棵「子树」。**
- **回溯算法属于遍历的思路，它的关注点在节点间的「树枝」。**
- **DFS 算法属于遍历的思路，它的关注点在单个「节点」。**

怎么理解？我分别举三个例子你就懂了：

第一个例子，给你一棵二叉树，请你用分解问题的思路写一个 `count` 函数，计算这棵二叉树共有多少个节点。代码很简单，上文都写过了：

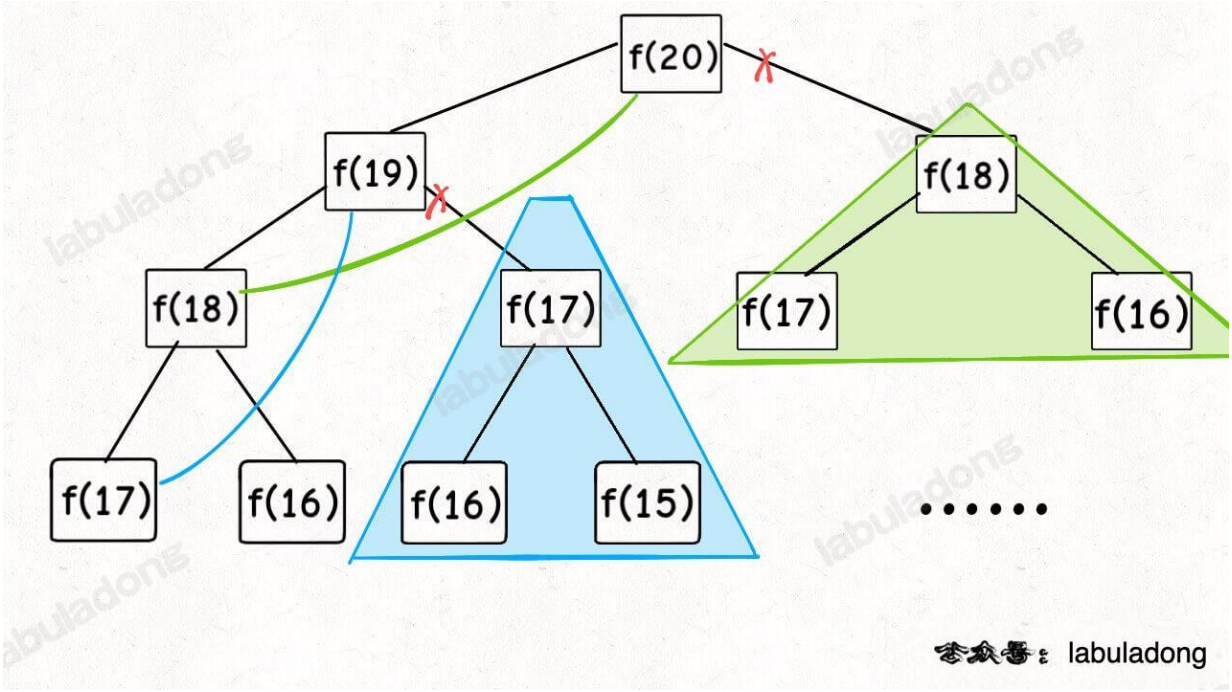
```
// 定义：输入一棵二叉树，返回这棵二叉树的节点总数
int count(TreeNode root) {
    if (root == null) {
        return 0;
```

```
    }
    // 我这个节点关心的是我的两个子树的节点总数分别是多少
    int leftCount = count(root.left);
    int rightCount = count(root.right);
    // 后序位置，左右子树节点数加上自己就是整棵树的节点数
    return leftCount + rightCount + 1;
}
```

你看，这就是动态规划分解问题的思路，它的着眼点永远是结构相同的整个子问题，类比到二叉树上就是「子树」。

你再看看具体的动态规划问题，比如 动态规划框架套路详解 中举的斐波那契的例子，我们的关注点在一棵棵子树的返回值上：

```
int fib(int N) {
    if (N == 1 || N == 2) return 1;
    return fib(N - 1) + fib(N - 2);
}
```



第二个例子，给你一棵二叉树，请你用遍历的思路写一个 `traverse` 函数，打印出遍历这棵二叉树的过程，你看下代码：

```
void traverse(TreeNode root) {
    if (root == null) return;
    printf("从节点 %s 进入节点 %s", root, root.left);
    traverse(root.left);
    printf("从节点 %s 回到节点 %s", root.left, root);

    printf("从节点 %s 进入节点 %s", root, root.right);
    traverse(root.right);
```

```
    printf("从节点 %s 回到节点 %s", root.right, root);
}
```

不难理解吧，好的，我们现在从二叉树进阶成多叉树，代码也是类似的：

```
// 多叉树节点
class Node {
    int val;
    Node[] children;
}

void traverse(Node root) {
    if (root == null) return;
    for (Node child : root.children) {
        printf("从节点 %s 进入节点 %s", root, child);
        traverse(child);
        printf("从节点 %s 回到节点 %s", child, root);
    }
}
```

这个多叉树的遍历框架就可以延伸出 回溯算法框架套路详解 中的回溯算法框架：

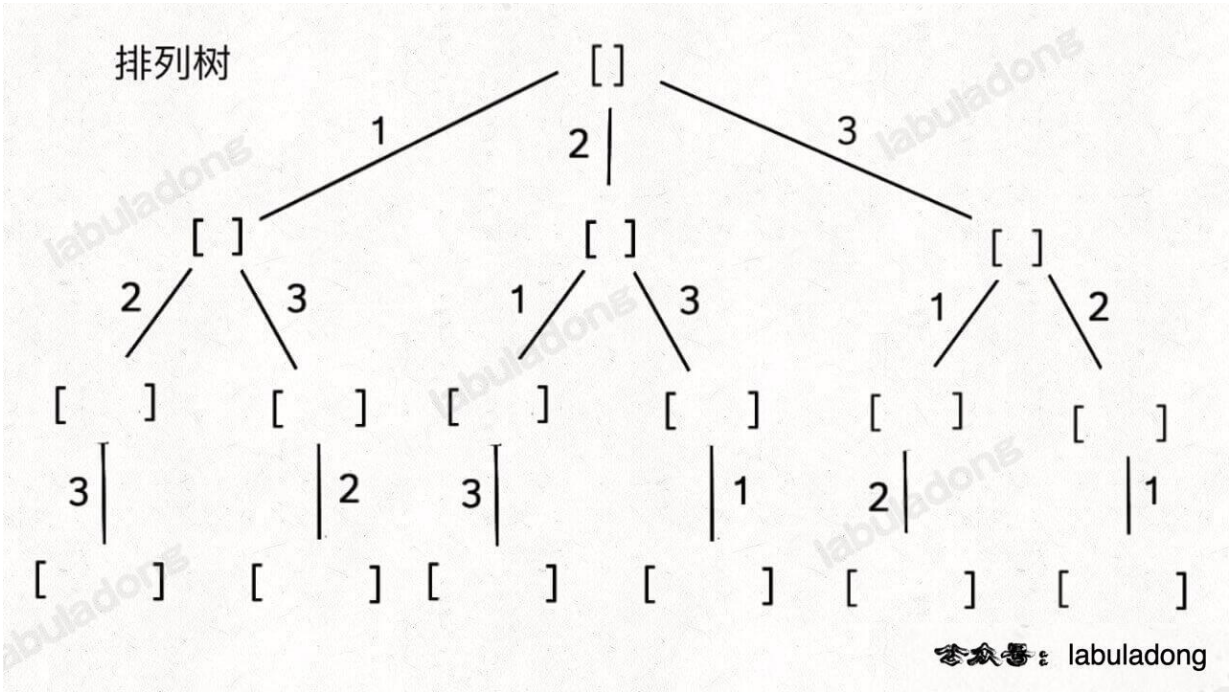
```
void backtrack(...) {
    for (int i = 0; i < ...; i++) {
        // 做选择
        ...

        // 进入下一层决策树
        backtrack(...);

        // 撤销刚才做的选择
        ...
    }
}
```

你看，这就是回溯算法遍历的思路，它的着眼点永远是在节点之间移动的过程，类比到二叉树上就是「树枝」。

你再看看具体的回溯算法问题，比如 回溯算法秒杀排列组合子集的九种题型 中讲到的全排列，我们的关注点在一条条树枝上：

```
// 回溯算法核心部分代码
void backtrack(int[] nums) {
    // 回溯算法框架
    for (int i = 0; i < nums.length; i++) {
        // 做选择
        used[i] = true;
```

```
            track.addLast(nums[i]);

            // 进入下一层回溯树
            backtrack(nums);

            // 取消选择
            track.removeLast();
            used[i] = false;
        }
    }
```



第三个例子，我给你一棵二叉树，请你写一个 `traverse` 函数，把这棵二叉树上的每个节点的值都加一。很简单吧，代码如下：

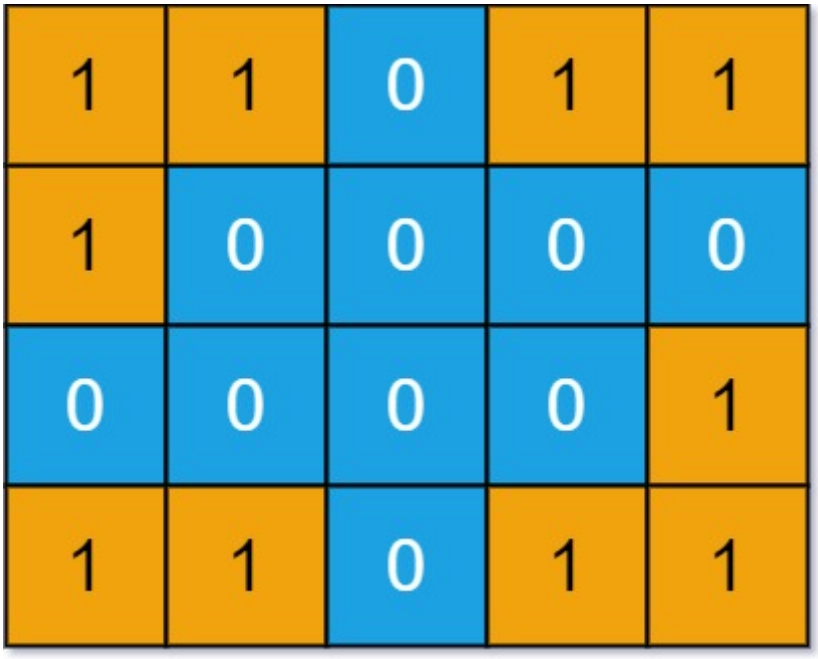
```
void traverse(TreeNode root) {
    if (root == null) return;
    // 遍历过的每个节点的值加一
    root.val++;
    traverse(root.left);
    traverse(root.right);
}
```

你看，这就是 DFS 算法遍历的思路，它的着眼点永远是在单一的节点上，类比到二叉树上就是处理每个「节点」。

你再看看具体的 DFS 算法问题，比如 一文秒杀所有岛屿题目 中讲的前几道题，我们的关注点是 `grid` 数组的每个格子（节点），我们要对遍历过的格子进行一些处理，所以我说是用 DFS 算法解决这几道题的：

```
// DFS 算法核心逻辑
void dfs(int[][] grid, int i, int j) {
```

```
    int m = grid.length, n = grid[0].length;
    if (i < 0 || j < 0 || i >= m || j >= n) {
        return;
    }
    if (grid[i][j] == 0) {
        return;
    }
    // 遍历过的每个格子标记为 0
    grid[i][j] = 0;
    dfs(grid, i + 1, j);
    dfs(grid, i, j + 1);
    dfs(grid, i - 1, j);
    dfs(grid, i, j - 1);
}
```



好，请你仔细品一下上面三个简单的例子，是不是像我说的：动态规划关注整棵「子树」，回溯算法关注节点间的「树枝」，DFS 算法关注单个「节点」。

有了这些铺垫，你就很容易理解为什么回溯算法和 DFS 算法代码中「做选择」和「撤销选择」的位置不同了，看下面两段代码：

```
// DFS 算法把「做选择」「撤销选择」的逻辑放在 for 循环外面
void dfs(Node root) {
    if (root == null) return;
    // 做选择
    print("我已经进入节点 %s 啦", root)
    for (Node child : root.children) {
        dfs(child);
    }
    // 撤销选择
    print("我将要离开节点 %s 啦", root)
}
```

```
// 回溯算法把「做选择」「撤销选择」的逻辑放在 for 循环里面
void backtrack(Node root) {
    if (root == null) return;
    for (Node child : root.children) {
        // 做选择
        print("我站在节点 %s 到节点 %s 的树枝上", root, child)
        backtrack(child);
        // 撤销选择
        print("我将要离开节点 %s 到节点 %s 的树枝上", child, root)
    }
}
```

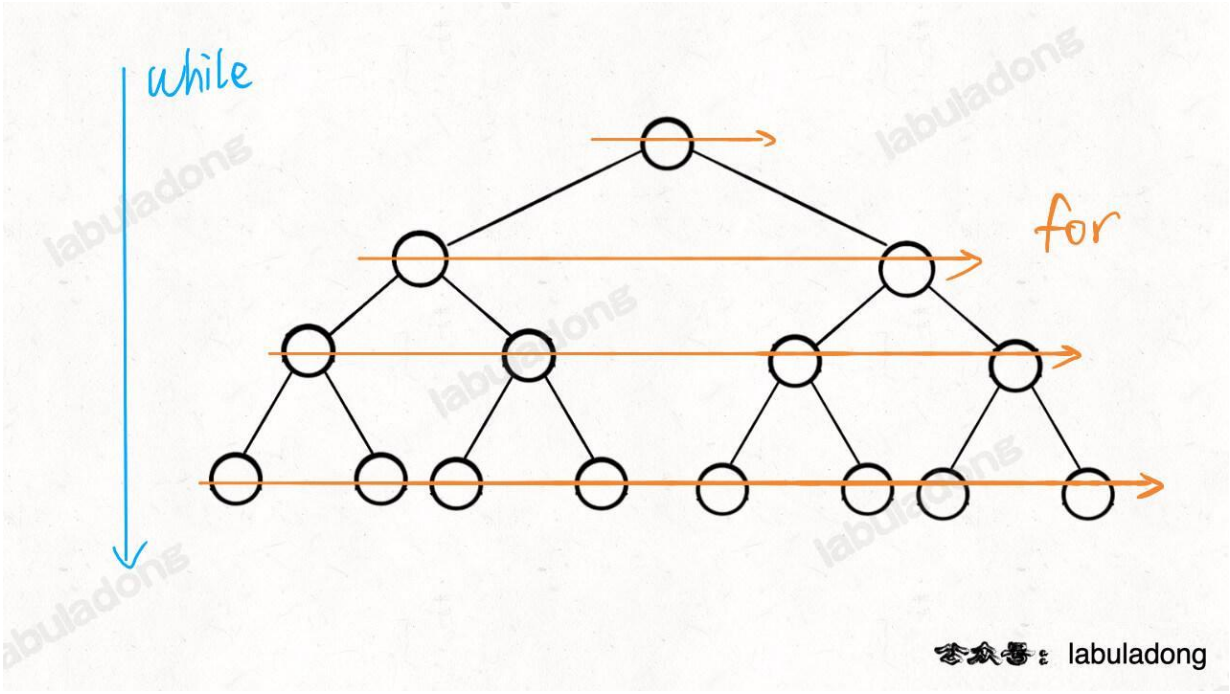
看到了吧，你回溯算法必须把「做选择」和「撤销选择」的逻辑放在 for 循环里面，否则怎么拿到「树枝」的两个端点？

层序遍历

二叉树题型主要是用来培养递归思维的，而层序遍历属于迭代遍历，也比较简单，这里就过一下代码框架吧：

```
// 输入一棵二叉树的根节点，层序遍历这棵二叉树
void levelTraverse(TreeNode root) {
    if (root == null) return;
    Queue<TreeNode> q = new LinkedList<>();
    q.offer(root);

    // 从上到下遍历二叉树的每一层
    while (!q.isEmpty()) {
        int sz = q.size();
        // 从左到右遍历每一层的每个节点
        for (int i = 0; i < sz; i++) {
            TreeNode cur = q.poll();
            // 将下一层节点放入队列
            if (cur.left != null) {
                q.offer(cur.left);
            }
            if (cur.right != null) {
                q.offer(cur.right);
            }
        }
    }
}
```

这里面 while 循环和 for 循环分管从上到下和从左到右的遍历：

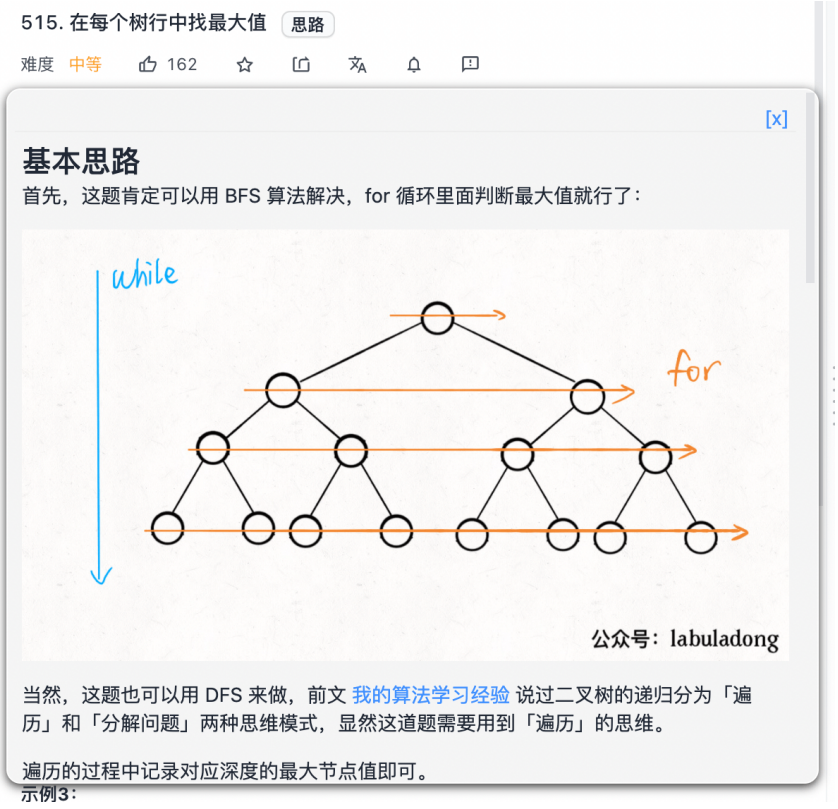


后文 BFS 算法框架 就是从二叉树的层序遍历扩展出来的，常用于求无权图的**最短路径**问题。

当然这个框架还可以灵活修改，题目不需要记录层数（步数）时可以去掉上述框架中的 for 循环，比如后文 Dijkstra 算法 中计算加权图的最短路径问题，详细探讨了 BFS 算法的扩展。

值得一提的是，有些很明显需要用层序遍历技巧的二叉树的题目，也可以用递归遍历的方式去解决，而且技巧性会更强，非常考察你对前中后序的把控。

对于这类问题，我的刷题插件也会同时提供递归遍历和层序遍历的解法代码：



好了，本文已经够长了，围绕前中后序位置算是把二叉树题目里的各种套路给讲透了，真正能运用出来多少，就需要你亲自刷题实践和思考了。

希望大家能探索尽可能多的解法，只要参透二叉树这种基本数据结构的原理，那么就很容易在学习其他高级算法的道路上找到抓手，打通回路，形成闭环（手动狗头）。

最后，我在不断完善刷题插件对二叉树系列题目的支持，在公众号后台回复关键词「**插件**」即可下载，二叉树章节中的 递归专项练习 中会手把手带你运用本文所讲的技巧。

> 思考题答案：文中后序遍历的例题使用了「分解问题」的思路。因为当前节点接收并利用了子树返回的信息，这就意味着你把原问题分解成了当前节点 + 左右子树的子问题。

2022/5/12 更新：

关于层序遍历（以及其扩展出的 BFS 算法框架），我在最后多说几句。

如果你对二叉树足够熟悉，可以想到很多方式通过递归函数得到层序遍历结果，比如下面这种写法：

```
class Solution {
    List<List<Integer>> res = new ArrayList<>();

    List<List<Integer>> levelTraverse(TreeNode root) {
        if (root == null) {
            return res;
        }
        // root 视为第 0 层
        traverse(root, 0);
        return res;
    }

    void traverse(TreeNode root, int depth) {
        if (root == null) {
            return;
        }
        // 前序位置，看看是否已经存储 depth 层的节点了
        if (res.size() <= depth) {
            // 第一次进入 depth 层
            res.add(new LinkedList<>());
        }
        // 前序位置，在 depth 层添加 root 节点的值
        res.get(depth).add(root.val);
        traverse(root.left, depth + 1);
        traverse(root.right, depth + 1);
    }
}
```

这种思路从结果上说确实可以得到层序遍历结果，但其本质还是二叉树的前序遍历，或者说 DFS 的思路，而不是层序遍历，或者说 BFS 的思路。因为这个解法是依赖前序遍历自顶向下、自左向右的顺序特点得到了正确的结果。

抽象点说，这个解法更像是从左到右的「列序遍历」，而不是自顶向下的「层序遍历」。所以对于计算最小距离的场景，这个解法完全等同于 DFS 算法，没有 BFS 算法的性能的优势。

还有优秀读者评论了这样一种递归进行层序遍历的思路：

```
class Solution {

    List<List<Integer>> res = new LinkedList<>();

    List<List<Integer>> levelTraverse(TreeNode root) {
        if (root == null) {
            return res;
        }
        List<TreeNode> nodes = new LinkedList<>();
        nodes.add(root);
        traverse(nodes);
        return res;
    }

    void traverse(List<TreeNode> curLevelNodes) {
        // base case
        if (curLevelNodes.isEmpty()) {
            return;
        }
        // 前序位置，计算当前层的值和下一层的节点列表
        List<Integer> nodeValues = new LinkedList<>();
        List<TreeNode> nextLevelNodes = new LinkedList<>();
        for (TreeNode node : curLevelNodes) {
            nodeValues.add(node.val);
            if (node.left != null) {
                nextLevelNodes.add(node.left);
            }
            if (node.right != null) {
                nextLevelNodes.add(node.right);
            }
        }
        // 前序位置添加结果，可以得到自顶向下的层序遍历
        res.add(nodeValues);
        traverse(nextLevelNodes);
        // 后序位置添加结果，可以得到自底向上的层序遍历结果
        // res.add(nodeValues);
    }
}
```

这个 `traverse` 函数很像递归遍历单链表的函数，其实就是把二叉树的每一层抽象理解成单链表的一个节点进行遍历。

相较上一个递归解法，这个递归解法是自顶向下的「层序遍历」，更接近 BFS 的奥义，可以作为 BFS 算法的递归实现扩展一下思维。

如果你有高质量的问题，可以 点击这里 进入本文的讨论区。

▶ 引用本文的题目

安装 我的 Chrome 刷题插件 点开下列题目可直接查看解题思路：

LeetCode	力扣
100. Same Tree	100. 相同的树
1008. Construct Binary Search Tree from Preorder Traversal	1008. 前序遍历构造二叉搜索树
101. Symmetric Tree	101. 对称二叉树
1022. Sum of Root To Leaf Binary Numbers	1022. 从根到叶的二进制数之和
1026. Maximum Difference Between Node and Ancestor	1026. 节点与其祖先之间的最大差值
108. Convert Sorted Array to Binary Search Tree	108. 将有序数组转换为二叉搜索树
1080. Insufficient Nodes in Root to Leaf Paths	1080. 根到叶路径上的不足节点
110. Balanced Binary Tree	110. 平衡二叉树
111. Minimum Depth of Binary Tree	111. 二叉树的最小深度
1110. Delete Nodes And Return Forest	1110. 删点成林
1120. Maximum Average Subtree🔒	1120. 子树的最大平均值🔒
113. Path Sum II	113. 路径总和 II
114. Flatten Binary Tree to Linked List	114. 二叉树展开为链表
116. Populating Next Right Pointers in Each Node	116. 填充每个节点的下一个右侧节点指针
124. Binary Tree Maximum Path Sum	124. 二叉树中的最大路径和
1245. Tree Diameter🔒	1245. 树的直径🔒
1261. Find Elements in a Contaminated Binary Tree	1261. 在受污染的二叉树中查找元素
129. Sum Root to Leaf Numbers	129. 求根节点到叶节点数字之和
1315. Sum of Nodes with Even-Valued Grandparent	1315. 祖父节点值为偶数的节点和
1325. Delete Leaves With a Given Value	1325. 删除给定值的叶子节点
1339. Maximum Product of Splitted Binary Tree	1339. 分裂二叉树的最大乘积
1367. Linked List in Binary Tree	1367. 二叉树中的链表
1372. Longest ZigZag Path in a Binary Tree	1372. 二叉树中的最长交错路径
1373. Maximum Sum BST in Binary Tree	1373. 二叉搜索子树的最大键值和
1376. Time Needed to Inform All Employees	1376. 通知所有员工所需的时间
1379. Find a Corresponding Node of a Binary Tree in a Clone of That Tree	1379. 找出克隆二叉树中的相同节点

LeetCode	力扣
1430. Check If a String Is a Valid Sequence from Root to Leaves Path in a Binary Tree🔒	1430. 判断给定的序列是否是二叉树从根到叶的路径🔒
1443. Minimum Time to Collect All Apples in a Tree	1443. 收集树上所有苹果的最少时间
1448. Count Good Nodes in Binary Tree	1448. 统计二叉树中好节点的数目
145. Binary Tree Postorder Traversal	145. 二叉树的后序遍历
1457. Pseudo-Palindromic Paths in a Binary Tree	1457. 二叉树中的伪回文路径
1469. Find All The Lonely Nodes🔒	1469. 寻找所有的独生节点🔒
1485. Clone Binary Tree With Random Pointer🔒	1485. 克隆含随机指针的二叉树🔒
1490. Clone N-ary Tree🔒	1490. 克隆 N 叉树🔒
1602. Find Nearest Right Node in Binary Tree🔒	1602. 找到二叉树中最近的右侧节点🔒
1612. Check If Two Expression Trees are Equivalent🔒	1612. 检查两棵二叉表达式树是否等价🔒
1740. Find Distance in a Binary Tree🔒	1740. 找到二叉树中的距离🔒
2049. Count Nodes With the Highest Score	2049. 统计最高分的节点数目
226. Invert Binary Tree	226. 翻转二叉树
250. Count Univalue Subtrees🔒	250. 统计同值子树🔒
254. Factor Combinations🔒	254. 因子的组合🔒
257. Binary Tree Paths	257. 二叉树的所有路径
267. Palindrome Permutation II🔒	267. 回文排列 II🔒
270. Closest Binary Search Tree Value🔒	270. 最接近的二叉搜索树值🔒
294. Flip Game II🔒	294. 翻转游戏 II🔒
298. Binary Tree Longest Consecutive Sequence🔒	298. 二叉树最长连续序列🔒
301. Remove Invalid Parentheses	301. 删除无效的括号
332. Reconstruct Itinerary	332. 重新安排行程
333. Largest BST Subtree🔒	333. 最大 BST 子树🔒
366. Find Leaves of Binary Tree🔒	366. 寻找二叉树的叶子节点🔒
404. Sum of Left Leaves	404. 左叶子之和
426. Convert Binary Search Tree to Sorted Doubly Linked List🔒	426. 将二叉搜索树转化为排序的双向链表🔒
437. Path Sum III	437. 路径总和 III
501. Find Mode in Binary Search Tree	501. 二叉搜索树中的众数

LeetCode	力扣
508. Most Frequent Subtree Sum	508. 出现次数最多的子树元素和
513. Find Bottom Left Tree Value	513. 找树左下角的值
515. Find Largest Value in Each Tree Row	515. 在每个树行中找最大值
530. Minimum Absolute Difference in BST	530. 二叉搜索树的最小绝对差
538. Convert BST to Greater Tree	538. 把二叉搜索树转换为累加树
549. Binary Tree Longest Consecutive Sequence II🔒	549. 二叉树中最长的连续序列🔒
559. Maximum Depth of N-ary Tree	559. N 叉树的最大深度
563. Binary Tree Tilt	563. 二叉树的坡度
572. Subtree of Another Tree	572. 另一棵树的子树
582. Kill Process🔒	582. 杀掉进程🔒
606. Construct String from Binary Tree	606. 根据二叉树创建字符串
617. Merge Two Binary Trees	617. 合并二叉树
623. Add One Row to Tree	623. 在二叉树中增加一行
654. Maximum Binary Tree	654. 最大二叉树
663. Equal Tree Partition🔒	663. 均匀树划分🔒
666. Path Sum IV🔒	666. 路径总和 IV🔒
669. Trim a Binary Search Tree	669. 修剪二叉搜索树
671. Second Minimum Node In a Binary Tree	671. 二叉树中第二小的节点
687. Longest Univalue Path	687. 最长同值路径
776. Split BST🔒	776. 拆分二叉搜索树🔒
865. Smallest Subtree with all the Deepest Nodes	865. 具有所有最深节点的最小子树
894. All Possible Full Binary Trees	894. 所有可能的真二叉树
897. Increasing Order Search Tree	897. 递增顺序搜索树
938. Range Sum of BST	938. 二叉搜索树的范围和
951. Flip Equivalent Binary Trees	951. 翻转等价二叉树
965. Univalued Binary Tree	965. 单值二叉树
968. Binary Tree Cameras	968. 监控二叉树
971. Flip Binary Tree To Match Preorder Traversal	971. 翻转二叉树以匹配先序遍历
979. Distribute Coins in Binary Tree	979. 在二叉树中分配硬币
987. Vertical Order Traversal of a Binary Tree	987. 二叉树的垂序遍历

LeetCode	力扣
988. Smallest String Starting From Leaf	988. 从叶结点开始的最小字符串
99. Recover Binary Search Tree	99. 恢复二叉搜索树
993. Cousins in Binary Tree	993. 二叉树的堂兄弟节点
998. Maximum Binary Tree II	998. 最大二叉树 II
-	剑指 Offer 06. 从尾到头打印链表
-	剑指 Offer 26. 树的子结构
-	剑指 Offer 27. 二叉树的镜像
-	剑指 Offer 28. 对称的二叉树
-	剑指 Offer 33. 二叉搜索树的后序遍历序列
-	剑指 Offer 34. 二叉树中和为某一值的路径
-	剑指 Offer 36. 二叉搜索树与双向链表
-	剑指 Offer 55 - I. 二叉树的深度
-	剑指 Offer 55 - II. 平衡二叉树
-	剑指 Offer II 044. 二叉树每层的最大值
-	剑指 Offer II 045. 二叉树最底层最左边的值
-	剑指 Offer II 049. 从根节点到叶节点的路径数字之和
-	剑指 Offer II 050. 向下的路径节点之和
-	剑指 Offer II 051. 节点之和最大的路径
-	剑指 Offer II 052. 展平二叉搜索树
-	剑指 Offer II 054. 所有大于等于节点的值之和

▶ **引用本文的文章**

- Dijkstra 算法模板及应用
- Git原理之最近公共祖先
- labuladong 二叉树（递归）专题课
- 东哥带你刷二叉树（后序篇）
- 东哥带你刷二叉树（序列化篇）
- 东哥带你刷二叉树（思路篇）
- 东哥带你刷二叉树（构造篇）

- 前缀树算法模板秒杀五道算法题
- 动态规划和回溯算法的思维转换
- 可视化代码编辑器使用指南
- 后序遍历的妙用
- 回溯算法秒杀所有排列/组合/子集问题
- 回溯算法解题套路框架
- 图论基础及遍历算法
- 归并排序详解及应用
- 我的刷题心得：算法的本质
- 本站简介
- 算法可视化面板简介（必读）
- 算法学习和心流体验

——————————————

更多精品课程可查看 我的网站；扫码查看更多配套学习套件：

东哥带你刷二叉树（思路篇）

Stars 123k 精品课程 查看 知乎 @labuladong B站 @labuladong

微信搜一搜 labuladong公众号

学算法认准 labuladong，致力于把算法讲清楚！网页版 点这里。

读完本文，你不仅学会了算法套路，还可以顺便解决如下题目：

LeetCode	力扣	难度
114. Flatten Binary Tree to Linked List	114. 二叉树展开为链表	🟠
116. Populating Next Right Pointers in Each Node	116. 填充每个节点的下一个右侧节点指针	🟠
226. Invert Binary Tree	226. 翻转二叉树	🟢
-	剑指 Offer 27. 二叉树的镜像	🟢

> tip：本文有视频版：二叉树/递归的框架思维（纲领篇）。建议关注我的 B 站账号，我会用视频领读的方式带大家学习那些稍有难度的算法技巧。

本文承接 东哥带你刷二叉树（纲领篇），先复述一下前文总结的二叉树解题总纲：

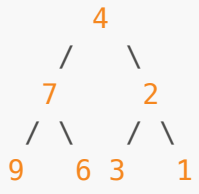
> 二叉树解题的思维模式分两类：
>
> **1、是否可以通过遍历一遍二叉树得到答案**？如果可以，用一个 `traverse` 函数配合外部变量来实现，这叫「遍历」的思维模式。
>
> **2、是否可以定义一个递归函数，通过子问题（子树）的答案推导出原问题的答案**？如果可以，写出这个递归函数的定义，并充分利用这个函数的返回值，这叫「分解问题」的思维模式。
>
> 无论使用哪种思维模式，你都需要思考：
>
> **如果单独抽出一个二叉树节点，它需要做什么事情？需要在什么时候（前/中/后序位置）做**？其他的节点不用你操心，递归函数会帮你在所有节点上执行相同的操作。

本文就以几道比较简单的题目为例，带你实践运用这几条总纲，理解「遍历」的思维和「分解问题」的思维有何区别和联系。

第一题、翻转二叉树

我们先从简单的题开始，看看力扣第 226 题「翻转二叉树」，输入一个二叉树根节点 root，让你把整棵树镜像翻转，比如输入的二叉树如下：

算法原地翻转二叉树，使得以 root 为根的树变成：



不难发现，只要把二叉树上的每一个节点的左右子节点进行交换，最后的结果就是完全翻转之后的二叉树。

那么现在开始在心中默念二叉树解题总纲：

1、这题能不能用「遍历」的思维模式解决？

可以，我写一个 traverse 函数遍历每个节点，让每个节点的左右子节点颠倒过来就行了。

单独抽出一个节点，需要让它做什么？让它把自己的左右子节点交换一下。

需要在什么时候做？好像前中后序位置都可以。

综上，可以写出如下解法代码：

```
// 主函数
TreeNode invertTree(TreeNode root) {
    // 遍历二叉树，交换每个节点的子节点
    traverse(root);
    return root;
}

// 二叉树遍历函数
void traverse(TreeNode root) {
    if (root == null) {
        return;
    }

    /**** 前序位置 ****/
    // 每一个节点需要做的事就是交换它的左右子节点
    TreeNode tmp = root.left;
    root.left = root.right;
    root.right = tmp;
```

```
    // 遍历框架，去遍历左右子树的节点
    traverse(root.left);
    traverse(root.right);
}
```

▶ 🍭 代码可视化动画🍭

你把前序位置的代码移到后序位置也可以，但是直接移到中序位置是不行的，需要稍作修改，这应该很容易看出来吧，我就不说了。

按理说，这道题已经解决了，不过为了对比，我们再继续思考下去。

2、这题能不能用「分解问题」的思维模式解决？

我们尝试给 `invertTree` 函数赋予一个定义：

```
// 定义：将以 root 为根的这棵二叉树翻转，返回翻转后的二叉树的根节点
TreeNode invertTree(TreeNode root);
```

然后思考，对于某一个二叉树节点 `x` 执行 `invertTree(x)`，你能利用这个递归函数的定义做点啥？

我可以用 `invertTree(x.left)` 先把 `x` 的左子树翻转，再用 `invertTree(x.right)` 把 `x` 的右子树翻转，最后把 `x` 的左右子树交换，这恰好完成了以 `x` 为根的整棵二叉树的翻转，即完成了 `invertTree(x)` 的定义。

直接写出解法代码：

```
// 定义：将以 root 为根的这棵二叉树翻转，返回翻转后的二叉树的根节点
TreeNode invertTree(TreeNode root) {
    if (root == null) {
        return null;
    }
    // 利用函数定义，先翻转左右子树
    TreeNode left = invertTree(root.left);
    TreeNode right = invertTree(root.right);

    // 然后交换左右子节点
    root.left = right;
    root.right = left;

    // 和定义逻辑自恰：以 root 为根的这棵二叉树已经被翻转，返回 root
    return root;
}
```

▶ 👾 代码可视化动画👾

这种「分解问题」的思路，核心在于你要给递归函数一个合适的定义，然后用函数的定义来解释你的代码；如果你的逻辑成功自恰，那么说明你这个算法是正确的。

好了，这道题就分析到这，「遍历」和「分解问题」的思路都可以解决，看下一道题。

第二题、填充节点的右侧指针

这是力扣第 116 题「填充每个二叉树节点的右侧指针」，看下题目：

▼ 116. 填充每个节点的下一个右侧节点指针 Leetcode | 力扣

给定一个 **完美二叉树** ，其所有叶子节点都在同一层，每个父节点都有两个子节点。二叉树定义如下：

```
struct Node {
  int val;
  Node *left;
  Node *right;
  Node *next;
}
```

填充它的每个 next 指针，让这个指针指向其下一个右侧节点。如果找不到下一个右侧节点，则将 next 指针设置为 NULL。

初始状态下，所有 next 指针都被设置为 NULL。

示例 1：

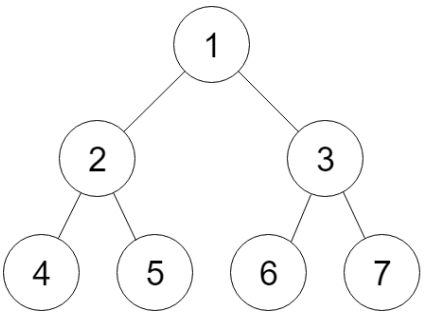


Figure A

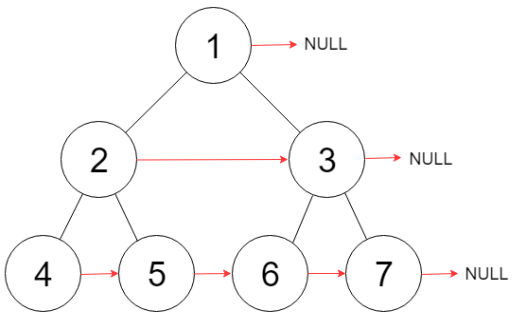


Figure B

输入： `root = [1,2,3,4,5,6,7]`
输出： `[1,#,2,3,#,4,5,6,7,#]`
解释： 给定二叉树如图 `A` 所示，你的函数应该填充它的每个 `next` 指针，以指向其下一个右侧节点，如图 `B` 所示。序列化的输出按层序遍历排列，同一层节点由 `next` 指针连接，`%%%%%#%%%%%` 标志着每一层的结束。

示例 2:

输入： `root = []`
输出： `[]`

提示：

- 树中节点的数量在 $[0, 2^{12} - 1]$ 范围内
- $-1000 <= node.val <= 1000$

进阶：

- 你只能使用常量级额外空间。
- 使用递归解题也符合要求，本题中递归程序占用的栈空间不算做额外的空间复杂度。

函数签名如下：

```
Node connect(Node root);
```

题目的意思就是把二叉树的每一层节点都用 `next` 指针连接起来：

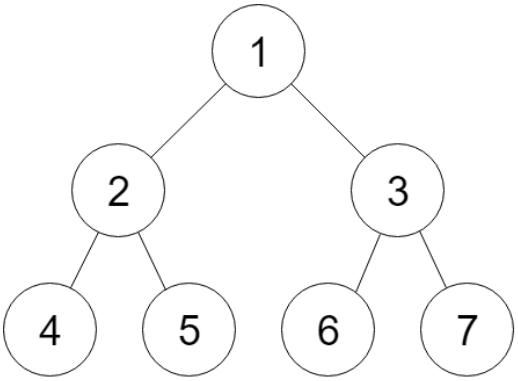


Figure A

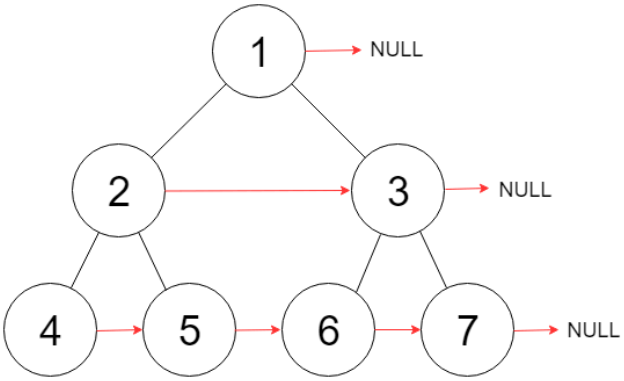


Figure B

而且题目说了，输入是一棵「完美二叉树」，形象地说整棵二叉树是一个正三角形，除了最右侧的节点 `next` 指针会指向 `null`，其他节点的右侧一定有相邻的节点。

这道题怎么做呢？来默念二叉树解题总纲：

1、这题能不能用「遍历」的思维模式解决？

很显然，一定可以。

每个节点要做的事也很简单，把自己的 `next` 指针指向右侧节点就行了。

也许你会模仿上一道题，直接写出如下代码：

```
// 二叉树遍历函数
void traverse(Node root) {
    if (root == null || root.left == null) {
        return;
    }
    // 把左子节点的 next 指针指向右子节点
    root.left.next = root.right;

    traverse(root.left);
```

```
        traverse(root.right);
    }
```

但是，这段代码其实有很大问题，因为它只能把相同父节点的两个节点穿起来，再看看这张图：

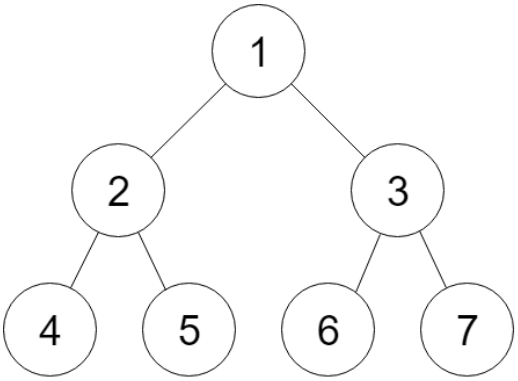


Figure A

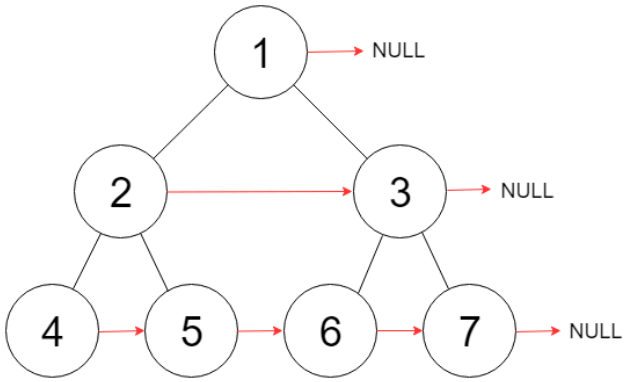
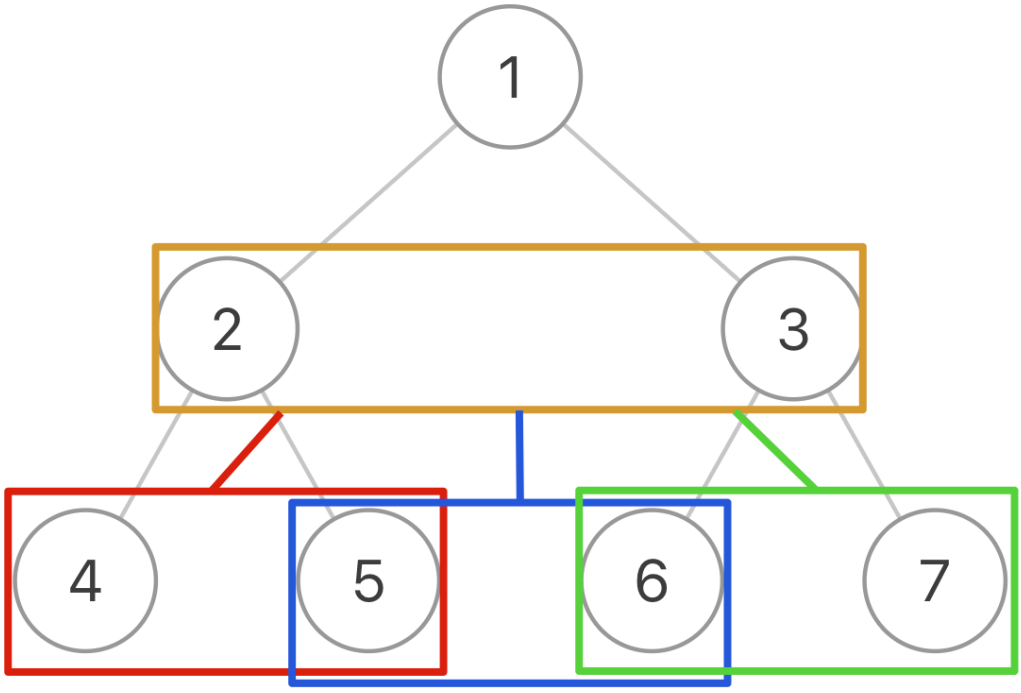


Figure B

节点 5 和节点 6 不属于同一个父节点，那么按照这段代码的逻辑，它俩就没办法被穿起来，这是不符合题意的，但是问题出在哪里？

传统的 `traverse` 函数是遍历二叉树的所有节点，但现在我们想遍历的其实是两个相邻节点之间的「空隙」。

所以我们可以在二叉树的基础上进行抽象，你把图中的每一个方框看做一个节点：



这样，一棵二叉树被抽象成了一棵三叉树，三叉树上的每个节点就是原先二叉树的两个相邻节点。

现在，我们只要实现一个 `traverse` 函数来遍历这棵三叉树，每个「三叉树节点」需要做的事就是把自己内部的两个二叉树节点穿起来：

```
// 主函数
Node connect(Node root) {
    if (root == null) return null;
    // 遍历「三叉树」，连接相邻节点
    traverse(root.left, root.right);
    return root;
}

// 三叉树遍历框架
void traverse(Node node1, Node node2) {
    if (node1 == null || node2 == null) {
        return;
    }
    /**** 前序位置 ****/
    // 将传入的两个节点穿起来
    node1.next = node2;

    // 连接相同父节点的两个子节点
    traverse(node1.left, node1.right);
    traverse(node2.left, node2.right);
    // 连接跨越父节点的两个子节点
    traverse(node1.right, node2.left);
}
```

这样，`traverse` 函数遍历整棵「三叉树」，将所有相邻节的二叉树节点都连接起来，也就避免了我们之前出现的问题，把这道题完美解决。

2、这题能不能用「分解问题」的思维模式解决?

嗯，好像没有什么特别好的思路，所以这道题无法使用「分解问题」的思维来解决。

第三题、将二叉树展开为链表

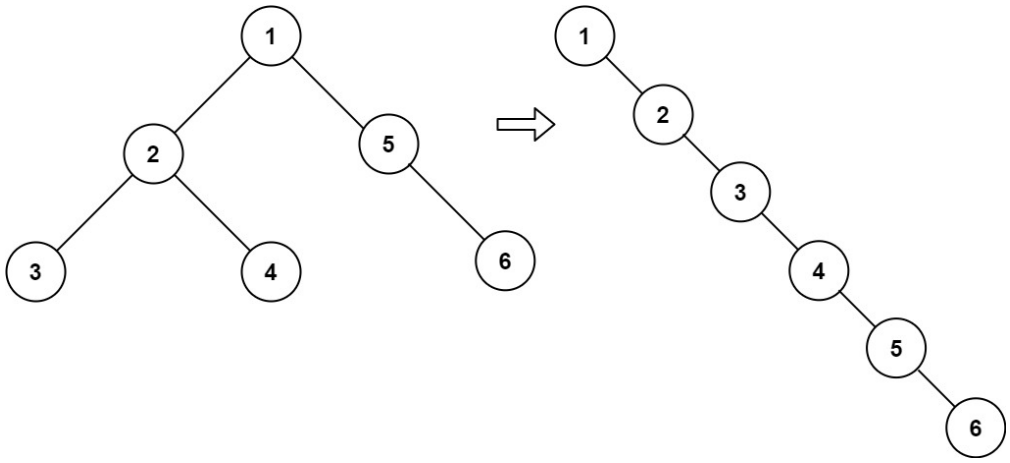
这是力扣第 114 题「将二叉树展开为链表」，看下题目：

▼ 114. 二叉树展开为链表 Leetcode | 力扣

给你二叉树的根结点 `root` ，请你将它展开为一个单链表：

- 展开后的单链表应该同样使用 `TreeNode` ，其中 `right` 子指针指向链表中下一个结点，而左子指针始终为 `null` 。
- 展开后的单链表应该与二叉树 **先序遍历** 顺序相同。

示例 1：




```
输入：root = [1,2,5,3,4,null,6]
输出：[1,null,2,null,3,null,4,null,5,null,6]
```

示例 2：

```
输入：root = []
输出：[]
```

示例 3：

```
输入：root = [0]
输出：[0]
```

提示：

- 树中结点数在范围 `[0, 2000]` 内
- `-100 <= node.val <="100</code">`

进阶：你可以使用原地算法（`O(1)` 额外空间）展开这棵树吗？

函数签名如下：

```
void flatten(TreeNode root);
```

1、这题能不能用「遍历」的思维模式解决？

乍一看感觉是可以的：对整棵树进行前序遍历，一边遍历一边构造出一条「链表」就行了：

```
// 虚拟头节点，dummy.right 就是结果
TreeNode dummy = new TreeNode(-1);
// 用来构建链表的指针
```

```
TreeNode p = dummy;

void traverse(TreeNode root) {
    if (root == null) {
        return;
    }
    // 前序位置
    p.right = new TreeNode(root.val);
    p = p.right;

    traverse(root.left);
    traverse(root.right);
}
```

但是注意 `flatten` 函数的签名，返回类型为 `void`，也就是说题目希望我们在原地把二叉树拉平成链表。

这样一来，没办法通过简单的二叉树遍历来解决这道题了。

2、这题能不能用「分解问题」的思维模式解决？

我们尝试给出 `flatten` 函数的定义：

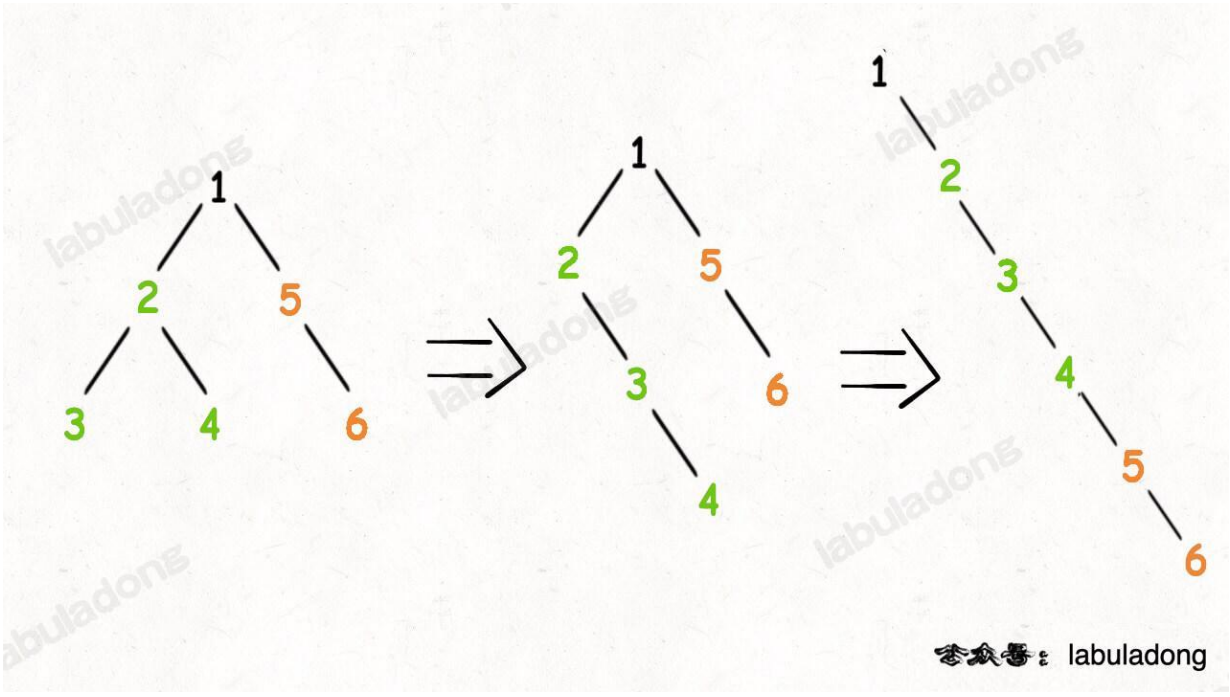
```
// 定义：输入节点 root，然后 root 为根的二叉树就会被拉平为一条链表
void flatten(TreeNode root);
```

有了这个函数定义，如何按题目要求把一棵树拉平成一条链表？

对于一个节点 `x`，可以执行以下流程：

1、先利用 `flatten(x.left)` 和 `flatten(x.right)` 将 `x` 的左右子树拉平。

2、将 `x` 的右子树接到左子树下方，然后将整个左子树作为右子树。



这样，以 x 为根的整棵二叉树就被拉平了，恰好完成了 flatten(x) 的定义。

直接看代码实现：

```
// 定义：将以 root 为根的树拉平为链表
void flatten(TreeNode root) {
    // base case
    if (root == null) return;

    // 利用定义，把左右子树拉平
    flatten(root.left);
    flatten(root.right);

    /**** 后序遍历位置 ****/
    // 1、左右子树已经被拉平成一条链表
    TreeNode left = root.left;
    TreeNode right = root.right;

    // 2、将左子树作为右子树
    root.left = null;
    root.right = left;

    // 3、将原先的右子树接到当前右子树的末端
    TreeNode p = root;
    while (p.right != null) {
        p = p.right;
    }
    p.right = right;
}
```

▶ 🥰 代码可视化动画🥰

你看，这就是递归的魅力，你说 flatten 函数是怎么把左右子树拉平的？

不容易说清楚，但是只要知道 flatten 的定义如此并利用这个定义，让每一个节点做它该做的事情，然后 flatten 函数就会按照定义工作。

至此，这道题也解决了，我们前文 k个一组翻转链表 的递归思路和本题也有一些类似。

最后，首尾呼应，再次默写二叉树解题总纲。

二叉树解题的思维模式分两类：

1、是否可以通过遍历一遍二叉树得到答案？如果可以，用一个 traverse 函数配合外部变量来实现，这叫「遍历」的思维模式。

2、是否可以定义一个递归函数，通过子问题（子树）的答案推导出原问题的答案？如果可以，写出这个递归函数的定义，并充分利用这个函数的返回值，这叫「分解问题」的思维模式。

无论使用哪种思维模式，你都需要思考：

如果单独抽出一个二叉树节点，它需要做什么事情？需要在什么时候（前/中/后序位置）做？其他的节点不用你操心，递归函数会帮你在所有节点上执行相同的操作。

希望你能仔细体会，并运用到所有二叉树题目上。

本文就到这里，更多经典的二叉树习题以及递归思维的训练，请参见二叉树章节中的 递归专项练习。

如果你有高质量的问题，可以 点击这里 进入本文的讨论区。

▶ 引用本文的题目

安装 我的 Chrome 刷题插件 点开下列题目可直接查看解题思路：

LeetCode	力扣
-	剑指 Offer 26. 树的子结构
-	剑指 Offer 27. 二叉树的镜像

▶ 引用本文的文章

- 东哥带你刷二叉搜索树（构造篇）
- 东哥带你刷二叉搜索树（特性篇）
- 东哥带你刷二叉树（构造篇）
- 二叉树的递归转迭代的代码框架
- 分治算法详解：运算优先级
- 动态规划和回溯算法的思维转换
- 后序遍历的妙用
- 归并排序详解及应用

——————————————————

更多精品课程可查看 我的网站；扫码查看更多配套学习套件：

算法学习网站：https://labuladong.gitee.io/algo/ 或 https://labuladong.github.io/algo/

二维码太多，长按识别不到？放大图片 -> 让对应二维码充满屏幕 -> 长按识别该二维码

东哥带你刷二叉树（构造篇）

Stars 123k 精品课程 查看 知乎 @labuladong B站 @labuladong

学算法认准 labuladong，致力于把算法讲清楚！网页版 点这里。

读完本文，你不仅学会了算法套路，还可以顺便解决如下题目：

LeetCode	力扣	难度
105. Construct Binary Tree from Preorder and Inorder Traversal	105. 从前序与中序遍历序列构造二叉树	🟠
106. Construct Binary Tree from Inorder and Postorder Traversal	106. 从中序与后序遍历序列构造二叉树	🟠
654. Maximum Binary Tree	654. 最大二叉树	🟠
889. Construct Binary Tree from Preorder and Postorder Traversal	889. 根据前序和后序遍历构造二叉树	🟠
-	剑指 Offer 07. 重建二叉树	🟠

本文是承接 东哥带你刷二叉树（纲领篇） 的第二篇文章，先复述一下前文总结的二叉树解题总纲：

> 二叉树解题的思维模式分两类：
>
> **1、是否可以通过遍历一遍二叉树得到答案**？如果可以，用一个 `traverse` 函数配合外部变量来实现，这叫「遍历」的思维模式。
>
> **2、是否可以定义一个递归函数，通过子问题（子树）的答案推导出原问题的答案**？如果可以，写出这个递归函数的定义，并充分利用这个函数的返回值，这叫「分解问题」的思维模式。
>
> 无论使用哪种思维模式，你都需要思考：
>
> **如果单独抽出一个二叉树节点，它需要做什么事情？需要在什么时候（前/中/后序位置）做**？其他的节点不用你操心，递归函数会帮你在所有节点上执行相同的操作。

第一篇文章 东哥带你刷二叉树（思维篇） 讲了「遍历」和「分解问题」两种思维方式，本文讲二叉树的构造类问题。

二叉树的构造问题一般都是使用「分解问题」的思路：构造整棵树 = 根节点 + 构造左子树 + 构造右子树。

接下来直接看题。

构造最大二叉树

先来道简单的，这是力扣第 654 题「最大二叉树」，题目如下：

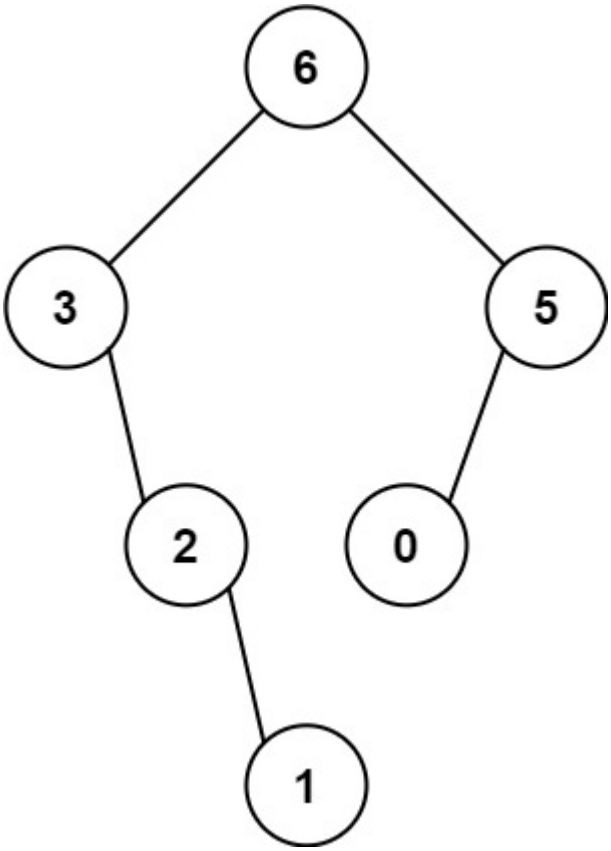
▼ 654. 最大二叉树 Leetcode | 力扣

给定一个不重复的整数数组 `nums` 。 **最大二叉树** 可以用下面的算法从 `nums` 递归地构建:

1. 创建一个根节点，其值为 `nums` 中的最大值。
2. 递归地在最大值 **左边** 的 **子数组前缀上** 构建左子树。
3. 递归地在最大值 **右边** 的 **子数组后缀上** 构建右子树。

返回 *`nums` 构建的* ***最大二叉树*** 。

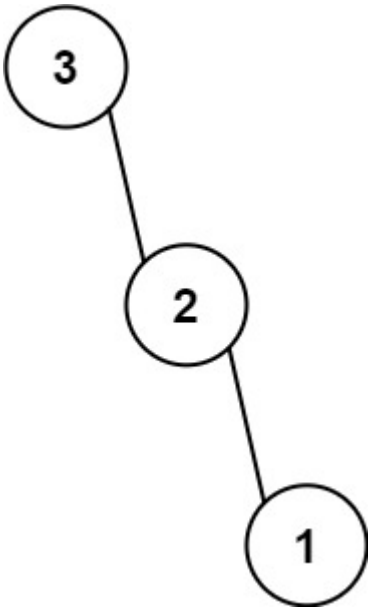
示例 1：



输入： `nums = [3,2,1,6,0,5]`
输出： `[6,3,5,null,2,0,null,null,1]`
解释： 递归调用如下所示：
- `[3,2,1,6,0,5]` 中的最大值是 `6` ，左边部分是 `[3,2,1]` ，右边部分是 `[0,5]` 。
    - `[3,2,1]` 中的最大值是 `3` ，左边部分是 `[]` ，右边部分是 `[2,1]` 。
        - 空数组，无子节点。
        - `[2,1]` 中的最大值是 `2` ，左边部分是 `[]` ，右边部分是 `[1]` 。
            - 空数组，无子节点。
            - 只有一个元素，所以子节点是一个值为 `1` 的节点。
    - `[0,5]` 中的最大值是 `5` ，左边部分是 `[0]` ，右边部分是 `[]` 。

- 只有一个元素，所以子节点是一个值为 0 的节点。
- 空数组，无子节点。

示例 2：



输入： nums = [3,2,1]
输出： [3,null,2,null,1]

提示：

- 1 <= nums.length <= 1000
- 0 <= nums[i] <= 1000
- nums 中的所有整数 **互不相同**

函数签名如下：

```
TreeNode constructMaximumBinaryTree(int[] nums);
```

每个二叉树节点都可以认为是一棵子树的根节点，对于根节点，首先要做的当然是把想办法把自己先构造出来，然后想办法构造自己的左右子树。

所以，我们要遍历数组把找到最大值 maxVal，从而把根节点 root 做出来，然后对 maxVal 左边的数组和右边的数组进行递归构建，作为 root 的左右子树。

按照题目给出的例子，输入的数组为 [3,2,1,6,0,5]，对于整棵树的根节点来说，其实在做这件事：

```
TreeNode constructMaximumBinaryTree([3,2,1,6,0,5]) {
    // 找到数组中的最大值
    TreeNode root = new TreeNode(6);
    // 递归调用构造左右子树
```

```
    root.left = constructMaximumBinaryTree([3,2,1]);
    root.right = constructMaximumBinaryTree([0,5]);
    return root;
}
```

再详细一点，就是如下伪码：

```
TreeNode constructMaximumBinaryTree(int[] nums) {
    if (nums is empty) return null;
    // 找到数组中的最大值
    int maxVal = Integer.MIN_VALUE;
    int index = 0;
    for (int i = 0; i < nums.length; i++) {
        if (nums[i] > maxVal) {
            maxVal = nums[i];
            index = i;
        }
    }

    TreeNode root = new TreeNode(maxVal);
    // 递归调用构造左右子树
    root.left = constructMaximumBinaryTree(nums[0..index-1]);
    root.right = constructMaximumBinaryTree(nums[index+1..nums.length-1]);
    return root;
}
```

当前 `nums` 中的最大值就是根节点，然后根据索引递归调用左右数组构造左右子树即可。

明确了思路，我们可以重新写一个辅助函数 `build`，来控制 `nums` 的索引：

```
/* 主函数 */
TreeNode constructMaximumBinaryTree(int[] nums) {
    return build(nums, 0, nums.length - 1);
}

// 定义：将 nums[lo..hi] 构造成符合条件的树，返回根节点
TreeNode build(int[] nums, int lo, int hi) {
    // base case
    if (lo > hi) {
        return null;
    }

    // 找到数组中的最大值和对应的索引
    int index = -1, maxVal = Integer.MIN_VALUE;
    for (int i = lo; i <= hi; i++) {
        if (maxVal < nums[i]) {
            index = i;
            maxVal = nums[i];
        }
```

```
        }

        // 先构造出根节点
        TreeNode root = new TreeNode(maxVal);
        // 递归调用构造左右子树
        root.left = build(nums, lo, index - 1);
        root.right = build(nums, index + 1, hi);

        return root;
    }
```

▶ 代码可视化动画

至此，这道题就做完了，还是挺简单的对吧，下面看两道更困难一些的。

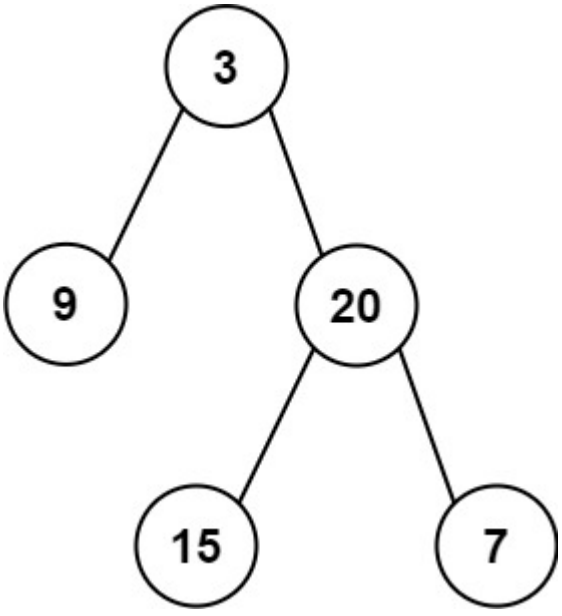
通过前序和中序遍历结果构造二叉树

力扣第 105 题「从前序和中序遍历序列构造二叉树」就是这道经典题目，面试笔试中常考：

▼ 105. 从前序与中序遍历序列构造二叉树 Leetcode | 力扣

给定两个整数数组 `preorder` 和 `inorder` ，其中 `preorder` 是二叉树的**先序遍历**， `inorder` 是同一棵树的**中序遍历**，请构造二叉树并返回其根节点。

示例 1:




```
输入：preorder = [3,9,20,15,7], inorder = [9,3,15,20,7]
输出：[3,9,20,null,null,15,7]
```

示例 2:

```
输入：preorder = [-1], inorder = [-1]
输出：[-1]
```

提示：

- `1 <= preorder.length <= 3000`
- `inorder.length == preorder.length`
- `-3000 <= preorder[i], inorder[i] <= 3000`
- `preorder` 和 `inorder` 均 **无重复** 元素
- `inorder` 均出现在 `preorder`
- `preorder` **保证** 为二叉树的前序遍历序列
- `inorder` **保证** 为二叉树的中序遍历序列

函数签名如下：

```
TreeNode buildTree(int[] preorder, int[] inorder);
```

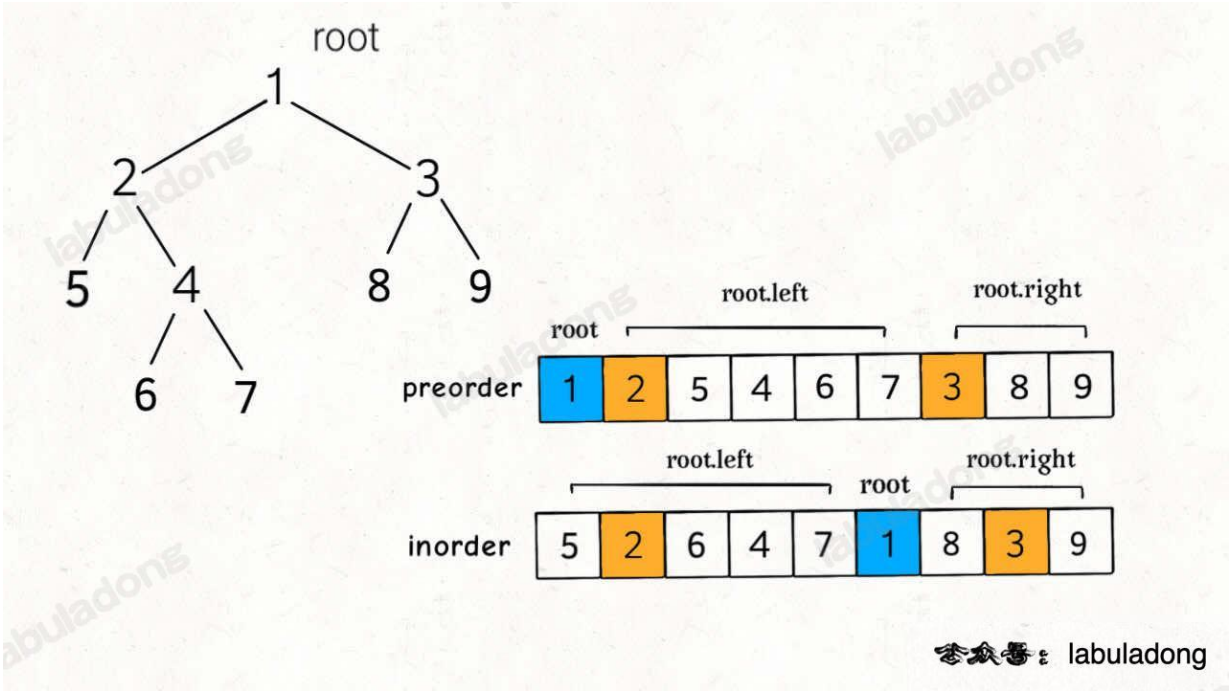
废话不多说，直接来想思路，首先思考，根节点应该做什么。

类似上一题，我们肯定要想办法确定根节点的值，把根节点做出来，然后递归构造左右子树即可。

我们先来回顾一下，前序遍历和中序遍历的结果有什么特点？

```
void traverse(TreeNode root) {
    // 前序遍历
    preorder.add(root.val);
    traverse(root.left);
    traverse(root.right);
}

void traverse(TreeNode root) {
    traverse(root.left);
    // 中序遍历
    inorder.add(root.val);
    traverse(root.right);
}
```

前文 二叉树就那几个框架 写过，这样的遍历顺序差异，导致了 `preorder` 和 `inorder` 数组中的元素分布有如下特点：



找到根节点是很简单的，前序遍历的第一个值 `preorder[0]` 就是根节点的值。

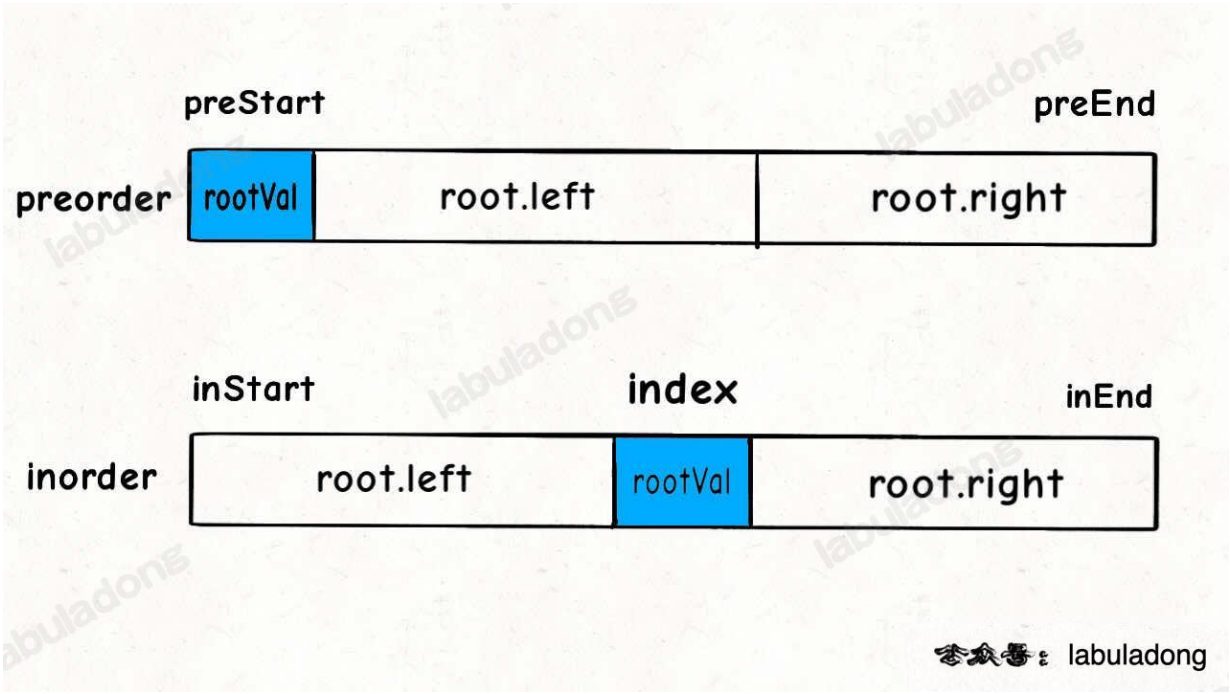
关键在于如何通过根节点的值，将 `preorder` 和 `inorder` 数组划分成两半，构造根节点的左右子树？

换句话说，对于以下代码中的 `?` 部分应该填入什么：

```
/* 主函数 */
public TreeNode buildTree(int[] preorder, int[] inorder) {
    // 根据函数定义，用 preorder 和 inorder 构造二叉树
    return build(preorder, 0, preorder.length - 1,
                 inorder, 0, inorder.length - 1);
}

/*
    build 函数的定义：
    若前序遍历数组为 preorder[preStart..preEnd]，
    中序遍历数组为 inorder[inStart..inEnd]，
    构造二叉树，返回该二叉树的根节点
*/
TreeNode build(int[] preorder, int preStart, int preEnd,
               int[] inorder, int inStart, int inEnd) {
    // root 节点对应的值就是前序遍历数组的第一个元素
    int rootVal = preorder[preStart];
    // rootVal 在中序遍历数组中的索引
    int index = 0;
    for (int i = inStart; i <= inEnd; i++) {
        if (inorder[i] == rootVal) {
            index = i;
            break;
        }
    }

    TreeNode root = new TreeNode(rootVal);
    // 递归构造左右子树
```

```
    root.left = build(preorder, ?, ?,
                      inorder, ?, ?);

    root.right = build(preorder, ?, ?,
                       inorder, ?, ?);
    return root;
}
```

对于代码中的 rootVal 和 index 变量，就是下图这种情况：



另外，也有读者注意到，通过 for 循环遍历的方式去确定 index 效率不算高，可以进一步优化。

因为题目说二叉树节点的值不存在重复，所以可以使用一个 HashMap 存储元素到索引的映射，这样就可以直接通过 HashMap 查到 rootVal 对应的 index：

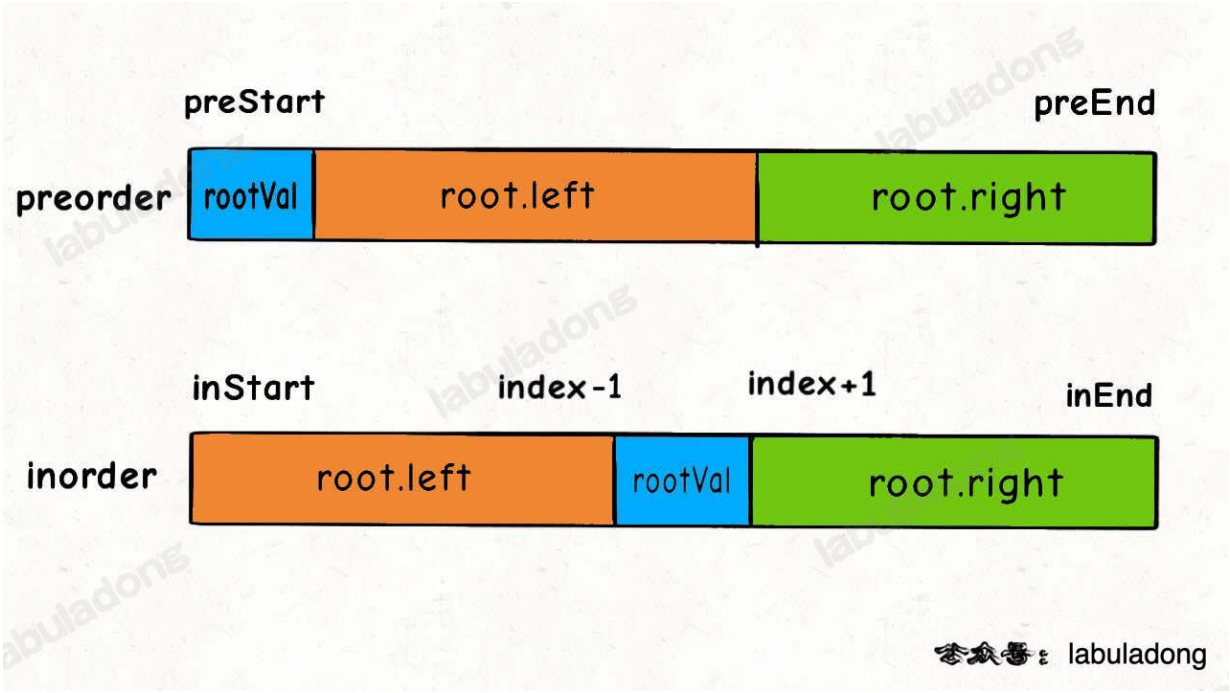
```
// 存储 inorder 中值到索引的映射
HashMap<Integer, Integer> valToIndex = new HashMap<>();

public TreeNode buildTree(int[] preorder, int[] inorder) {
    for (int i = 0; i < inorder.length; i++) {
        valToIndex.put(inorder[i], i);
    }
    return build(preorder, 0, preorder.length - 1,
                 inorder, 0, inorder.length - 1);
}


TreeNode build(int[] preorder, int preStart, int preEnd,
               int[] inorder, int inStart, int inEnd) {
    int rootVal = preorder[preStart];
    // 避免 for 循环寻找 rootVal
    int index = valToIndex.get(rootVal);
```

```
    // ...
}
```

现在我们来看图做填空题，下面这几个问号处应该填什么：

```
root.left = build(preorder, ?, ?,
                  inorder, ?, ?);

root.right = build(preorder, ?, ?,
                   inorder, ?, ?);
```

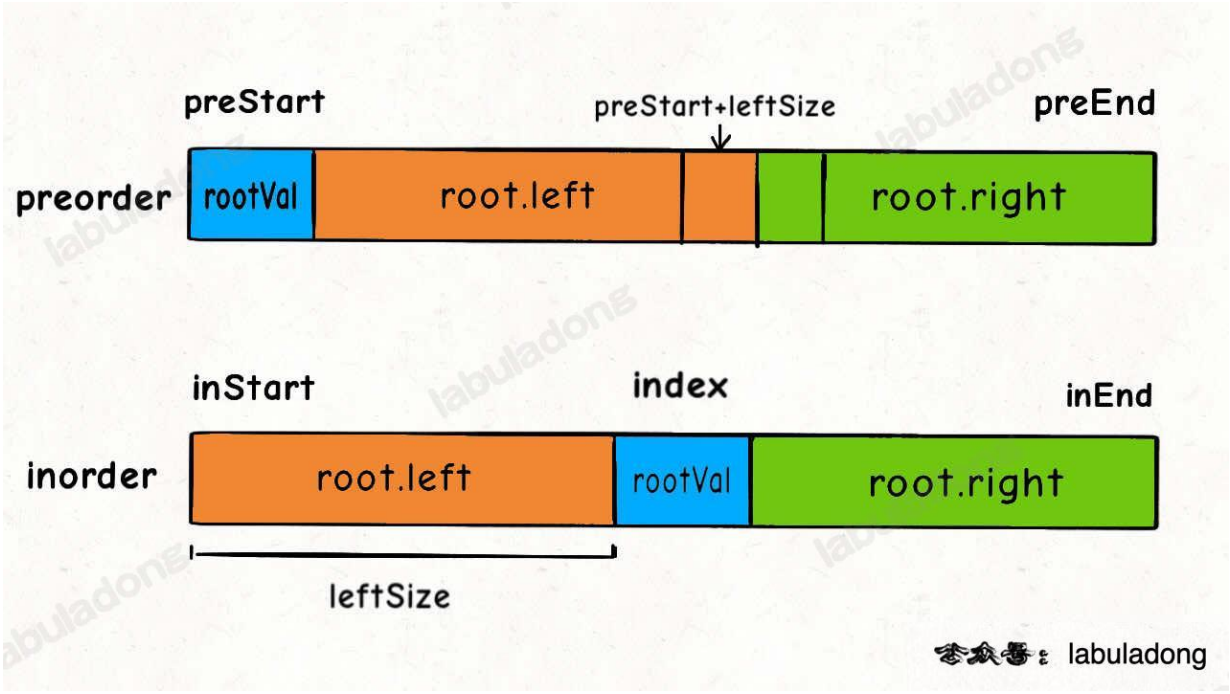
对于左右子树对应的 `inorder` 数组的起始索引和终止索引比较容易确定：




```
root.left = build(preorder, ?, ?,
                  inorder, inStart, index - 1);

root.right = build(preorder, ?, ?,
                   inorder, index + 1, inEnd);
```

对于 `preorder` 数组呢？如何确定左右数组对应的起始索引和终止索引？

这个可以通过左子树的节点数推导出来，假设左子树的节点数为 `leftSize`，那么 `preorder` 数组上的索引情况是这样的：



看着这个图就可以把 `preorder` 对应的索引写进去了：

```
int leftSize = index - inStart;

root.left = build(preorder, preStart + 1, preStart + leftSize,
                  inorder, inStart, index - 1);

root.right = build(preorder, preStart + leftSize + 1, preEnd,
                   inorder, index + 1, inEnd);
```

至此，整个算法思路就完成了，我们再补一补 base case 即可写出解法代码：

```
TreeNode build(int[] preorder, int preStart, int preEnd,
               int[] inorder, int inStart, int inEnd) {

    if (preStart > preEnd) {
        return null;
    }

    // root 节点对应的值就是前序遍历数组的第一个元素
    int rootVal = preorder[preStart];
    // rootVal 在中序遍历数组中的索引
    int index = valToIndex.get(rootVal);

    int leftSize = index - inStart;

    // 先构造出当前根节点
    TreeNode root = new TreeNode(rootVal);
    // 递归构造左右子树
    root.left = build(preorder, preStart + 1, preStart + leftSize,
                      inorder, inStart, index - 1);
```

```
        root.right = build(preorder, preStart + leftSize + 1, preEnd,
                           inorder, index + 1, inEnd);
        return root;
    }
```

我们的主函数只要调用 `build` 函数即可，你看着函数这么多参数，解法这么多代码，似乎比我们上面讲的那道题难很多，让人望而生畏，实际上呢，这些参数无非就是控制数组起止位置的，画个图就能解决了。

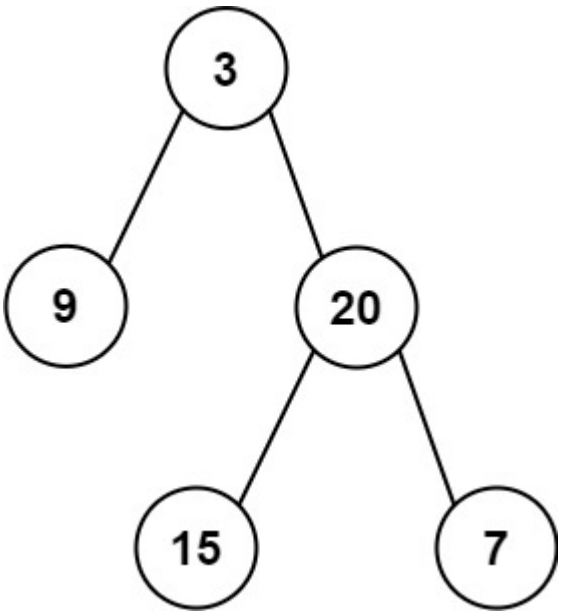
通过后序和中序遍历结果构造二叉树

类似上一题，这次我们利用**后序**和**中序**遍历的结果数组来还原二叉树，这是力扣第 106 题「从后序和中序遍历序列构造二叉树」：

▼ 106. 从中序与后序遍历序列构造二叉树 Leetcode | 力扣

给定两个整数数组 `inorder` 和 `postorder` ，其中 `inorder` 是二叉树的中序遍历， `postorder` 是同一棵树的后序遍历，请你构造并返回这颗 *二叉树* 。

示例 1:




```
输入：inorder = [9,3,15,20,7], postorder = [9,15,7,20,3]
输出：[3,9,20,null,null,15,7]
```

示例 2:

```
输入：inorder = [-1], postorder = [-1]
输出：[-1]
```

提示:

- `1 <= inorder.length <= 3000`
- `postorder.length == inorder.length`
- `-3000 <= inorder[i], postorder[i] <= 3000`
- `inorder` 和 `postorder` 都由 **不同** 的值组成
- `postorder` 中每一个值都在 `inorder` 中
- `inorder` **保证**是树的中序遍历
- `postorder` **保证**是树的后序遍历

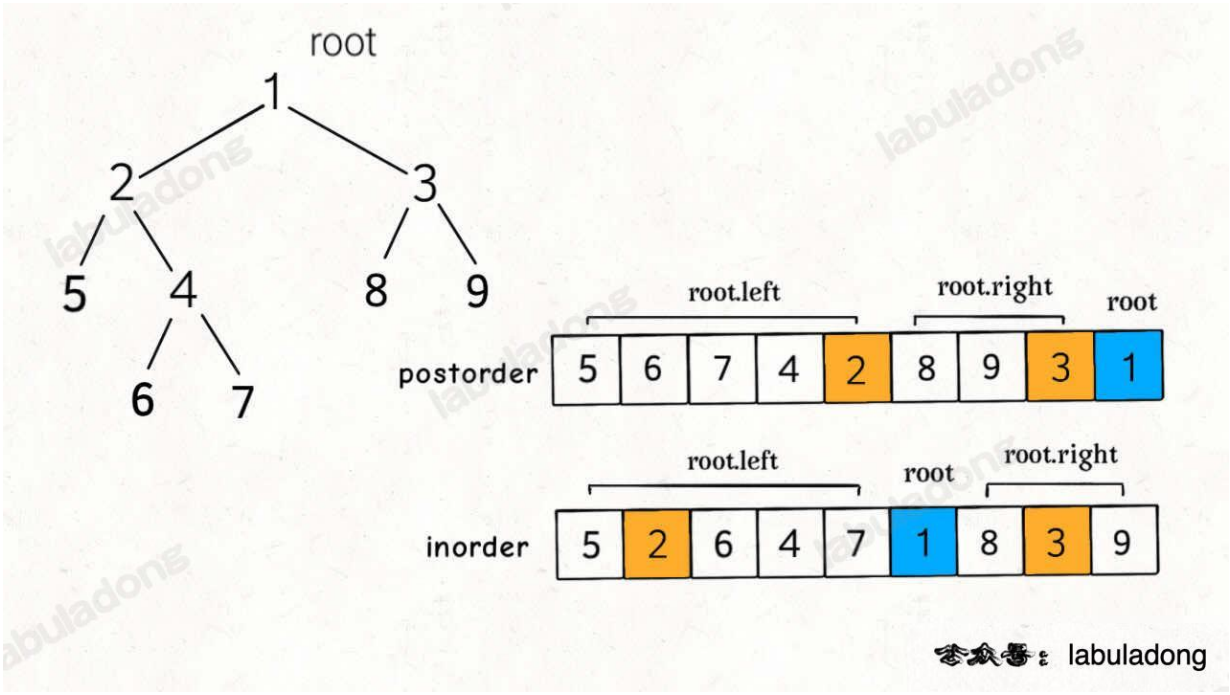
函数签名如下：

```
TreeNode buildTree(int[] inorder, int[] postorder);
```

类似的，看下后序和中序遍历的特点：

```
void traverse(TreeNode root) {
    traverse(root.left);
    traverse(root.right);
    // 后序遍历
    postorder.add(root.val);
}

void traverse(TreeNode root) {
    traverse(root.left);
    // 中序遍历
    inorder.add(root.val);
    traverse(root.right);
}
```

这样的遍历顺序差异，导致了 `postorder` 和 `inorder` 数组中的元素分布有如下特点：

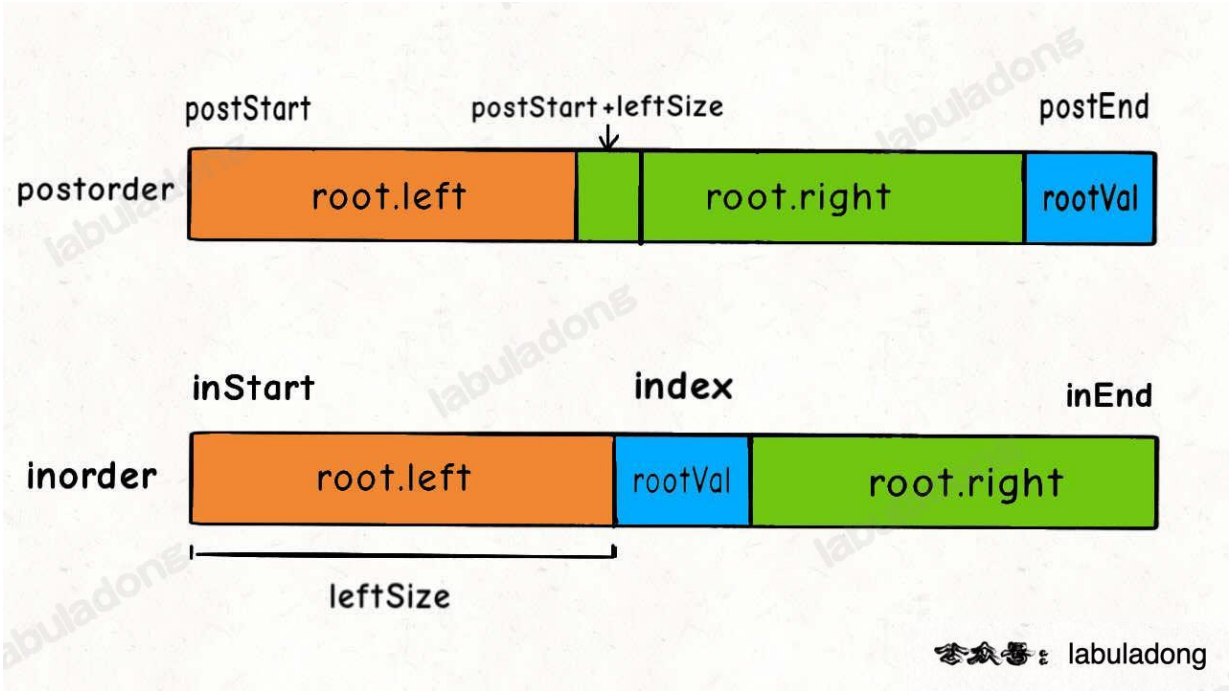


这道题和上一题的关键区别是，后序遍历和前序遍历相反，根节点对应的值为 postorder 的最后一个元素。

整体的算法框架和上一题非常类似，我们依然写一个辅助函数 build：

```
// 存储 inorder 中值到索引的映射
HashMap<Integer, Integer> valToIndex = new HashMap<>();

TreeNode buildTree(int[] inorder, int[] postorder) {
    for (int i = 0; i < inorder.length; i++) {
        valToIndex.put(inorder[i], i);
    }
    return build(inorder, 0, inorder.length - 1,
                 postorder, 0, postorder.length - 1);
}

/*
    build 函数的定义：
    后序遍历数组为 postorder[postStart..postEnd]，
    中序遍历数组为 inorder[inStart..inEnd]，
    构造二叉树，返回该二叉树的根节点
*/
TreeNode build(int[] inorder, int inStart, int inEnd,
               int[] postorder, int postStart, int postEnd) {
    // root 节点对应的值就是后序遍历数组的最后一个元素
    int rootVal = postorder[postEnd];
    // rootVal 在中序遍历数组中的索引
    int index = valToIndex.get(rootVal);

    TreeNode root = new TreeNode(rootVal);
    // 递归构造左右子树
    root.left = build(inorder, ?, ?,
                      postorder, ?, ?);

    root.right = build(inorder, ?, ?,
                       postorder, ?, ?);
    return root;
}
```

现在 postoder 和 inorder 对应的状态如下：



我们可以按照上图将问号处的索引正确填入：

```
int leftSize = index - inStart;

root.left = build(inorder, inStart, index - 1,
                  postorder, postStart, postStart + leftSize - 1);

root.right = build(inorder, index + 1, inEnd,
                   postorder, postStart + leftSize, postEnd - 1);
```

综上，可以写出完整的解法代码：

```
TreeNode build(int[] inorder, int inStart, int inEnd,
               int[] postorder, int postStart, int postEnd) {

    if (inStart > inEnd) {
        return null;
    }
    // root 节点对应的值就是后序遍历数组的最后一个元素
    int rootVal = postorder[postEnd];
    // rootVal 在中序遍历数组中的索引
    int index = valToIndex.get(rootVal);
    // 左子树的节点个数
    int leftSize = index - inStart;
    TreeNode root = new TreeNode(rootVal);
    // 递归构造左右子树
    root.left = build(inorder, inStart, index - 1,
                      postorder, postStart, postStart + leftSize - 1);

    root.right = build(inorder, index + 1, inEnd,
                      postorder, postStart + leftSize, postEnd - 1);
```

```
        return root;
    }
```

▶ 🎃 代码可视化动画🎃

有了前一题的铺垫，这道题很快就解决了，无非就是 `rootVal` 变成了最后一个元素，再改改递归函数的参数而已，只要明白二叉树的特性，也不难写出来。

通过后序和前序遍历结果构造二叉树

这是力扣第 889 题「根据前序和后序遍历构造二叉树」，给你输入二叉树的前序和后序遍历结果，让你还原二叉树的结构。

函数签名如下：

```
TreeNode constructFromPrePost(int[] preorder, int[] postorder);
```

这道题和前两道题有一个本质的区别：

通过前序中序，或者后序中序遍历结果可以确定唯一一棵原始二叉树，但是通过前序后序遍历结果无法确定唯一的原始二叉树。

题目也说了，如果有多种可能的还原结果，你可以返回任意一种。

为什么呢？我们说过，构建二叉树的套路很简单，先找到根节点，然后找到并递归构造左右子树即可。

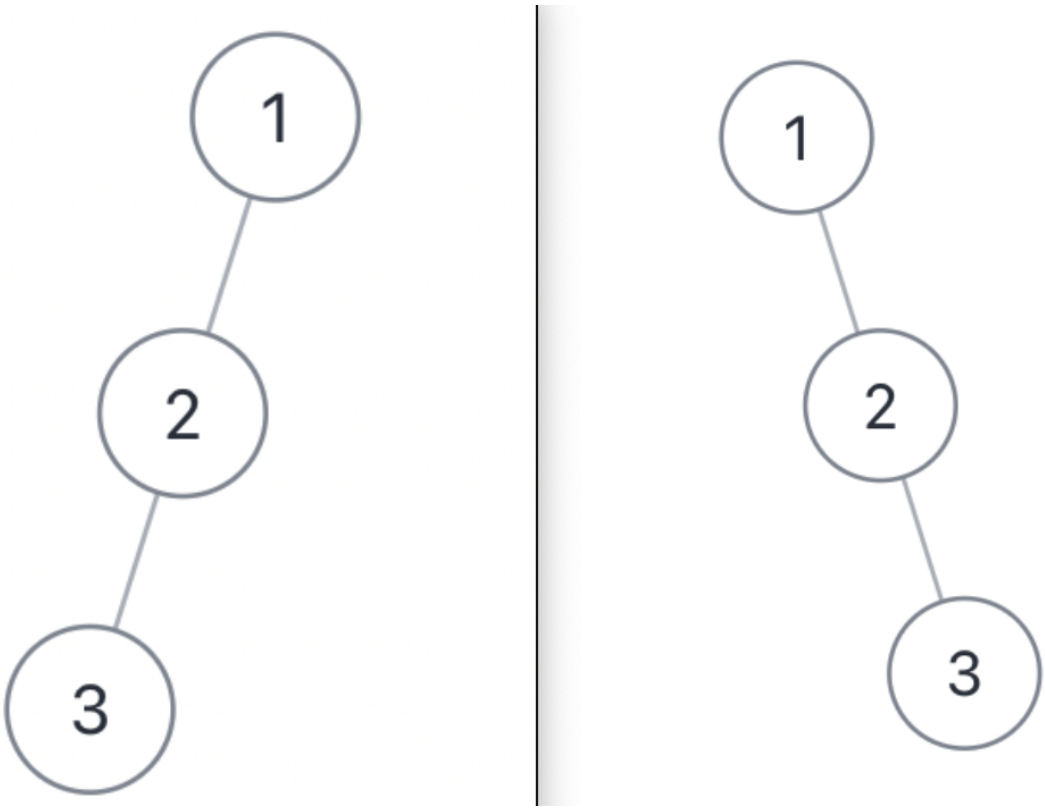
前两道题，可以通过前序或者后序遍历结果找到根节点，然后根据中序遍历结果确定左右子树（题目说了树中没有 `val` 相同的节点）。

这道题，你可以确定根节点，但是无法确切的知道左右子树有哪些节点。

举个例子，比如给你这个输入：

```
preorder = [1,2,3], postorder = [3,2,1]
```

下面这两棵树都是符合条件的，但显然它们的结构不同：

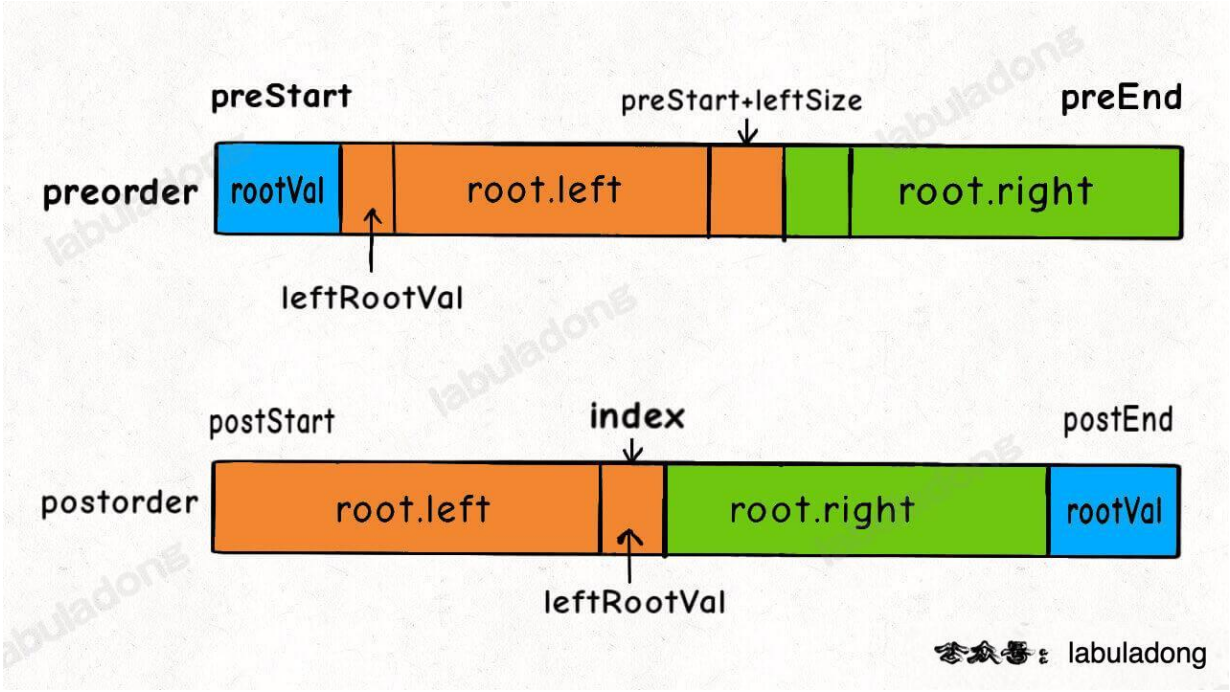


不过话说回来，用后序遍历和前序遍历结果还原二叉树，解法逻辑上和前两道题差别不大，也是通过控制左右子树的索引来构建：

1、首先把前序遍历结果的第一个元素或者后序遍历结果的最后一个元素确定为根节点的值。

2、然后把前序遍历结果的第二个元素作为左子树的根节点的值。

3、在后序遍历结果中寻找左子树根节点的值，从而确定了左子树的索引边界，进而确定右子树的索引边界，递归构造左右子树即可。



详情见代码。

```
class Solution {
    // 存储 postorder 中值到索引的映射
    HashMap<Integer, Integer> valToIndex = new HashMap<>();

    public TreeNode constructFromPrePost(int[] preorder, int[] postorder)
{
        for (int i = 0; i < postorder.length; i++) {
            valToIndex.put(postorder[i], i);
        }
        return build(preorder, 0, preorder.length - 1,
                     postorder, 0, postorder.length - 1);
    }

    // 定义：根据 preorder[preStart..preEnd] 和 postorder[postStart..postEnd]
    // 构建二叉树，并返回根节点。
    TreeNode build(int[] preorder, int preStart, int preEnd,
                   int[] postorder, int postStart, int postEnd) {
        if (preStart > preEnd) {
            return null;
        }
        if (preStart == preEnd) {
            return new TreeNode(preorder[preStart]);
        }

        // root 节点对应的值就是前序遍历数组的第一个元素
        int rootVal = preorder[preStart];
        // root.left 的值是前序遍历第二个元素
        // 通过前序和后序遍历构造二叉树的关键在于通过左子树的根节点
        // 确定 preorder 和 postorder 中左右子树的元素区间
        int leftRootVal = preorder[preStart + 1];
        // leftRootVal 在后序遍历数组中的索引
        int index = valToIndex.get(leftRootVal);
        // 左子树的元素个数
        int leftSize = index - postStart + 1;

        // 先构造出当前根节点
        TreeNode root = new TreeNode(rootVal);
        // 递归构造左右子树
        // 根据左子树的根节点索引和元素个数推导左右子树的索引边界
        root.left = build(preorder, preStart + 1, preStart + leftSize,
                postorder, postStart, index);
        root.right = build(preorder, preStart + leftSize + 1, preEnd,
                postorder, index + 1, postEnd - 1);

        return root;
    }
}
```

▶ 🍭 代码可视化动画🍭

代码和前两道题非常类似，我们可以看着代码思考一下，为什么通过前序遍历和后序遍历结果还原的二叉树可能不唯一呢？

关键在这一句：

```
int leftRootVal = preorder[preStart + 1];
```

我们假设前序遍历的第二个元素是左子树的根节点，但实际上左子树有可能是空指针，那么这个元素就应该是右子树的根节点。由于这里无法确切进行判断，所以导致了最终答案的不唯一。

至此，通过前序和后序遍历结果还原二叉树的问题也解决了。

最后呼应下前文，**二叉树的构造问题一般都是使用「分解问题」的思路：构造整棵树 = 根节点 + 构造左子树 + 构造右子树**。先找出根节点，然后根据根节点的值找到左右子树的元素，进而递归构建出左右子树。

现在你是否明白其中的玄妙了呢？

接下来可阅读：

- 手把手刷二叉树（第三期）

如果你有高质量的问题，可以 点击这里 进入本文的讨论区。

▶ **引用本文的题目**

安装 我的 Chrome 刷题插件 点开下列题目可直接查看解题思路：

LeetCode	力扣
1008. Construct Binary Search Tree from Preorder Traversal	1008. 前序遍历构造二叉搜索树
-	剑指 Offer 07. 重建二叉树
-	剑指 Offer 33. 二叉搜索树的后序遍历序列

▶ **引用本文的文章**

- 东哥带你刷二叉搜索树（特性篇）
- 东哥带你刷二叉树（序列化篇）
- 二叉树的递归转迭代的代码框架
- 我的刷题心得：算法的本质

——————————————

更多精品课程可查看 我的网站；扫码查看更多配套学习套件：

算法学习网站：https://labuladong.gitee.io/algo/ 或 https://labuladong.github.io/algo/

二维码太多，长按识别不到？放大图片 -> 让对应二维码充满屏幕 -> 长按识别该二维码

东哥带你刷二叉树（序列化篇）

Stars 123k 精品课程 查看 知乎 @labuladong B站 @labuladong

微信搜一搜 labuladong公众号

学算法认准 labuladong，致力于把算法讲清楚！网页版 点这里。

读完本文，你不仅学会了算法套路，还可以顺便解决如下题目：

LeetCode	力扣	难度
297. Serialize and Deserialize Binary Tree	297. 二叉树的序列化与反序列化	🔴
-	剑指 Offer 37. 序列化二叉树	🔴
-	剑指 Offer II 048. 序列化与反序列化二叉树	🔴

本文是承接 东哥带你刷二叉树（纲领篇） 的第三篇文章，前文 东哥带你刷二叉树（构造篇） 带你学习了二叉树构造技巧，本文加大难度，让你对二叉树同时进行「序列化」和「反序列化」。

要说序列化和反序列化，得先从 JSON 数据格式说起。

JSON 的运用非常广泛，比如我们经常将变成语言中的结构体序列化成 JSON 字符串，存入缓存或者通过网络发送给远端服务，消费者接受 JSON 字符串然后进行反序列化，就可以得到原始数据了。

这就是序列化和反序列化的目的，以某种特定格式组织数据，使得数据可以独立于编程语言。

那么假设现在有一棵用 Java 实现的二叉树，我想把它通过某些方式存储下来，然后用 C++ 读取这棵并还原这棵二叉树的结构，怎么办？这就需要对二叉树进行序列化和反序列化了。

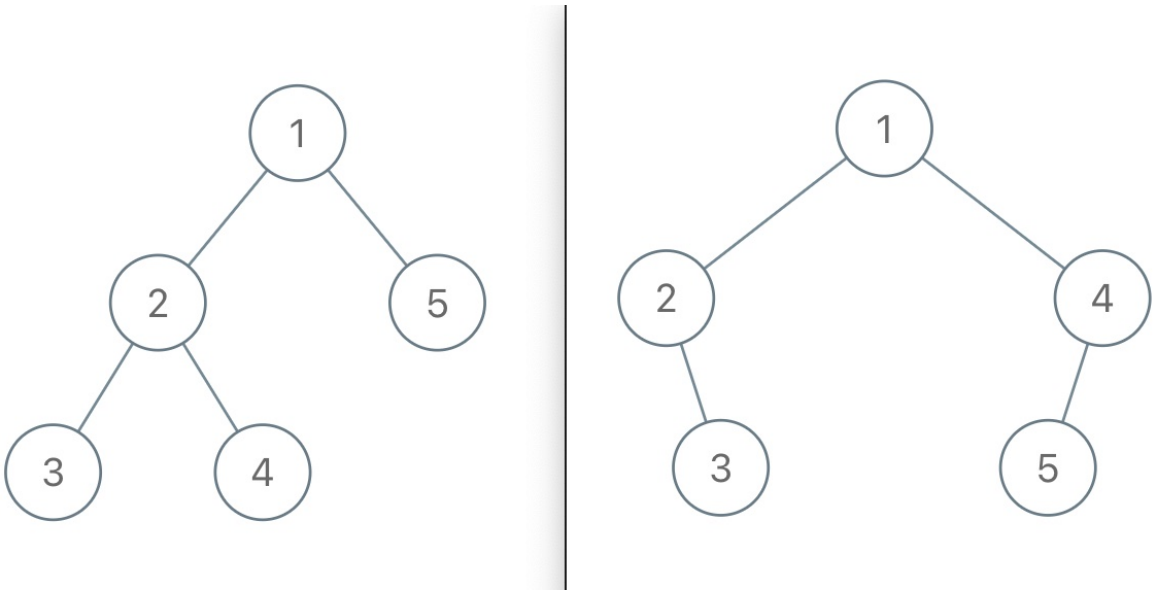
零、前/中/后序和二叉树的唯一性

谈具体的题目之前，我们先思考一个问题：**什么样的序列化的数据可以反序列化出唯一的一棵二叉树**?

比如说，如果给你一棵二叉树的前序遍历结果，你是否能够根据这个结果还原出这棵二叉树呢?

答案是也许可以，也许不可以，具体要看你给的前序遍历结果是否包含空指针的信息。如果包含了空指针，那么就可以唯一确定一棵二叉树，否则就不行。

举例来说，如果我给你这样一个不包含空指针的前序遍历结果 `[1,2,3,4,5]`，那么如下两棵二叉树都是满足这个前序遍历结果的：



所以给定不包含空指针信息的前序遍历结果，是不能还原出唯一的一棵二叉树的。

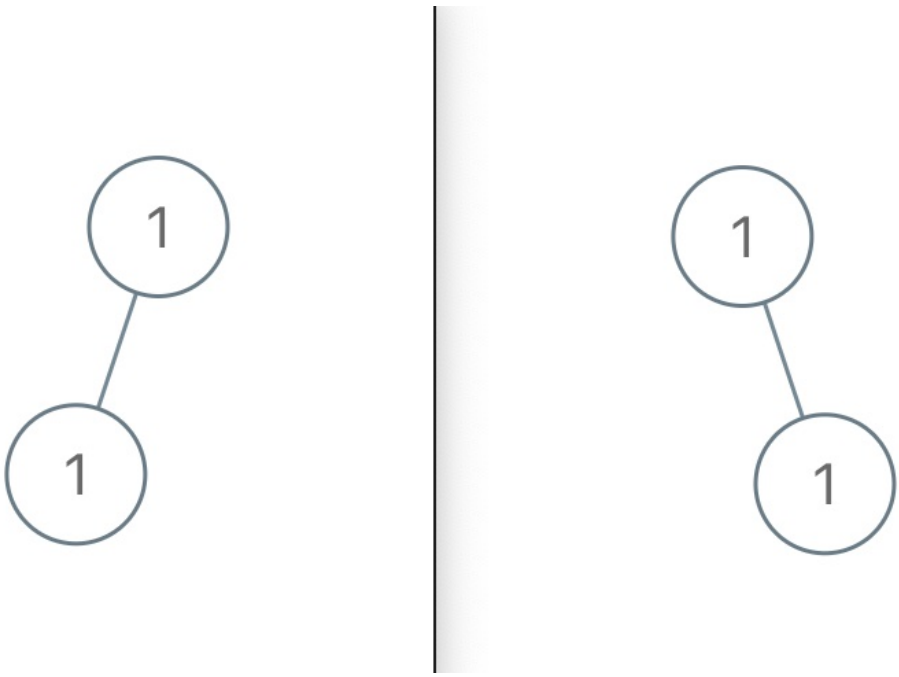
但如果我的前序遍历结果包含空指针的信息，那么就能还原出唯一的一棵二叉树了。比如说用 # 表示空指针，上图左侧的二叉树的前序遍历结果就是 `[1,2,3,#,#,4,#,#,5,#,#]`，上图右侧的二叉树的前序遍历结果就是 `[1,2,#,3,#,#,4,5,#,#,#]`，它俩就区分开了。

那么估计就有聪明的小伙伴说了：东哥我懂了，甭管是前中后序哪一种遍历顺序，只要序列化的结果中包含了空指针的信息，就能还原出唯一的一棵二叉树了。

首先要夸一下这种举一反三的思维，但很不幸，正确答案是，即便你包含了空指针的信息，也只有前序和后序的遍历结果才能唯一还原二叉树，中序遍历结果做不到。

本文后面会具体探讨这个问题，这里只简单说下原因：因为前序/后序遍历的结果中，可以确定根节点的位置，而中序遍历的结果中，根节点的位置是无法确定的。

更直观的，比如如下两棵二叉树显然拥有不同的结构，但它俩的中序遍历结果都是 `[#,1,#,1,#]`，无法区分：



说了这么多，总结下结论，**当二叉树中节点的值不存在重复时**：

1. 如果你的序列化结果中**不包含空指针的信息**，且你只给出**一种**遍历顺序，那么你无法还原出唯一的一棵二叉树。

2. 如果你的序列化结果中**不包含空指针的信息**，且你会给出**两种**遍历顺序，那么按照前文 东哥手把手带你刷二叉树（构造篇） 所说，分两种情况：

   2.1. 如果你给出的是前序和中序，或者后序和中序，那么你可以还原出唯一的一棵二叉树。

   2.2. 如果你给出前序和后序，那么你无法还原出唯一的一棵二叉树。

3. 如果你的序列化结果中**包含空指针的信息**，且你只给出**一种**遍历顺序，也要分两种情况：

   3.1. 如果你给出的是前序或者后序，那么你可以还原出唯一的一棵二叉树。

   3.2. 如果你给出的是中序，那么你无法还原出唯一的一棵二叉树。

我在开头提一下这些总结性的认识，可以理解性记忆，之后会遇到一些相关的题目，再回过头来看看这些总结，会有更深的理解，下面看具体的题目吧。

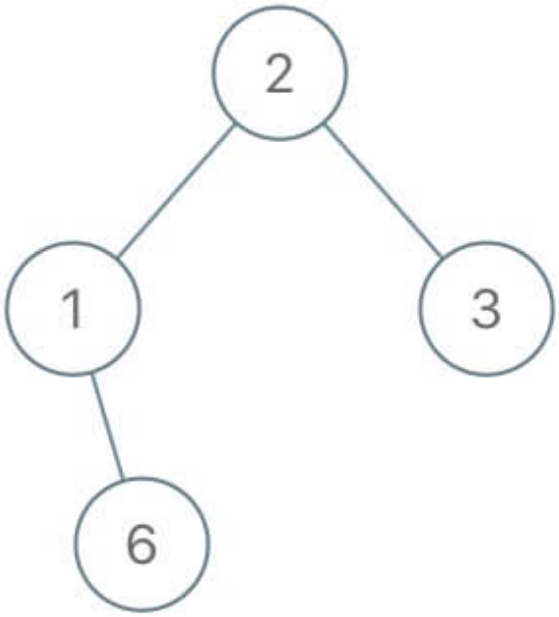
一、题目描述

力扣第 297 题「二叉树的序列化与反序列化」就是给你输入一棵二叉树的根节点 `root`，要求你实现如下一个类：

```
public class Codec {

    // 把一棵二叉树序列化成字符串
    public String serialize(TreeNode root) {}

    // 把字符串反序列化成二叉树
    public TreeNode deserialize(String data) {}
}
```

我们可以用 `serialize` 方法将二叉树序列化成字符串，用 `deserialize` 方法将序列化的字符串反序列化成二叉树，至于以什么格式序列化和反序列化，这个完全由你决定。

比如说输入如下这样一棵二叉树：



`serialize` 方法也许会把它序列化成字符串 `2,1,#,6,#,#,3,#,#`，其中 `#` 表示 `null` 指针，那么把这个字符串再输入 `deserialize` 方法，依然可以还原出这棵二叉树。

也就是说，这两个方法会成对儿使用，你只要保证他俩能够自洽就行了。

想象一下，二叉树是一个二维平面内的结构，而序列化出来的字符串是一个线性的一维结构。**所谓的序列化不过就是把结构化的数据「打平」，本质就是在考察二叉树的遍历方式。**

二叉树的遍历方式有哪些？递归遍历方式有前序遍历，中序遍历，后序遍历；迭代方式一般是层级遍历。本文就把这些方式都尝试一遍，来实现 `serialize` 方法和 `deserialize` 方法。

二、前序遍历解法

前文 学习数据结构和算法的框架思维 说过了二叉树的几种遍历方式，前序遍历框架如下：

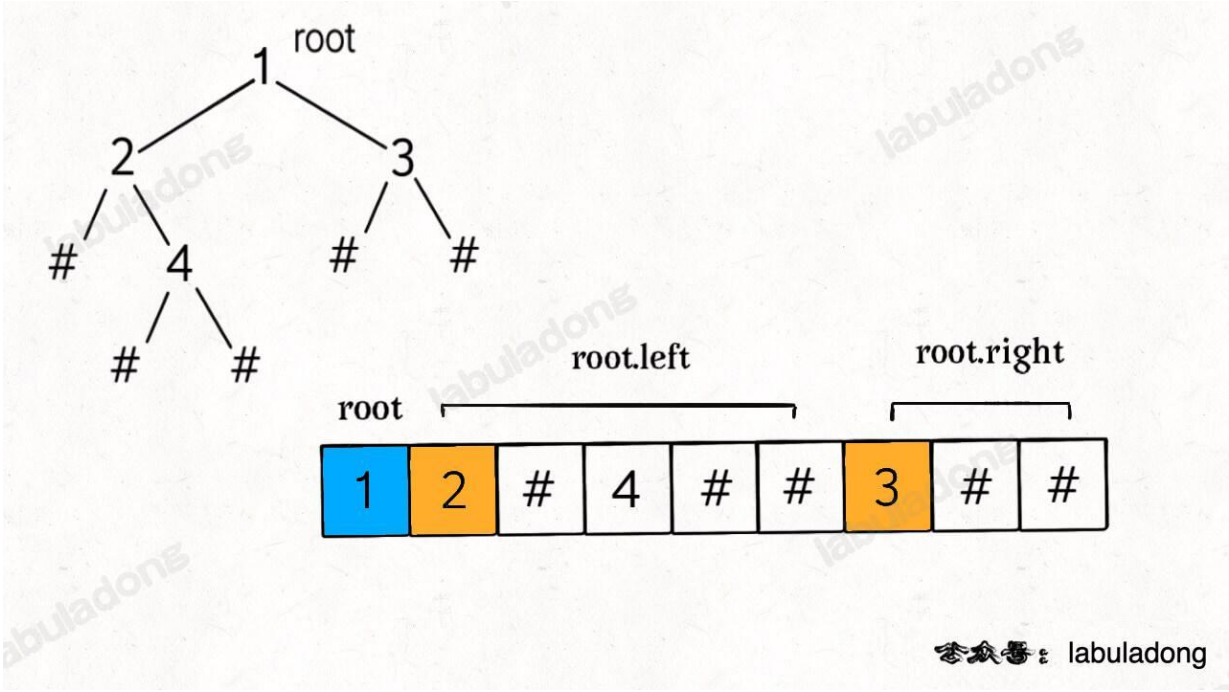
```
void traverse(TreeNode root) {
    if (root == null) return;

    // 前序位置的代码
    traverse(root.left);
    traverse(root.right);
}
```

真的很简单，在递归遍历两棵子树之前写的代码就是前序遍历代码，那么请你看一看如下伪码：

```
LinkedList<Integer> res;
void traverse(TreeNode root) {
    if (root == null) {
```

```
            // 暂且用数字 -1 代表空指针 null
            res.addLast(-1);
            return;
        }

        /****** 前序位置 ******/
        res.addLast(root.val);
        /**********************/

        traverse(root.left);
        traverse(root.right);
    }
```

调用 `traverse` 函数之后，你是否可以立即想出这个 `res` 列表中元素的顺序是怎样的？比如如下二叉树（`#` 代表空指针 null），可以直观看出前序遍历做的事情：



那么 `res = [1,2,-1,4,-1,-1,3,-1,-1]`，这就是将二叉树「打平」到了一个列表中，其中 -1 代表 null。

那么，将二叉树打平到一个字符串中也是完全一样的：

```
// 代表分隔符的字符
String SEP = ",";
// 代表 null 空指针的字符
String NULL = "#";
// 用于拼接字符串
StringBuilder sb = new StringBuilder();

/* 将二叉树打平为字符串 */
void traverse(TreeNode root, StringBuilder sb) {
    if (root == null) {
        sb.append(NULL).append(SEP);
```

```
            return;
        }

        /****** 前序位置 ******/
        sb.append(root.val).append(SEP);
        /************************/

        traverse(root.left, sb);
        traverse(root.right, sb);
    }
```

`StringBuilder` 可以用于高效拼接字符串，所以也可以认为是一个列表，用 `,` 作为分隔符，用 `#` 表示空指针 null，调用完 `traverse` 函数后，`sb` 中的字符串应该是 `1,2,#,4,#,#,3,#,#,`。

至此，我们已经可以写出序列化函数 `serialize` 的代码了：

```
String SEP = ",";
String NULL = "#";

/* 主函数，将二叉树序列化为字符串 */
String serialize(TreeNode root) {
    StringBuilder sb = new StringBuilder();
    serialize(root, sb);
    return sb.toString();
}

/* 辅助函数，将二叉树存入 StringBuilder */
void serialize(TreeNode root, StringBuilder sb) {
    if (root == null) {
        sb.append(NULL).append(SEP);
        return;
    }

    /****** 前序位置 ******/
    sb.append(root.val).append(SEP);
    /************************/

    serialize(root.left, sb);
    serialize(root.right, sb);
}
```

现在，思考一下如何写 `deserialize` 函数，将字符串反过来构造二叉树。

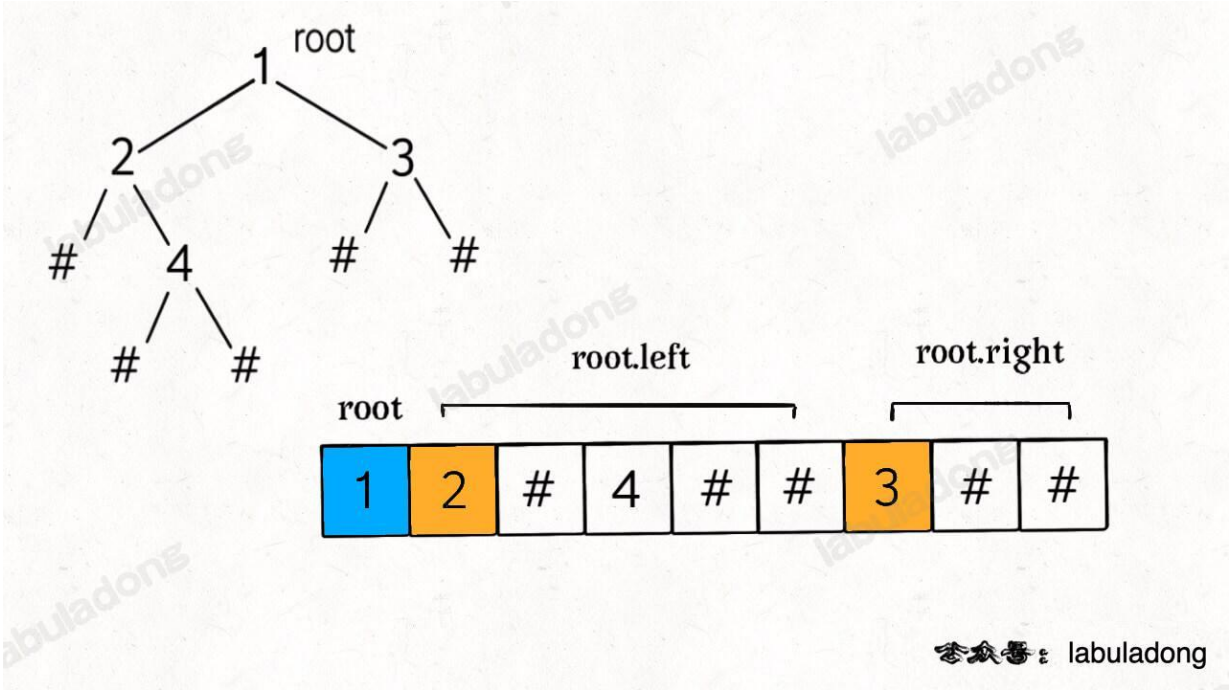
首先我们可以把字符串转化成列表：

```
String data = "1,2,#,4,#,#,3,#,#,";
String[] nodes = data.split(",");
```

这样，`nodes` 列表就是二叉树的前序遍历结果，问题转化为：如何通过二叉树的前序遍历结果还原一棵二叉树？

> 前文 东哥带你刷二叉树（构造篇） 说过，至少要得到前、中、后序遍历中的两种互相配合才能还原二叉树。那是因为前文的遍历结果没有记录空指针的信息。这里的 `nodes` 列表包含了空指针的信息，所以只使用 `nodes` 列表就可以还原二叉树。

根据我们刚才的分析，`nodes` 列表就是一棵打平的二叉树：



那么，反序列化过程也是一样，**先确定根节点 `root`，然后遵循前序遍历的规则，递归生成左右子树即可**：

如果你有高质量的问题，可以 点击这里 进入本文的讨论区。

▶ **引用本文的题目**

安装 我的 Chrome 刷题插件 点开下列题目可直接查看解题思路：

LeetCode	力扣
1008. Construct Binary Search Tree from Preorder Traversal	1008. 前序遍历构造二叉搜索树
449. Serialize and Deserialize BST	449. 序列化和反序列化二叉搜索树
652. Find Duplicate Subtrees	652. 寻找重复的子树
694. Number of Distinct Islands🔒	694. 不同岛屿的数量🔒
-	剑指 Offer 37. 序列化二叉树
-	剑指 Offer II 048. 序列化与反序列化二叉树

▶ 引用本文的文章

- 一文秒杀所有岛屿题目
- 东哥带你刷二叉树（后序篇）

本文为网站会员内容，请 点这里 查看。

东哥带你刷二叉树（后序篇）

Stars 123k 精品课程 查看 知乎 @labuladong B站 @labuladong

微信搜一搜 labuladong公众号

学算法认准 labuladong，致力于把算法讲清楚！网页版 点这里。

读完本文，你不仅学会了算法套路，还可以顺便解决如下题目：

LeetCode	力扣	难度
652. Find Duplicate Subtrees	652. 寻找重复的子树	🟠

本文是承接 东哥带你刷二叉树（纲领篇） 的第四篇文章，主要讲二叉树后序位置的妙用，复述下前文关于后序遍历的描述：

> 前序位置的代码只能从函数参数中获取父节点传递来的数据，而后序位置的代码不仅可以获取参数数据，还可以获取到子树通过函数返回值传递回来的数据。
>
> **那么换句话说，一旦你发现题目和子树有关，那大概率要给函数设置合理的定义和返回值，在后序位置写代码了。**

多说无益，我们直接看题，这是力扣第 652 题「寻找重复的子树」：

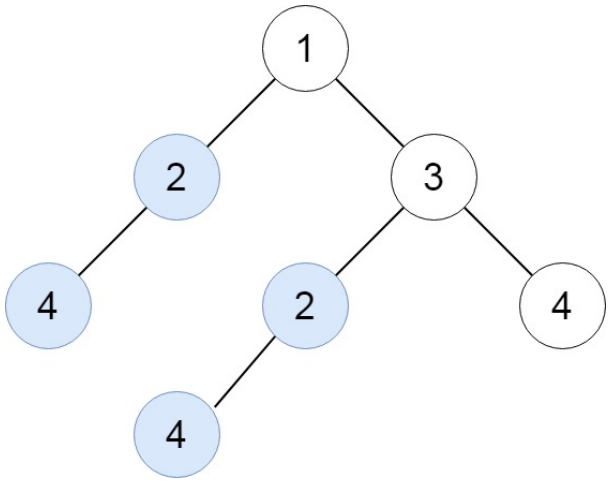
▼ 652. 寻找重复的子树 Leetcode | 力扣

给你一棵二叉树的根节点 `root` ，返回所有 **重复的子树** 。

对于同一类的重复子树，你只需要返回其中任意 **一棵** 的根结点即可。

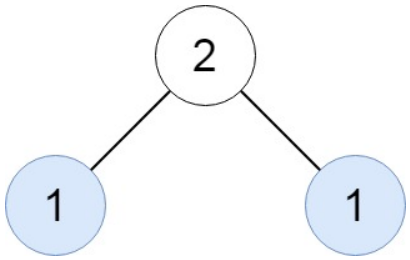
如果两棵树具有 **相同的结构** 和 **相同的结点值** ，则认为二者是 **重复** 的。

示例 1：



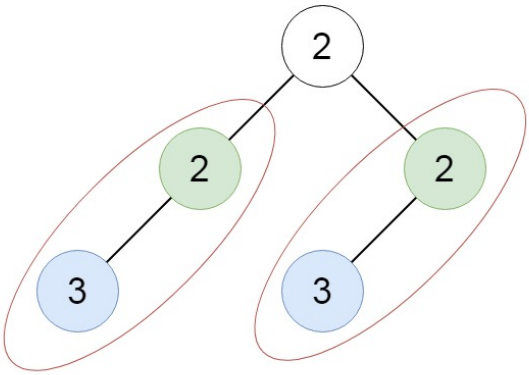

```
输入：root = [1,2,3,4,null,2,4,null,null,4]
输出：[[2,4],[4]]
```

示例 2：




```
输入：root = [2,1,1]
输出：[[1]]
```

示例 3：




```
输入：root = [2,2,2,3,null,3,null]
输出：[[2,3],[3]]
```

提示：

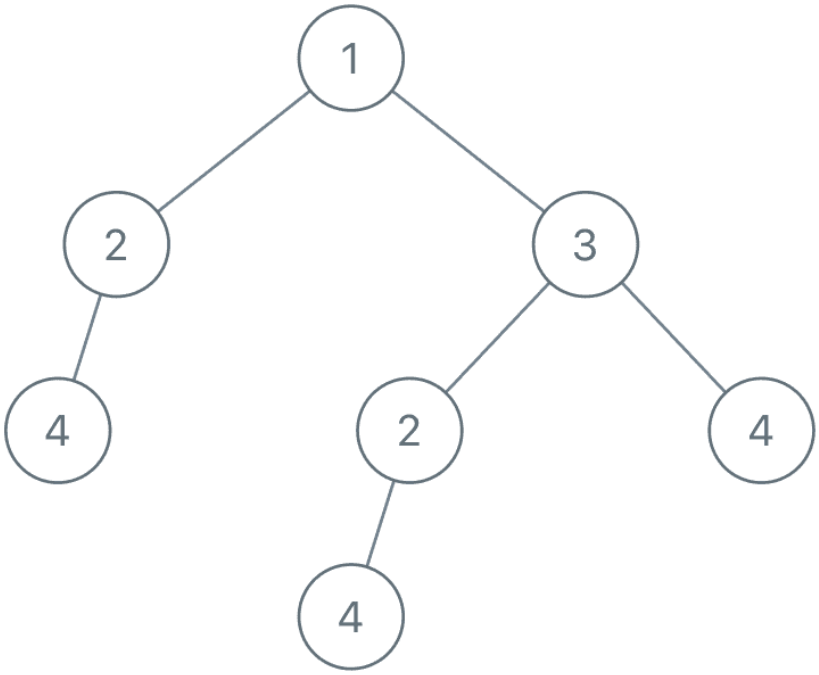
- 树中的结点数在 [1, 5000] 范围内。
- -200 <= Node.val <= 200

函数签名如下：

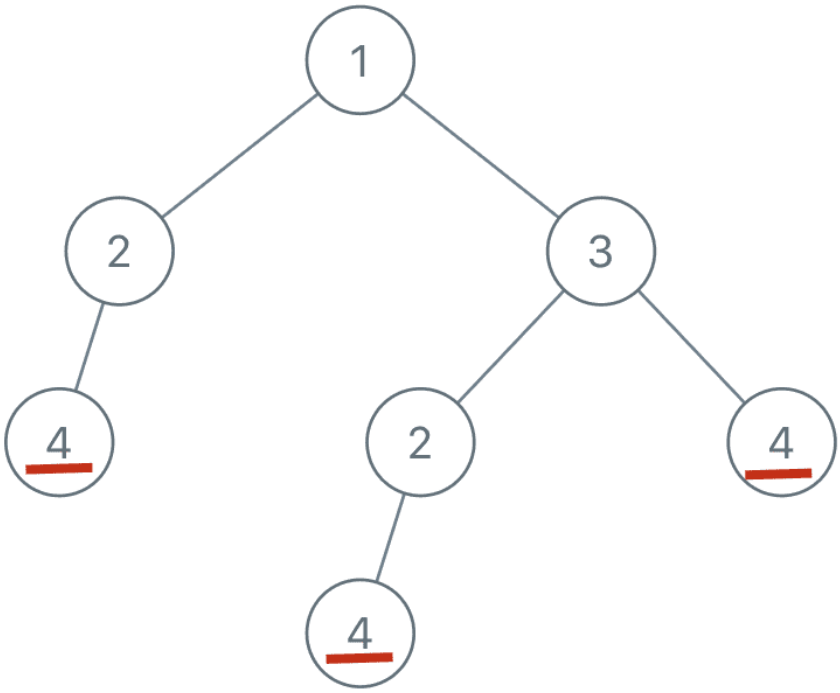
```
List<TreeNode> findDuplicateSubtrees(TreeNode root);
```

我来简单解释下题目，输入是一棵二叉树的根节点 root，返回的是一个列表，里面装着若干个二叉树节点，这些节点对应的子树在原二叉树中是存在重复的。

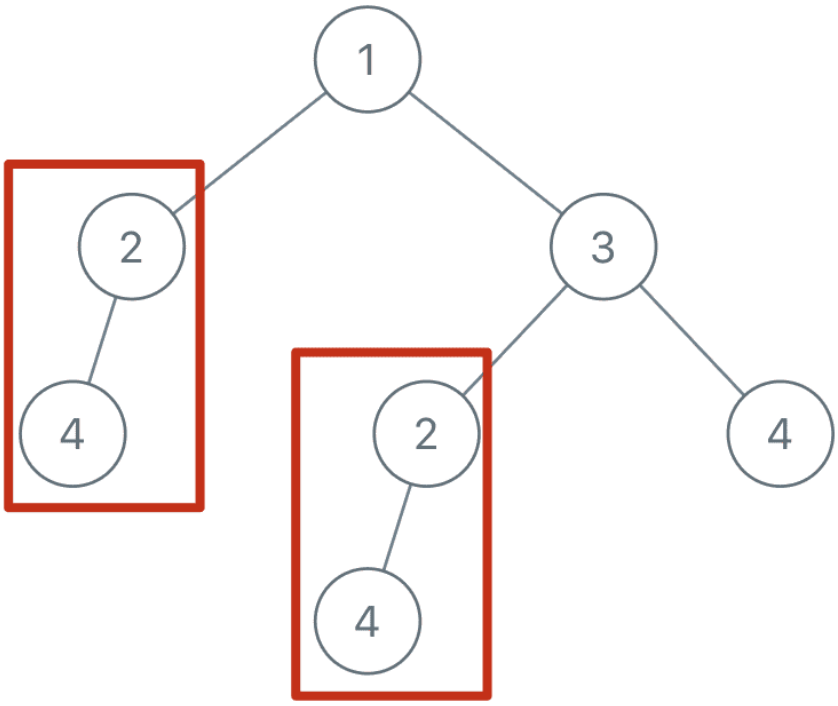
说起来比较绕，举例来说，比如输入如下的二叉树：



首先，节点 4 本身可以作为一棵子树，且二叉树中有多个节点 4：



类似的，还存在两棵以 2 为根的重复子树：



那么，我们返回的 `List` 中就应该有两个 `TreeNode`，值分别为 4 和 2（具体是哪个节点都无所谓）。

如果你有高质量的问题，可以 点击这里 进入本文的讨论区。

▶ **引用本文的文章**

- 东哥带你刷二叉搜索树（特性篇）

- 东哥带你刷二叉树（构造篇）
- 二叉树的递归转迭代的代码框架
- 经典动态规划：最长公共子序列

———————————————

本文为网站会员内容，请 点这里 查看。

归并排序详解及应用

Stars 123k 精品课程 查看 知乎 @labuladong B站 @labuladong

学算法认准 labuladong，致力于把算法讲清楚！网页版 点这里。

读完本文，你不仅学会了算法套路，还可以顺便解决如下题目：

LeetCode	力扣	难度
315. Count of Smaller Numbers After Self	315. 计算右侧小于当前元素的个数	🔴
327. Count of Range Sum	327. 区间和的个数	🔴
493. Reverse Pairs	493. 翻转对	🔴
912. Sort an Array	912. 排序数组	🟠

一直都有很多读者说，想让我用 框架思维 讲一讲基本的排序算法，我觉得确实得讲讲，毕竟学习任何东西都讲求一个融会贯通，只有对其本质进行比较深刻的理解，才能运用自如。

本文就先讲归并排序，给一套代码模板，然后讲讲它在算法问题中的应用。阅读本文前我希望你读过前文 手把手刷二叉树（纲领篇）。

我在 手把手刷二叉树（第一期） 讲二叉树的时候，提了一嘴归并排序，说归并排序就是二叉树的后序遍历，当时就有很多读者留言说醍醐灌顶。

知道为什么很多读者遇到递归相关的算法就觉得烧脑吗？因为还处在「看山是山，看水是水」的阶段。

就说归并排序吧，如果给你看代码，让你脑补一下归并排序的过程，你脑子里会出现什么场景？

这是一个数组排序算法，所以你脑补一个数组的 GIF，在那一个个交换元素？如果是这样的话，那格局就低了。

但如果你脑海中浮现出的是一棵二叉树，甚至浮现出二叉树后序遍历的场景，那格局就高了，大概率掌握了我经常强调的 框架思维，用这种抽象能力学习算法就省劲多了。

那么，归并排序明明就是一个数组算法，和二叉树有什么关系？接下来我就具体讲讲。

如果你有高质量的问题，可以 点击这里 进入本文的讨论区。

▶ **引用本文的题目**

安装 我的 Chrome 刷题插件 点开下列题目可直接查看解题思路：

LeetCode	力扣
-	剑指 Offer 51. 数组中的逆序对

▶ 引用本文的文章

- 东哥带你刷二叉树（纲领篇）
- 快速排序详解及应用

本文为网站会员内容，请 点这里 查看。

2.2 二叉搜索树

BST 是一种特殊的二叉树，你只要记住它的两个主要特点：

1、左小右大，即每个节点的左子树都比当前节点的值小，右子树都比当前节点的值大。

2、中序遍历结果是有序的。

公众号标签：二叉搜索树

名称	最新版本号	详情
PDF 教材	V5.2	下载
刷题打卡挑战	开放报名	报名
网站会员	V已上线	购买
Chrome 刷题插件	V4.4.3	使用手册
vscode 刷题插件	V1.5.4	使用手册
JetBrains IDE 刷题插件	V1.8.6	使用手册

东哥带你刷二叉搜索树（特性篇）

Stars 123k 精品课程 查看 知乎 @labuladong B站 @labuladong

学算法认准 labuladong，致力于把算法讲清楚！网页版 点这里。

读完本文，你不仅学会了算法套路，还可以顺便解决如下题目：

LeetCode	力扣	难度
1038. Binary Search Tree to Greater Sum Tree	1038. 从二叉搜索树到更大和树	🟠
230. Kth Smallest Element in a BST	230. 二叉搜索树中第K小的元素	🟠
538. Convert BST to Greater Tree	538. 把二叉搜索树转换为累加树	🟠
-	剑指 Offer II 054. 所有大于等于节点的值之和	🟠

前文手把手带你刷二叉树已经写了 第一期，第二期 和 第三期，今天写一篇二叉搜索树（Binary Search Tree，后文简写 BST）相关的文章，手把手带你刷 BST。

首先，BST 的特性大家应该都很熟悉了：

1、对于 BST 的每一个节点 `node`，左子树节点的值都比 `node` 的值要小，右子树节点的值都比 `node` 的值大。

2、对于 BST 的每一个节点 `node`，它的左侧子树和右侧子树都是 BST。

二叉搜索树并不算复杂，但我觉得它可以算是数据结构领域的半壁江山，直接基于 BST 的数据结构有 AVL 树，红黑树等等，拥有了自平衡性质，可以提供 logN 级别的增删查改效率；还有 B+ 树，线段树等结构都是基于 BST 的思想来设计的。

从做算法题的角度来看 BST，除了它的定义，还有一个重要的性质：BST 的中序遍历结果是有序的（升序）。

也就是说，如果输入一棵 BST，以下代码可以将 BST 中每个节点的值升序打印出来：

```
void traverse(TreeNode root) {
    if (root == null) return;
    traverse(root.left);
    // 中序遍历代码位置
    print(root.val);
    traverse(root.right);
}
```

那么根据这个性质，我们来做两道算法题。

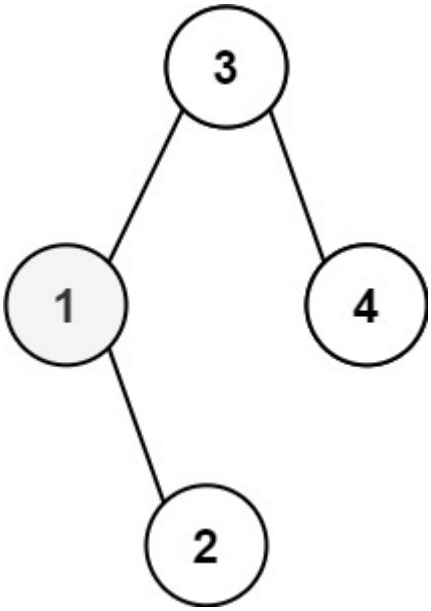
寻找第 K 小的元素

这是力扣第 230 题「二叉搜索树中第 K 小的元素」，看下题目：

▼ 230. 二叉搜索树中第K小的元素 Leetcode | 力扣

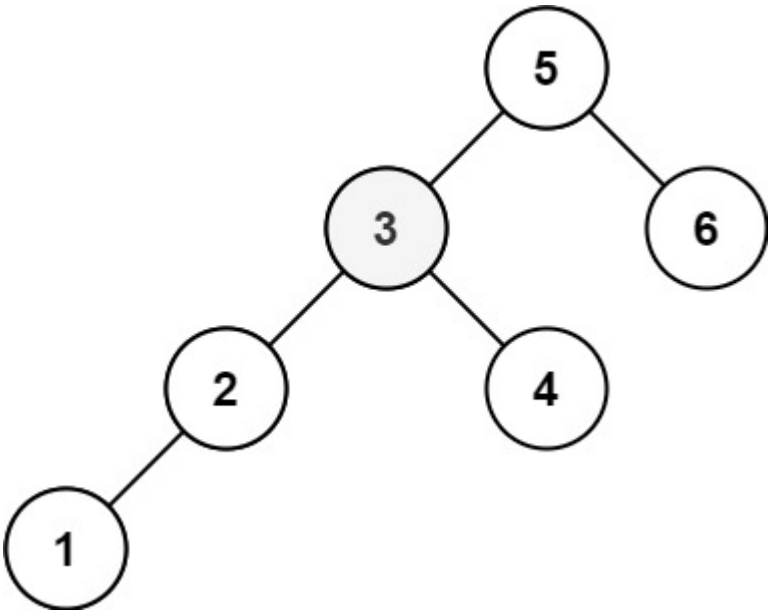
给定一个二叉搜索树的根节点 `root` ，和一个整数 `k` ，请你设计一个算法查找其中第 `k` 个最小元素（从 1 开始计数）。

示例 1：




```
输入：root = [3,1,4,null,2], k = 1
输出：1
```

示例 2：



输入： root = [5,3,6,2,4,null,null,1], k = 3
输出： 3

提示：

- 树中的节点数为 n 。
- 1 <= k <="n">4
- 0 <= node.val <="10<sup">4

进阶： 如果二叉搜索树经常被修改（插入/删除操作）并且你需要频繁地查找第 k 小的值，你将如何优化算法?

这个需求很常见吧，一个直接的思路就是升序排序，然后找第 k 个元素呗。BST 的中序遍历其实就是升序排序的结果，找第 k 个元素肯定不是什么难事。

按照这个思路，可以直接写出代码：

```
int kthSmallest(TreeNode root, int k) {
    // 利用 BST 的中序遍历特性
    traverse(root, k);
    return res;
}

// 记录结果
int res = 0;
// 记录当前元素的排名
int rank = 0;
void traverse(TreeNode root, int k) {
    if (root == null) {
        return;
    }
    traverse(root.left, k);
    /* 中序遍历代码位置 */
```

```
        rank++;
        if (k == rank) {
            // 找到第 k 小的元素
            res = root.val;
            return;
        }
        /*****************/
        traverse(root.right, k);
    }
```

▶ 🥰 代码可视化动画🥰

这道题就做完了，不过呢，还是要多说几句，因为这个解法并不是最高效的解法，而是仅仅适用于这道题。

我们前文 高效计算数据流的中位数 中就提过今天的这个问题：

> 如果让你实现一个在二叉搜索树中通过排名计算对应元素的方法 `select(int k)`，你会怎么设计？

如果按照我们刚才说的方法，利用「BST 中序遍历就是升序排序结果」这个性质，每次寻找第 `k` 小的元素都要中序遍历一次，最坏的时间复杂度是 `O(N)`，`N` 是 BST 的节点个数。

要知道 BST 性质是非常牛逼的，像红黑树这种改良的自平衡 BST，增删查改都是 `O(logN)` 的复杂度，让你算一个第 `k` 小元素，时间复杂度竟然要 `O(N)`，有点低效了。

所以说，计算第 `k` 小元素，最好的算法肯定也是对数级别的复杂度，不过这个依赖于 BST 节点记录的信息有多少。

我们想一下 BST 的操作为什么这么高效？就拿搜索某一个元素来说，BST 能够在对数时间找到该元素的根本原因还是在 BST 的定义里，左子树小右子树大嘛，所以每个节点都可以通过对比自身的值判断去左子树还是右子树搜索目标值，从而避免了全树遍历，达到对数级复杂度。

那么回到这个问题，想找到第 `k` 小的元素，或者说找到排名为 `k` 的元素，如果想达到对数级复杂度，关键也在于每个节点得知道他自己排第几。

比如说你让我查找排名为 `k` 的元素，当前节点知道自己排名第 `m`，那么我可以比较 `m` 和 `k` 的大小：

1、如果 `m == k`，显然就是找到了第 `k` 个元素，返回当前节点就行了。

2、如果 `k < m`，那说明排名第 `k` 的元素在左子树，所以可以去左子树搜索第 `k` 个元素。

3、如果 `k > m`，那说明排名第 `k` 的元素在右子树，所以可以去右子树搜索第 `k - m - 1` 个元素。

这样就可以将时间复杂度降到 `O(logN)` 了。

那么，如何让每一个节点知道自己的排名呢？

这就是我们之前说的，需要在二叉树节点中维护额外信息。**每个节点需要记录，以自己为根的这棵二叉树有多少个节点**。

也就是说，我们 `TreeNode` 中的字段应该如下：

```
class TreeNode {
    int val;
    // 以该节点为根的树的节点总数
    int size;
    TreeNode left;
    TreeNode right;
}
```

有了 `size` 字段，外加 BST 节点左小右大的性质，对于每个节点 `node` 就可以通过 `node.left` 推导出 `node` 的排名，从而做到我们刚才说到的对数级算法。

当然，`size` 字段需要在增删元素的时候需要被正确维护，力扣提供的 `TreeNode` 是没有 `size` 这个字段的，所以我们这道题就只能利用 BST 中序遍历的特性实现了，但是我们上面说到的优化思路是 BST 的常见操作，还是有必要理解的。

BST 转化累加树

力扣第 538 题和 1038 题都是这道题，完全一样，你可以把它们一块做掉。看下题目：

▼ 538. 把二叉搜索树转换为累加树 Leetcode | 力扣

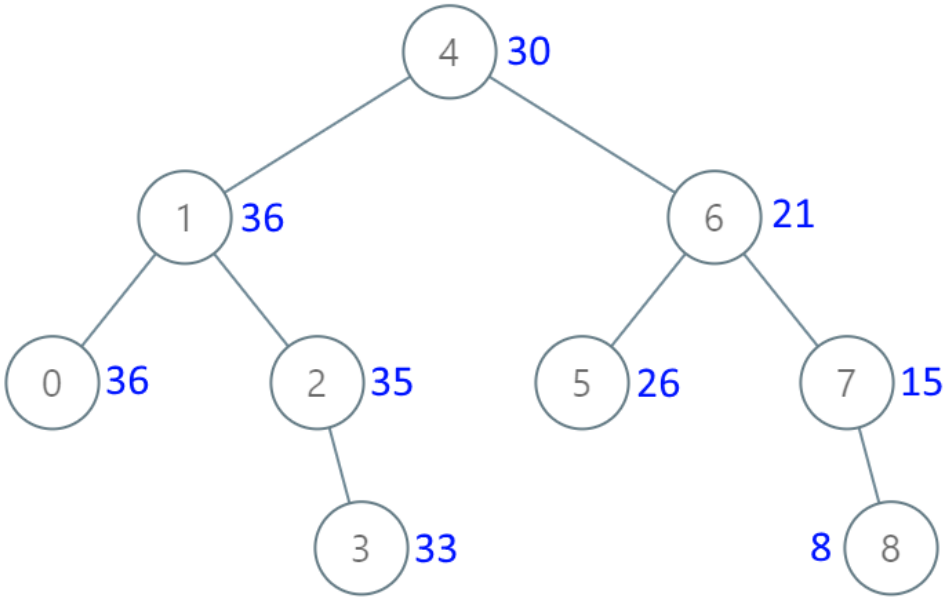
给出二叉 **搜索** 树的根节点，该树的节点值各不相同，请你将其转换为累加树（Greater Sum Tree），使每个节点 `node` 的新值等于原树中大于或等于 `node.val` 的值之和。

提醒一下，二叉搜索树满足下列约束条件：

- 节点的左子树仅包含键 **小于** 节点键的节点。
- 节点的右子树仅包含键 **大于** 节点键的节点。
- 左右子树也必须是二叉搜索树。

注意： 本题和 1038: https://leetcode-cn.com/problems/binary-search-tree-to-greater-sum-tree/ 相同

示例 1：




```
输入：[4,1,6,0,2,5,7,null,null,null,3,null,null,null,8]
输出：[30,36,21,36,35,26,15,null,null,null,33,null,null,null,8]
```

示例 2：

```
输入：root = [0,null,1]
输出：[1,null,1]
```

示例 3：

```
输入：root = [1,0,2]
输出：[3,3,2]
```

示例 4：

```
输入：root = [3,2,4,1]
输出：[7,9,4,10]
```

提示：

- 树中的节点数介于 0 和 10^4 之间。
- 每个节点的值介于 -10^4 和 10^4 之间。
- 树中的所有值 **互不相同** 。
- 给定的树为二叉搜索树。

题目应该不难理解，比如图中的节点 5，转化成累加树的话，比 5 大的节点有 6，7，8，加上 5 本身，所以累加树上这个节点的值应该是 5+6+7+8=26。

我们需要把 BST 转化成累加树，函数签名如下：

```
TreeNode convertBST(TreeNode root)
```

按照二叉树的通用思路，需要思考每个节点应该做什么，但是这道题上很难想到什么思路。

BST 的每个节点左小右大，这似乎是一个有用的信息，既然累加和是计算大于等于当前值的所有元素之和，那么每个节点都去计算右子树的和，不就行了吗？

这是不行的。对于一个节点来说，确实右子树都是比它大的元素，但问题是它的父节点也可能是比它大的元素呀？这个没法确定的，我们又没有触达父节点的指针，所以二叉树的通用思路在这里用不了。

其实，正确的解法很简单，还是利用 BST 的中序遍历特性。

刚才我们说了 BST 的中序遍历代码可以升序打印节点的值：

```
void traverse(TreeNode root) {
    if (root == null) return;
    traverse(root.left);
    // 中序遍历代码位置
    print(root.val);
    traverse(root.right);
}
```

那如果我想降序打印节点的值怎么办？

很简单，只要把递归顺序改一下就行了：

```
void traverse(TreeNode root) {
    if (root == null) return;
    // 先递归遍历右子树
    traverse(root.right);
    // 中序遍历代码位置
    print(root.val);
    // 后递归遍历左子树
    traverse(root.left);
}
```

这段代码可以降序打印 BST 节点的值，如果维护一个外部累加变量 `sum`，然后把 `sum` 赋值给 BST 中的每一个节点，不就将 BST 转化成累加树了吗？

看下代码就明白了：

```
TreeNode convertBST(TreeNode root) {
    traverse(root);
    return root;
}

// 记录累加和
int sum = 0;
void traverse(TreeNode root) {
    if (root == null) {
        return;
    }
    traverse(root.right);
    // 维护累加和
    sum += root.val;
    // 将 BST 转化成累加树
    root.val = sum;
    traverse(root.left);
}
```

▶ 🥳 代码可视化动画🥳

这道题就解决了，核心还是 BST 的中序遍历特性，只不过我们修改了递归顺序，降序遍历 BST 的元素值，从而契合题目累加树的要求。

简单总结下吧，BST 相关的问题，要么利用 BST 左小右大的特性提升算法效率，要么利用中序遍历的特性满足题目的要求，也就这么些事儿吧。

本文就到这里，更多经典的二叉树习题以及递归思维的训练，请参见二叉树章节中的 递归专项练习

如果你有高质量的问题，可以 点击这里 进入本文的讨论区。

▶ 引用本文的题目

安装 我的 Chrome 刷题插件 点开下列题目可直接查看解题思路：

LeetCode	力扣
-	剑指 Offer II 054. 所有大于等于节点的值之和

▶ 引用本文的文章

- 【强化练习】优先级队列经典习题
- 东哥带你刷二叉搜索树（基操篇）
- 东哥带你刷二叉搜索树（构造篇）
- 二叉树的递归转迭代的代码框架

———————————————

更多精品课程可查看 我的网站；扫码查看更多配套学习套件：

东哥带你刷二叉搜索树（基操篇）

Stars 123k 精品课程 查看 知乎 @labuladong B站 @labuladong

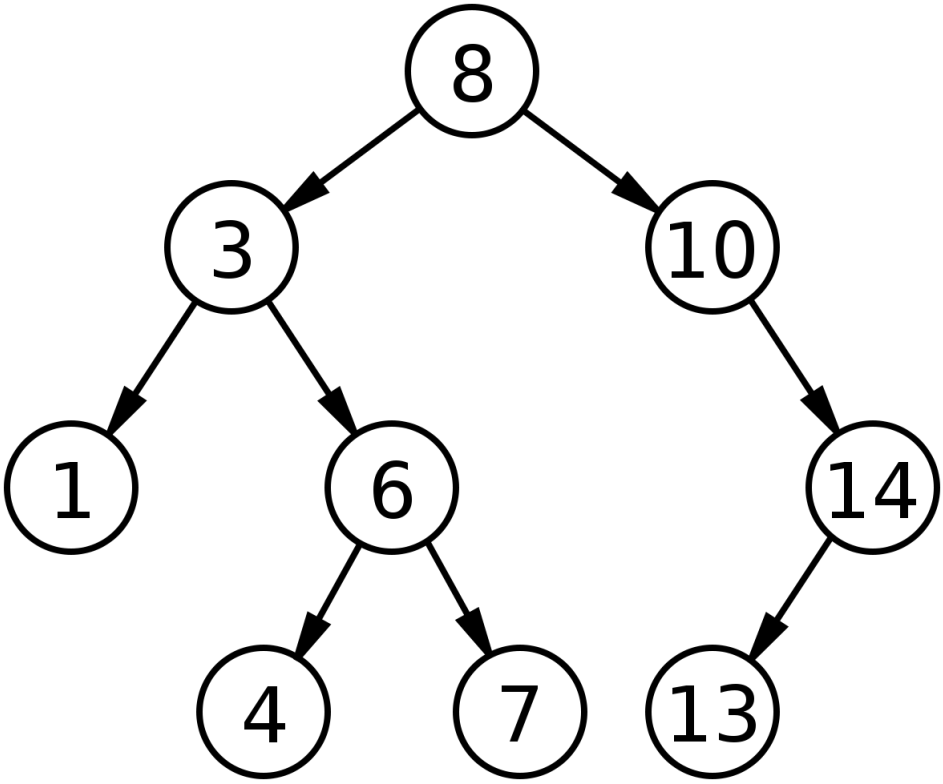
学算法认准 labuladong，致力于把算法讲清楚！网页版 点这里。

读完本文，你不仅学会了算法套路，还可以顺便解决如下题目：

LeetCode	力扣	难度
450. Delete Node in a BST	450. 删除二叉搜索树中的节点	🟠
700. Search in a Binary Search Tree	700. 二叉搜索树中的搜索	🟢
701. Insert into a Binary Search Tree	701. 二叉搜索树中的插入操作	🟠
98. Validate Binary Search Tree	98. 验证二叉搜索树	🟠

我们前文 东哥带你刷二叉搜索树（特性篇） 介绍了 BST 的基本特性，还利用二叉搜索树「中序遍历有序」的特性来解决了几道题目，本文来实现 BST 的基础操作：判断 BST 的合法性、增、删、查。其中「删」和「判断合法性」略微复杂。

BST 的基础操作主要依赖「左小右大」的特性，可以在二叉树中做类似二分搜索的操作，寻找一个元素的效率很高。比如下面这就是一棵合法的二叉树：



对于 BST 相关的问题，你可能会经常看到类似下面这样的代码逻辑：

```
void BST(TreeNode root, int target) {
    if (root.val == target)
        // 找到目标，做点什么
    if (root.val < target)
        BST(root.right, target);
    if (root.val > target)
        BST(root.left, target);
}
```

这个代码框架其实和二叉树的遍历框架差不多，无非就是利用了 BST 左小右大的特性而已。接下来看下 BST 这种结构的基础操作是如何实现的。

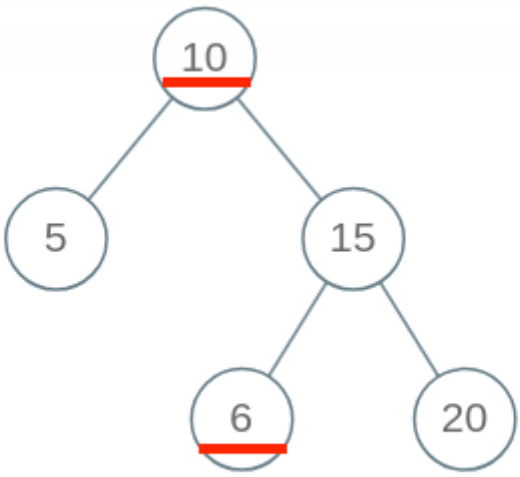
一、判断 BST 的合法性

力扣第 98 题「验证二叉搜索树」就是让你判断输入的 BST 是否合法。注意，这里是有坑的哦，按照 BST 左小右大的特性，每个节点想要判断自己是否是合法的 BST 节点，要做的事不就是比较自己和左右孩子吗？感觉应该这样写代码：

```
boolean isValidBST(TreeNode root) {
    if (root == null) return true;
    // root 的左边应该更小
    if (root.left != null && root.left.val >= root.val)
        return false;
    // root 的右边应该更大
    if (root.right != null && root.right.val <= root.val)
        return false;
```

```
    return isValidBST(root.left)
        && isValidBST(root.right);
}
```

但是这个算法出现了错误，BST 的每个节点应该要小于右边子树的**所有**节点，下面这个二叉树显然不是 BST，因为节点 10 的右子树中有一个节点 6，但是我们的算法会把它判定为合法 BST：



出现问题的原因在于，对于每一个节点 `root`，代码值检查了它的左右孩子节点是否符合左小右大的原则；但是根据 BST 的定义，`root` 的整个左子树都要小于 `root.val`，整个右子树都要大于 `root.val`。

问题是，对于某一个节点 `root`，他只能管得了自己的左右子节点，怎么把 `root` 的约束传递给左右子树呢？请看正确的代码：

```
boolean isValidBST(TreeNode root) {
    return isValidBST(root, null, null);
}

/* 限定以 root 为根的子树节点必须满足 max.val > root.val > min.val */
boolean isValidBST(TreeNode root, TreeNode min, TreeNode max) {
    // base case
    if (root == null) return true;
    // 若 root.val 不符合 max 和 min 的限制，说明不是合法 BST
    if (min != null && root.val <= min.val) return false;
    if (max != null && root.val >= max.val) return false;
    // 限定左子树的最大值是 root.val，右子树的最小值是 root.val
    return isValidBST(root.left, min, root)
        && isValidBST(root.right, root, max);
}
```

▶ 🍭 代码可视化动画🍭

我们通过使用辅助函数，增加函数参数列表，在参数中携带额外信息，将这种约束传递给子树的所有节点，这也是二叉树算法的一个小技巧吧。

在 BST 中搜索元素

力扣第 700 题「二叉搜索树中的搜索」就是让你在 BST 中搜索值为 `target` 的节点，函数签名如下：

```
TreeNode searchBST(TreeNode root, int target);
```

如果是在一棵普通的二叉树中寻找，可以这样写代码：

```
TreeNode searchBST(TreeNode root, int target);
    if (root == null) return null;
    if (root.val == target) return root;
    // 当前节点没找到就递归地去左右子树寻找
    TreeNode left = searchBST(root.left, target);
    TreeNode right = searchBST(root.right, target);

    return left != null ? left : right;
}
```

这样写完全正确，但这段代码相当于穷举了所有节点，适用于所有二叉树。那么应该如何充分利用 BST 的特殊性，把「左小右大」的特性用上？

很简单，其实不需要递归地搜索两边，类似二分查找思想，根据 `target` 和 `root.val` 的大小比较，就能排除一边。我们把上面的思路稍稍改动：

```
TreeNode searchBST(TreeNode root, int target) {
    if (root == null) {
        return null;
    }
    // 去左子树搜索
    if (root.val > target) {
        return searchBST(root.left, target);
    }
    // 去右子树搜索
    if (root.val < target) {
        return searchBST(root.right, target);
    }
    return root;
}
```

▶ 🎃 代码可视化动画🎃

在 BST 中插入一个数

对数据结构的操作无非遍历 + 访问，遍历就是「找」，访问就是「改」。具体到这个问题，插入一个数，就是先找到插入位置，然后进行插入操作。

上一个问题，我们总结了 BST 中的遍历框架，就是「找」的问题。直接套框架，加上「改」的操作即可。**一旦涉及「改」，就类似二叉树的构造问题，函数要返回 `TreeNode` 类型，并且要对递归调用的返回值进行接收**。

```
TreeNode insertIntoBST(TreeNode root, int val) {
    // 找到空位置插入新节点
    if (root == null) return new TreeNode(val);
    // if (root.val == val)
    //     BST 中一般不会插入已存在元素
    if (root.val < val)
        root.right = insertIntoBST(root.right, val);
    if (root.val > val)
        root.left = insertIntoBST(root.left, val);
    return root;
}
```

▶ 🎃 代码可视化动画🎃

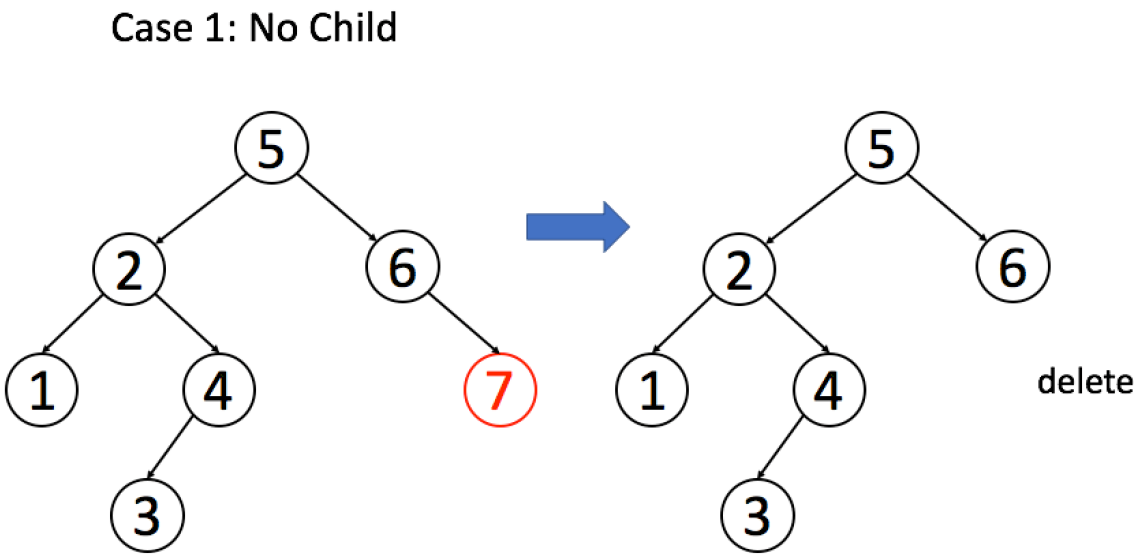
三、在 BST 中删除一个数

这个问题稍微复杂，跟插入操作类似，先「找」再「改」，先把框架写出来再说：

```
TreeNode deleteNode(TreeNode root, int key) {
    if (root.val == key) {
        // 找到啦，进行删除
    } else if (root.val > key) {
        // 去左子树找
        root.left = deleteNode(root.left, key);
    } else if (root.val < key) {
        // 去右子树找
        root.right = deleteNode(root.right, key);
    }
    return root;
}
```

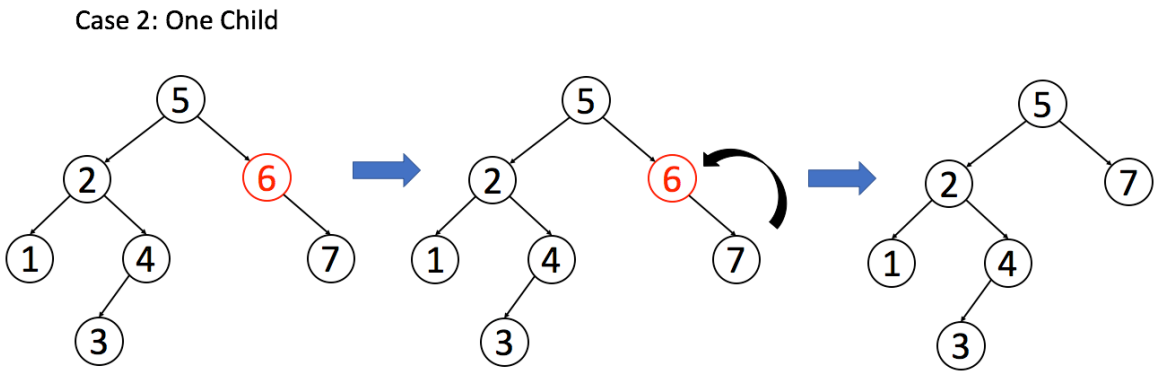
找到目标节点了，比方说是节点 A，如何删除这个节点，这是难点。因为删除节点的同时不能破坏 BST 的性质。有三种情况，用图片来说明。

情况 1：A 恰好是末端节点，两个子节点都为空，那么它可以当场去世了。



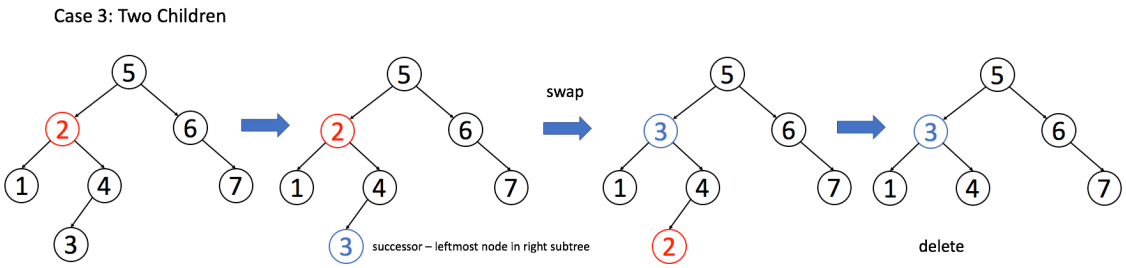

```
if (root.left == null && root.right == null)
    return null;
```

情况 2：A 只有一个非空子节点，那么它要让这个孩子接替自己的位置。




```
// 排除了情况 1 之后
if (root.left == null) return root.right;
if (root.right == null) return root.left;
```

情况 3：A 有两个子节点，麻烦了，为了不破坏 BST 的性质，A 必须找到左子树中最大的那个节点，或者右子树中最小的那个节点来接替自己。我们以第二种方式讲解。




```
if (root.left != null && root.right != null) {
    // 找到右子树的最小节点
    TreeNode minNode = getMin(root.right);
    // 把 root 改成 minNode
    root.val = minNode.val;
    // 转而去删除 minNode
    root.right = deleteNode(root.right, minNode.val);
}
```

三种情况分析完毕，填入框架，简化一下代码：

```
TreeNode deleteNode(TreeNode root, int key) {
    if (root == null) return null;
    if (root.val == key) {
        // 这两个 if 把情况 1 和 2 都正确处理了
        if (root.left == null) return root.right;
        if (root.right == null) return root.left;
        // 处理情况 3
        // 获得右子树最小的节点
        TreeNode minNode = getMin(root.right);
        // 删除右子树最小的节点
        root.right = deleteNode(root.right, minNode.val);
        // 用右子树最小的节点替换 root 节点
        minNode.left = root.left;
        minNode.right = root.right;
        root = minNode;
    } else if (root.val > key) {
        root.left = deleteNode(root.left, key);
    } else if (root.val < key) {
        root.right = deleteNode(root.right, key);
    }
    return root;
}

TreeNode getMin(TreeNode node) {
    // BST 最左边的就是最小的
    while (node.left != null) node = node.left;
    return node;
}
```

▶ 🌈 代码可视化动画🌈

这样，删除操作就完成了。注意一下，上述代码在处理情况 3 时通过一系列略微复杂的链表操作交换 `root` 和 `minNode` 两个节点：

```
// 处理情况 3
// 获得右子树最小的节点
TreeNode minNode = getMin(root.right);
// 删除右子树最小的节点
root.right = deleteNode(root.right, minNode.val);
// 用右子树最小的节点替换 root 节点
minNode.left = root.left;
minNode.right = root.right;
root = minNode;
```

有的读者可能会疑惑，替换 `root` 节点为什么这么麻烦，直接改 `val` 字段不就行了？看起来还更简洁易懂：

```
// 处理情况 3
// 获得右子树最小的节点
TreeNode minNode = getMin(root.right);
// 删除右子树最小的节点
root.right = deleteNode(root.right, minNode.val);
// 用右子树最小的节点替换 root 节点
root.val = minNode.val;
```

仅对于这道算法题来说是可以的，但这样操作并不完美，我们一般不会通过修改节点内部的值来交换节点。因为在实际应用中，BST 节点内部的数据域是用户自定义的，可以非常复杂，而 BST 作为数据结构（一个工具人），其操作应该和内部存储的数据域解耦，所以我们更倾向于使用指针操作来交换节点，根本没必要关心内部数据。

最后总结一下吧，通过这篇文章，我们总结出了如下几个技巧：

1、如果当前节点会对下面的子节点有整体影响，可以通过辅助函数增长参数列表，借助参数传递信息。

2、在二叉树递归框架之上，扩展出一套 BST 代码框架：

```
void BST(TreeNode root, int target) {
    if (root.val == target)
        // 找到目标，做点什么
    if (root.val < target)
        BST(root.right, target);
    if (root.val > target)
        BST(root.left, target);
}
```

3、根据代码框架掌握了 BST 的增删查改操作。

本文就到这里，更多经典的二叉树习题以及递归思维的训练，请参见二叉树章节中的 递归专项练习

如果你有高质量的问题，可以 点击这里 进入本文的讨论区。

▶ 引用本文的题目

安装 我的 Chrome 刷题插件 点开下列题目可直接查看解题思路：

LeetCode	力扣
-	剑指 Offer 33. 二叉搜索树的后序遍历序列

▶ 引用本文的文章

- 东哥带你刷二叉搜索树（构造篇）
- 二叉树的递归转迭代的代码框架
- 前缀树算法模板秒杀五道算法题
- 后序遍历的妙用

——————————————

更多精品课程可查看 我的网站；扫码查看更多配套学习套件：

东哥带你刷二叉搜索树（构造篇）

Stars 123k 精品课程 查看 知乎 @labuladong B站 @labuladong

微信搜一搜 labuladong公众号

学算法认准 labuladong，致力于把算法讲清楚！网页版 点这里。

读完本文，你不仅学会了算法套路，还可以顺便解决如下题目：

LeetCode	力扣	难度
95. Unique Binary Search Trees II	95. 不同的二叉搜索树 II	🟠
96. Unique Binary Search Trees	96. 不同的二叉搜索树	🟠

之前写了两篇手把手刷 BST 算法题的文章，第一篇 讲了中序遍历对 BST 的重要意义，第二篇 写了 BST 的基本操作。

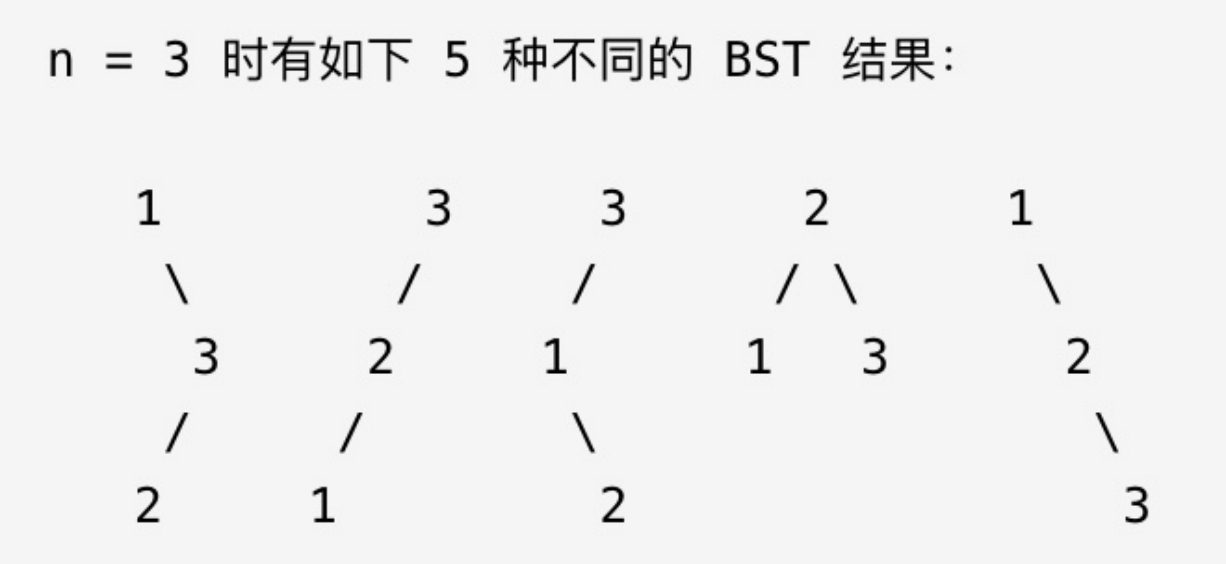
本文就来写手把手刷 BST 系列的第三篇，循序渐进地讲两道题，如何计算所有有效 BST。

第一道题是力扣第 96 题「不同的二叉搜索树」，给你输入一个正整数 `n`，请你计算，存储 `{1,2,3...,n}` 这些值共有多少种不同的 BST 结构。

函数签名如下：

```
int numTrees(int n);
```

比如说输入 `n = 3`，算法返回 5，因为共有如下 5 种不同的 BST 结构存储 `{1,2,3}`：



这就是一个正宗的穷举问题，那么什么方式能够正确地穷举有效 BST 的数量呢?

我们前文说过，不要小看「穷举」，这是一件看起来简单但是比较有技术含量的事情，问题的关键就是不能数漏，也不能数多，你咋整?

之前 手把手刷二叉树第一期 说过，二叉树算法的关键就在于明确根节点需要做什么，其实 BST 作为一种特殊的二叉树，核心思路也是一样的。

如果你有高质量的问题，可以 点击这里 进入本文的讨论区。

▶ **引用本文的文章**

- 二叉树的递归转迭代的代码框架

————————————————

本文为网站会员内容，请 点这里 查看。

东哥带你刷二叉搜索树（后序篇）

Stars 123k 精品课程 查看 知乎 @labuladong B站 @labuladong

学算法认准 labuladong，致力于把算法讲清楚！网页版 点这里。

读完本文，你不仅学会了算法套路，还可以顺便解决如下题目：

LeetCode	力扣	难度
1373. Maximum Sum BST in Binary Tree	1373. 二叉搜索子树的最大键值和	🔴

> 这篇文章可以和很好的阐明 手把手带你刷二叉树（纲领篇） 所讲的后序遍历位置的妙用。

其实二叉树的题目真的不难，无非就是前中后序遍历框架来回倒嘛，但是对于有的题目，不同的遍历顺序时间复杂度不同。

之前面试美团，就遇到一道二叉树算法题，当时我是把解法写出来了，面试官说如果用后序遍历，时间复杂度可以更低。

本文就来分析一道类似的题目，通过二叉树的后序遍历，来大幅降低算法的复杂度。

手把手刷二叉树第一期 说过**二叉树相关题目最核心的思路是明确当前节点需要做的事情是什么**。

我们再看看后序遍历的代码框架：

```
void traverse(TreeNode root) {
    traverse(root.left);
    traverse(root.right);
    /* 后序遍历代码的位置 */
    /* 在这里处理当前节点 */
}
```

看这个代码框架，你说后序遍历什么时候出现呢？

如果当前节点要做的事情需要通过左右子树的计算结果推导出来，就要用到后序遍历。

很多时候，后序遍历用得好，可以大幅提升算法效率。

我们今天就要讲一个经典的算法问题，可以直观地体会到这一点。

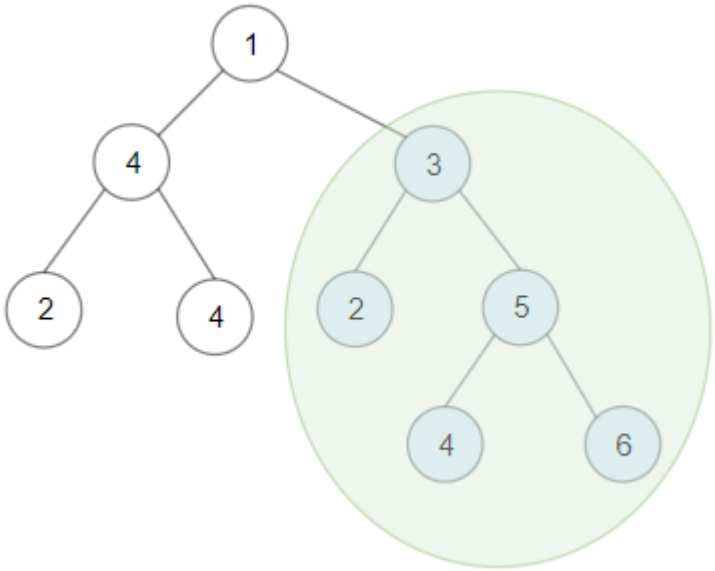
这是力扣第 1373 题「二叉搜索子树的最大键值和」，函数签名如下：

```
int maxSumBST(TreeNode root);
```

题目会给你输入一棵二叉树，这棵二叉树的子树中可能包含**二叉搜索树**对吧，请你找到**节点之和最大的**那棵二叉搜索树，返回它的节点值之和。

二叉搜索树（简写作 BST）的性质不用我多介绍了吧，简单说就是「左小右大」，对于每个节点，整棵左子树都比该节点的值小，整棵右子树都比该节点的值大。

比如题目给了这个例子：

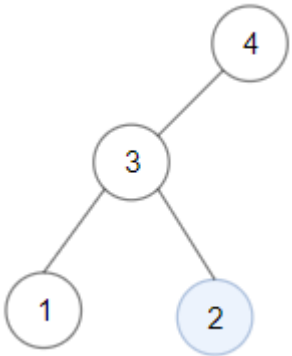


如果输入这棵二叉树，算法应该返回 20，也就是图中绿圈的那棵子树的节点值之和，因为它是一棵 BST，且节点之和最大。

那有的读者可能会问，根据 BST 的定义，有没有可能一棵二叉树中不存在 BST？

不会的，因为按照 BST 的定义，任何一个单独的节点肯定是 BST，也就是说，再不济，二叉树最下面的叶子节点肯定是 BST。

比如说如果输入下面这棵二叉树：



两个叶子节点 1 和 2 就是 BST，比较一下节点之和，算法应该返回 2。

好了，到这里，题目应该解释地很清楚了，下面我们来分析一下这道题应该怎么做。

刚才说了，**二叉树相关题目最核心的思路是明确当前节点需要做的事情是什么**。

那么我们想计算子树中 BST 的最大和，站在当前节点的视角，需要做什么呢？

1、我肯定得知道左右子树是不是合法的 BST，如果这俩儿子有一个不是 BST，以我为根的这棵树肯定不会是 BST，对吧。

2、如果左右子树都是合法的 BST，我得瞅瞅左右子树加上自己还是不是合法的 BST 了。因为按照 BST 的定义，当前节点的值应该大于左子树的最大值，小于右子树的最小值，否则就破坏了 BST 的性质。

3、因为题目要计算最大的节点之和，如果左右子树加上我自己还是一棵合法的 BST，也就是说以我为根的整棵树是一棵 BST，那我需要知道我们这棵 BST 的所有节点值之和是多少，方便和别的 BST 争个高下，对吧。

根据以上三点，站在当前节点的视角，需要知道以下具体信息：

1、左右子树是否是 BST。

2、左子树的最大值和右子树的最小值。

3、左右子树的节点值之和。

只有知道了这几个值，我们才能满足题目的要求，后面我们会想方设法计算这些值。

现在可以尝试用伪码写出算法的大致逻辑：

```
// 全局变量，记录 BST 最大节点之和
int maxSum = 0;

/* 主函数 */
public int maxSumBST(TreeNode root) {
    traverse(root);
    return maxSum;
}

/* 遍历二叉树 */
void traverse(TreeNode root) {
    if (root == null) {
        return;
    }

    /******* 前序遍历位置 *******/
    // 判断左右子树是不是 BST
    if (!isBST(root.left) || !isBST(root.right)) {
        goto next;
    }
    // 计算左子树的最大值和右子树的最小值
    int leftMax = findMax(root.left);
    int rightMin = findMin(root.right);
    // 判断以 root 节点为根的树是不是 BST
    if (root.val <= leftMax || root.val >= rightMin) {
```

```
            goto next;
        }
        // 如果条件都符合，计算当前 BST 的节点之和
        int leftSum = findSum(root.left);
        int rightSum = findSum(root.right);
        int rootSum = leftSum + rightSum + root.val;
        // 计算 BST 节点的最大和
        this.maxSum = Math.max(maxSum, rootSum);
        /************************/

        // 递归左右子树
        next:
        traverse(root.left);
        traverse(root.right);
    }

    /* 计算以 root 为根的二叉树的最大值 */
    int findMax(TreeNode root) {}

    /* 计算以 root 为根的二叉树的最小值 */
    int findMin(TreeNode root) {}

    /* 计算以 root 为根的二叉树的节点和 */
    int findSum(TreeNode root) {}

    /* 判断以 root 为根的二叉树是否是 BST */
    boolean isBST(TreeNode root) {}
```

这个代码逻辑应该是不难理解的，代码在前序遍历的位置把之前的分析都实现了一遍。

其中有四个辅助函数比较简单，我就不具体实现了，其中只有判断合法 BST 的函数稍有技术含量，前文 二叉搜索树操作集锦 写过，这里就不展开了。

稍作分析就会发现，这几个辅助函数都是递归函数，都要遍历输入的二叉树，外加 `traverse` 函数本身的递归，可以说是递归上加递归，所以这个解法的复杂度是非常高的。

但是根据刚才的分析，像 `leftMax`、`rootSum` 这些变量又都得算出来，否则无法完成题目的要求。

我们希望既算出这些变量，又避免辅助函数带来的额外复杂度，鱼和熊掌全都要！

其实是可以的，**只要把前序遍历变成后序遍历，让 `traverse` 函数把辅助函数做的事情顺便做掉**。

这就是我在前文 手把手带你刷二叉树（纲领篇） 所讲的后序遍历位置的妙用。当然，正如前文所讲，如果要利用函数的返回值，就不建议使用 `traverse` 这个函数名了，我们想计算最大值、最小值和所有节点之和，不妨叫这个函数 `findMaxMinSum` 好了。

其他代码不变，我们让 `findMaxMinSum` 函数做一些计算任务，返回一个数组：

```
// 全局变量，记录 BST 最大节点之和
int maxSum = 0;

/* 主函数 */
```

```
public int maxSumBST(TreeNode root) {
    traverse(root);
    return maxSum;
}

// 函数返回 int[]{ isBST, min, max, sum}
int[] findMaxMinSum(TreeNode root) {

    int[] left = findMaxMinSum(root.left);
    int[] right = findMaxMinSum(root.right);

    /******* 后序遍历位置 *******/
    // 通过 left 和 right 推导返回值
    // 并且正确更新 maxSum 变量
    /************************/
}
```

`findMaxMinSum(root)` 返回一个大小为 4 的 int 数组，我们暂且称它为 `res`，其中：

`res[0]` 记录以 `root` 为根的二叉树是否是 BST，若为 1 则说明是 BST，若为 0 则说明不是 BST；

`res[1]` 记录以 `root` 为根的二叉树所有节点中的最小值；

`res[2]` 记录以 `root` 为根的二叉树所有节点中的最大值；

`res[3]` 记录以 `root` 为根的二叉树所有节点值之和。

其实这就是把之前分析中说到的几个值放到了 `res` 数组中，**最重要的是，我们要试图通过 `left` 和 `right` 正确推导出 `res` 数组**。

直接看代码实现吧：

```
int[] findMaxMinSum(TreeNode root) {
    // base case
    if (root == null) {
        return new int[] {
            1, Integer.MAX_VALUE, Integer.MIN_VALUE, 0
        };
    }

    // 递归计算左右子树
    int[] left = findMaxMinSum(root.left);
    int[] right = findMaxMinSum(root.right);

    /******* 后序遍历位置 *******/
    int[] res = new int[4];
    // 这个 if 在判断以 root 为根的二叉树是不是 BST
    if (left[0] == 1 && right[0] == 1 &&
        root.val > left[2] && root.val < right[1]) {
        // 以 root 为根的二叉树是 BST
        res[0] = 1;
        // 计算以 root 为根的这棵 BST 的最小值
```

```
            res[1] = Math.min(left[1], root.val);
            // 计算以 root 为根的这棵 BST 的最大值
            res[2] = Math.max(right[2], root.val);
            // 计算以 root 为根的这棵 BST 所有节点之和
            res[3] = left[3] + right[3] + root.val;
            // 更新全局变量
            maxSum = Math.max(maxSum, res[3]);
        } else {
            // 以 root 为根的二叉树不是 BST
            res[0] = 0;
            // 其他的值都没必要计算了，因为用不到
        }
        /***************************/

        return res;
    }
```

这样，这道题就解决了，`findMaxMinSum` 函数在遍历二叉树的同时顺便把之前辅助函数做的事情都做了，避免了在递归函数中调用递归函数，时间复杂度只有 O(N)。

你看，这就是后序遍历的妙用，相对前序遍历的解法，现在的解法不仅效率高，而且代码量少，比较优美。

那肯定有读者问，后序遍历这么好，是不是就应该尽可能多用后序遍历？

其实也不是，主要是看题目，就好比 BST 的中序遍历是有序的一样。

这道题为什么用后序遍历呢，因为我们需要的这些变量都是可以通过后序遍历得到的。

你计算以 `root` 为根的二叉树的节点之和，是不是可以通过左右子树的和加上 `root.val` 计算出来？

你计算以 `root` 为根的二叉树的最大值/最小值，是不是可以通过左右子树的最大值/最小值和 `root.val` 比较出来？

你判断以 `root` 为根的二叉树是不是 BST，是不是得先判断左右子树是不是 BST？是不是还得看看左右子树的最大值和最小值？

文章开头说过，**如果当前节点要做的事情需要通过左右子树的计算结果推导出来，就要用到后序遍历**。

因为以上几点都可以通过后序遍历的方式计算出来，所以这道题使用后序遍历肯定是最高效的。

以我的刷题经验，我们要尽可能避免递归函数中调用其他递归函数，如果出现这种情况，大概率是代码实现有瑕疵，可以进行类似本文的优化来避免递归套递归。

本文就到这里，更多经典的二叉树习题以及递归思维的训练，请参见二叉树章节中的 递归专项练习。

如果你有高质量的问题，可以 点击这里 进入本文的讨论区。

▶ **引用本文的题目**

安装 我的 Chrome 刷题插件 点开下列题目可直接查看解题思路：

LeetCode	力扣

LeetCode	力扣
366. Find Leaves of Binary Tree🔒	366. 寻找二叉树的叶子节点🔒

▶ 引用本文的文章

- 二叉树的递归转迭代的代码框架

———————————————

更多精品课程可查看 我的网站；扫码查看更多配套学习套件：

快速排序详解及应用

Stars 123k 精品课程 查看 知乎 @labuladong B站 @labuladong

学算法认准 labuladong，致力于把算法讲清楚！网页版 点这里。

读完本文，你不仅学会了算法套路，还可以顺便解决如下题目：

LeetCode	力扣	难度
215. Kth Largest Element in an Array	215. 数组中的第K个最大元素	🟠
912. Sort an Array	912. 排序数组	🟠
-	剑指 Offer II 076. 数组中的第 k 大的数字	🟠

前文 归并排序算法详解 通过二叉树的视角描述了归并排序的算法原理以及应用，很多读者大呼精妙，那我就趁热打铁，**今天继续用二叉树的视角讲一讲快速排序算法的原理以及运用**。

快速排序算法思路

首先我们看一下快速排序的代码框架：

```
void sort(int[] nums, int lo, int hi) {
    if (lo >= hi) {
        return;
    }
    // 对 nums[lo..hi] 进行切分
    // 使得 nums[lo..p-1] <= nums[p] < nums[p+1..hi]
    int p = partition(nums, lo, hi);
    // 去左右子数组进行切分
    sort(nums, lo, p - 1);
    sort(nums, p + 1, hi);
}
```

其实你对比之后可以发现，快速排序就是一个二叉树的前序遍历：

```
/* 二叉树遍历框架 */
void traverse(TreeNode root) {
    if (root == null) {
        return;
```

```
        }
        /****** 前序位置 ******/
        print(root.val);
        /**********************/
        traverse(root.left);
        traverse(root.right);
    }
```

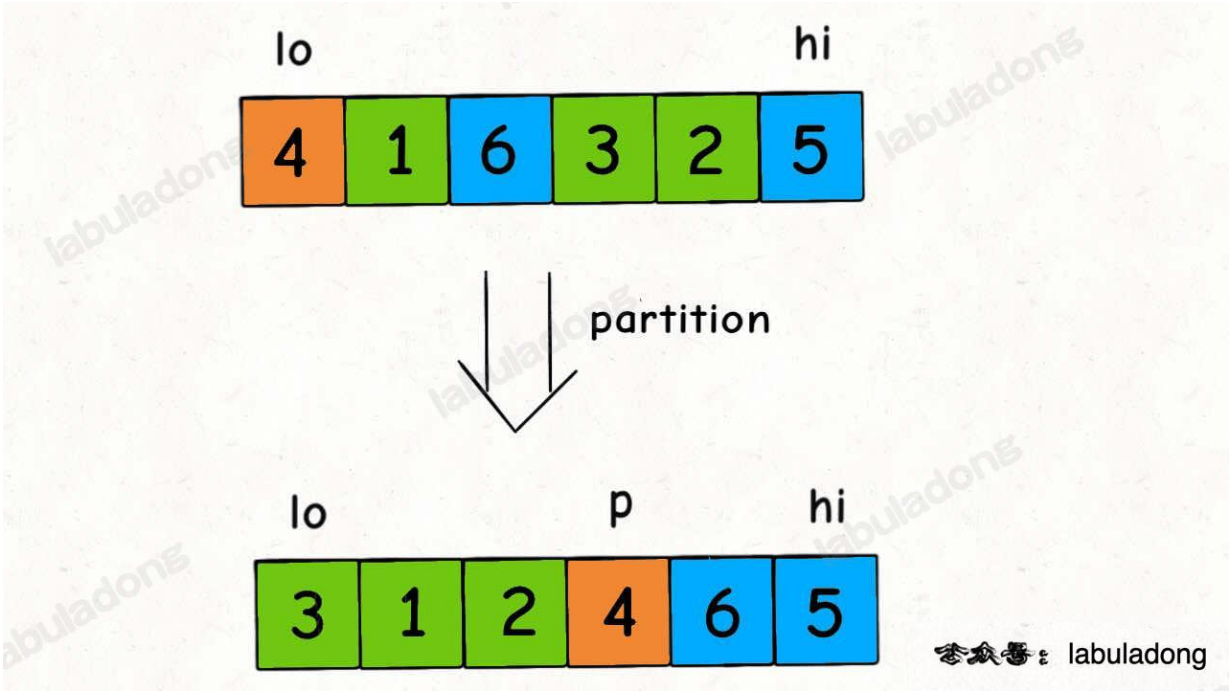
另外，前文 归并排序详解 用一句话总结了归并排序：先把左半边数组排好序，再把右半边数组排好序，然后把两半数组合并。

同时我提了一个问题，让你一句话总结快速排序，这里说一下我的答案：

快速排序是先将一个元素排好序，然后再将剩下的元素排好序。

为什么这么说呢，且听我慢慢道来。

快速排序的核心无疑是 `partition` 函数， `partition` 函数的作用是在 `nums[lo..hi]` 中寻找一个切分点 `p`，通过交换元素使得 `nums[lo..p-1]` 都小于等于 `nums[p]`，且 `nums[p+1..hi]` 都大于 `nums[p]`：



一个元素左边的元素都比它小，右边的元素都比它大，啥意思？不就是它自己已经被放到正确的位置上了吗？

所以 `partition` 函数干的事情，其实就是把 `nums[p]` 这个元素排好序了。

一个元素被排好序了，然后呢？你再把剩下的元素排好序不就得了。

剩下的元素有哪些？左边一坨，右边一坨，去吧，对子数组进行递归，用 `partition` 函数把剩下的元素也排好序。

从二叉树的视角，我们可以把子数组 `nums[lo..hi]` 理解成二叉树节点上的值，`sort` 函数理解成二叉树的遍历函数。

参照二叉树的前序遍历顺序，快速排序的运行过程如下 GIF：

如果你有高质量的问题，可以 点击这里 进入本文的讨论区。

▶ 引用本文的题目

安装 我的 Chrome 刷题插件 点开下列题目可直接查看解题思路：

LeetCode	力扣
347. Top K Frequent Elements	347. 前 K 个高频元素
-	剑指 Offer 40. 最小的k个数
-	剑指 Offer II 060. 出现频率最高的 k 个数字
-	剑指 Offer II 076. 数组中的第 k 大的数字

▶ 引用本文的文章

- 东哥带你刷二叉树（纲领篇）
- 归并排序详解及应用
- 谈谈游戏中的随机算法

————————————————

本文为网站会员内容，请 点这里 查看。

【强化练习】手把手带你刷 100 道二叉树

名称	最新版本号	详情
PDF 教材	V5.2	下载
刷题打卡挑战	开放报名	报名
网站会员	V已上线	购买
Chrome 刷题插件	V4.4.3	使用手册
vscode 刷题插件	V1.5.4	使用手册
JetBrains IDE 刷题插件	V1.8.6	使用手册

用「遍历」思维解题 I

一般来说，如果让你在二叉树的「树枝」上做文章，那么用遍历的思维模式解题是比较自然的想法。

▶ **引用本文的文章**

- 东哥带你刷二叉树（思路篇）
- 东哥带你刷二叉树（纲领篇）
- 二叉树的递归转迭代的代码框架
- 后序遍历的妙用
- 学习算法和刷题的框架思维
- 本站简介
- 题目不让我干什么，我偏要干什么

本文为网站会员内容，请 点这里 查看。

用「遍历」思维解题 II

> 如果让你在二叉树中的某些节点上做文章，一般来说也可以直接用遍历的思维模式。

本文为网站会员内容，请 点这里 查看。

用「遍历」思维解题 III

有时候二叉树的题目还会夹杂着其他算法技巧一起考你，不过都是换汤不换药，按照套路来就行了。看几道例题，体会一下。

本文为网站会员内容，请 点这里 查看。

用「分解问题」思维解题 I

> 最常见的，二叉树的列构造问题一般都会用到分解问题的思维模式。

▶ 引用本文的文章

- 东哥带你刷二叉树（序列化篇）

本文为网站会员内容，请 点这里 查看。

用「分解问题」思维解题 II

类似于判断镜像二叉树、翻转二叉树的问题，一般也可以用分解问题的思路，无非就是把整棵树的问题（原问题）分解成子树之间的问题（子问题）。

本文为网站会员内容，请 点这里 查看。

同时运用两种思维解题

有的题目可以同时用两种思路来解，你可以利用这些题目训练自己的思维。

本文为网站会员内容，请 点这里 查看。

利用后序位置解题 I

有些题目，你按照拍脑袋的方式去做，可能发现需要在递归代码中调用其他递归函数计算字数的信息。一般来说，出现这种情况时你可以考虑用后序遍历的思维方式来优化算法，利用后序遍历传递子树的信息，避免过高的时间复杂度。

本文为网站会员内容，请 点这里 查看。

利用后序位置解题 II

> 像求和、求高度这种基本的二叉树函数很容易写，有时候只要在它们的后序位置添加一点代码，就能得到我们想要的答案。

本文为网站会员内容，请 点这里 查看。

利用后序位置解题 III

> 写在后序位置的代码是最潇洒的，上通父节点（可以通过函数参数获取父节点信息），下通子树（可以通过递归返回值收集子树信息），有少部分难度比较大的题目会同时用到这两个特性。

本文为网站会员内容，请 点这里 查看。

运用层序遍历解题 I

二叉树大部分题目都可以用递归的算法解决，但少部分题目用递归比较麻烦的话，我们可以考虑使用层序遍历的方式解决。

本文为网站会员内容，请 点这里 查看。

运用层序遍历解题 II

有些二叉树的特殊技巧需要用层序遍历的方式来做，比如下面列举的几道题。这类问题你当特殊题型记住就行了，不会有太多变体的。

本文为网站会员内容，请 点这里 查看。

二叉搜索树经典例题 I

> BST 的题目最主要的还是考察你对 BST 特性的运用。

▶ 引用本文的文章

- 东哥带你刷二叉搜索树（基操篇）
- 东哥带你刷二叉搜索树（构造篇）
- 东哥带你刷二叉搜索树（特性篇）

———————————————

本文为网站会员内容，请 点这里 查看。

二叉搜索树经典例题 II

二叉搜索树的构造问题，牢记中序遍历的规律（根节点在中心，左小右大）。

本文为网站会员内容，请 点这里 查看。

2.3 图论

图论在实际笔试中考的不多，但它的经典算法比较多，比如什么最小生成树，最短路径，拓扑排序，二分图判定之类的。

所以本章围绕图论的经典算法展开，太难的图论算法我觉得咱是没多大必要掌握的。

公众号标签：图论算法

名称	最新版本号	详情
PDF 教材	V5.2	下载
刷题打卡挑战	开放报名	报名
网站会员	V已上线	购买
Chrome 刷题插件	V4.4.3	使用手册
vscode 刷题插件	V1.5.4	使用手册
JetBrains IDE 刷题插件	V1.8.6	使用手册

图论基础

Stars 123k 精品课程 查看 知乎 @labuladong B站 @labuladong

微信搜一搜 labuladong公众号

学算法认准 labuladong，致力于把算法讲清楚！网页版 点这里。

读完本文，你不仅学会了算法套路，还可以顺便解决如下题目：

LeetCode	力扣	难度
797. All Paths From Source to Target	797. 所有可能的路径	🟠
-	剑指 Offer II 110. 所有路径	🟠

> tip：本文有视频版：图论基础及遍历算法。建议关注我的 B 站账号，我会用视频领读的方式带大家学习那些稍有难度的算法技巧。

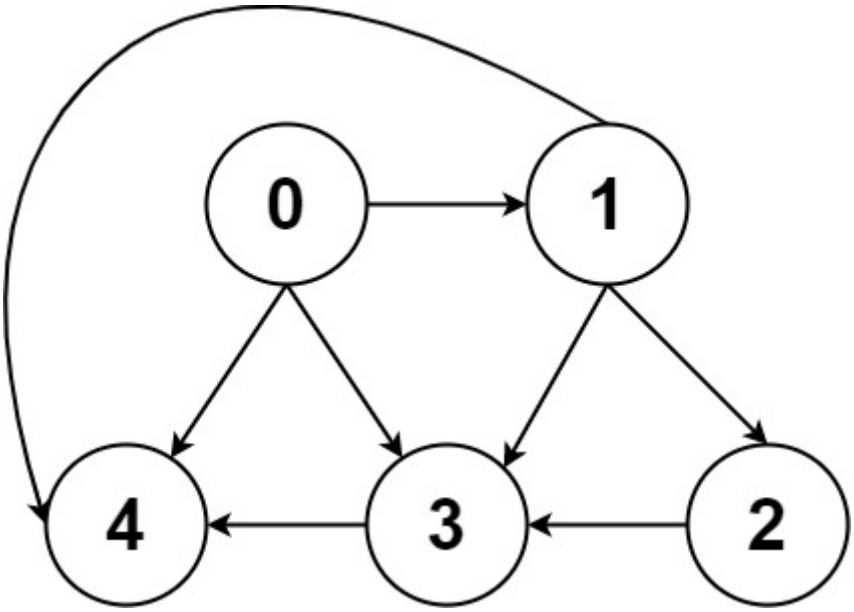
经常有读者问我「图」这种数据结构，其实我在 学习数据结构和算法的框架思维 中说过，虽然图可以玩出更多的算法，解决更复杂的问题，但本质上图可以认为是多叉树的延伸。

面试笔试很少出现图相关的问题，就算有，大多也是简单的遍历问题，基本上可以完全照搬多叉树的遍历。

那么，本文依然秉持我们号的风格，只讲「图」最实用的，离我们最近的部分，让你心里对图有个直观的认识，文末我给出了其他经典图论算法，理解本文后应该都可以拿下的。

图的逻辑结构和具体实现

一幅图是由**节点**和**边**构成的，逻辑结构如下：



什么叫「逻辑结构」？就是说为了方便研究，我们把图抽象成这个样子。

根据这个逻辑结构，我们可以认为每个节点的实现如下：

```
/* 图节点的逻辑结构 */
class Vertex {
    int id;
    Vertex[] neighbors;
}
```

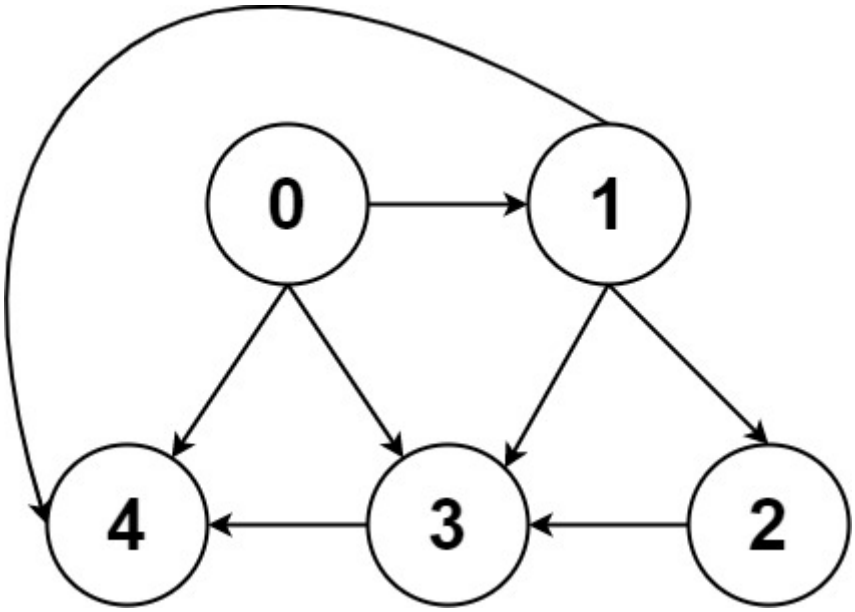
看到这个实现，你有没有很熟悉？它和我们之前说的多叉树节点几乎完全一样：

```
/* 基本的 N 叉树节点 */
class TreeNode {
    int val;
    TreeNode[] children;
}
```

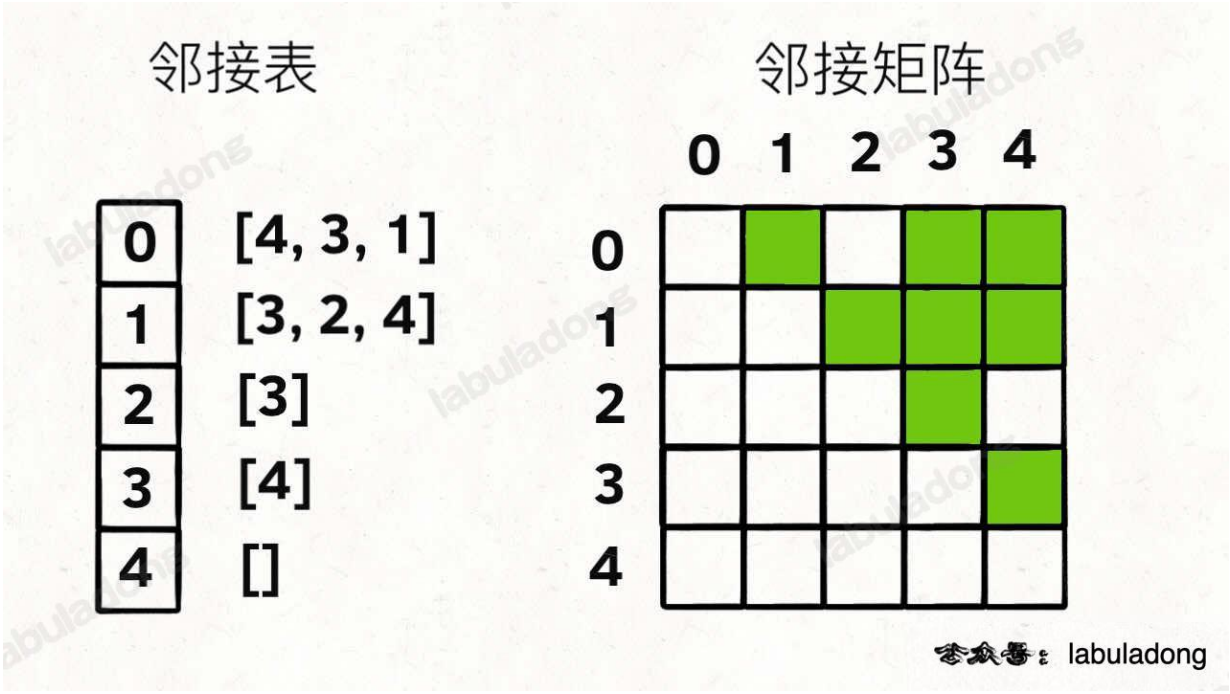
所以说，图真的没啥高深的，本质上就是个高级点的多叉树而已，适用于树的 DFS/BFS 遍历算法，全部适用于图。

不过呢，上面的这种实现是「逻辑上的」，实际上我们很少用这个 `Vertex` 类实现图，而是用常说的**邻接表和邻接矩阵**来实现。

比如还是刚才那幅图：



用邻接表和邻接矩阵的存储方式如下：



邻接表很直观，我把每个节点 `x` 的邻居都存到一个列表里，然后把 `x` 和这个列表关联起来，这样就可以通过一个节点 `x` 找到它的所有相邻节点。

邻接矩阵则是一个二维布尔数组，我们权且称为 `matrix`，如果节点 `x` 和 `y` 是相连的，那么就把 `matrix[x][y]` 设为 `true`（上图中绿色的方格代表 `true`）。如果想找节点 `x` 的邻居，去扫一圈 `matrix[x][..]` 就行了。

如果用代码的形式来表现，邻接表和邻接矩阵大概长这样：

```
// 邻接表
// graph[x] 存储 x 的所有邻居节点
List<Integer>[] graph;

// 邻接矩阵
```

```
// matrix[x][y] 记录 x 是否有一条指向 y 的边
boolean[][] matrix;
```

那么，为什么有这两种存储图的方式呢？肯定是因为他们各有优劣。

对于邻接表，好处是占用的空间少。

你看邻接矩阵里面空着那么多位置，肯定需要更多的存储空间。

但是，邻接表无法快速判断两个节点是否相邻。

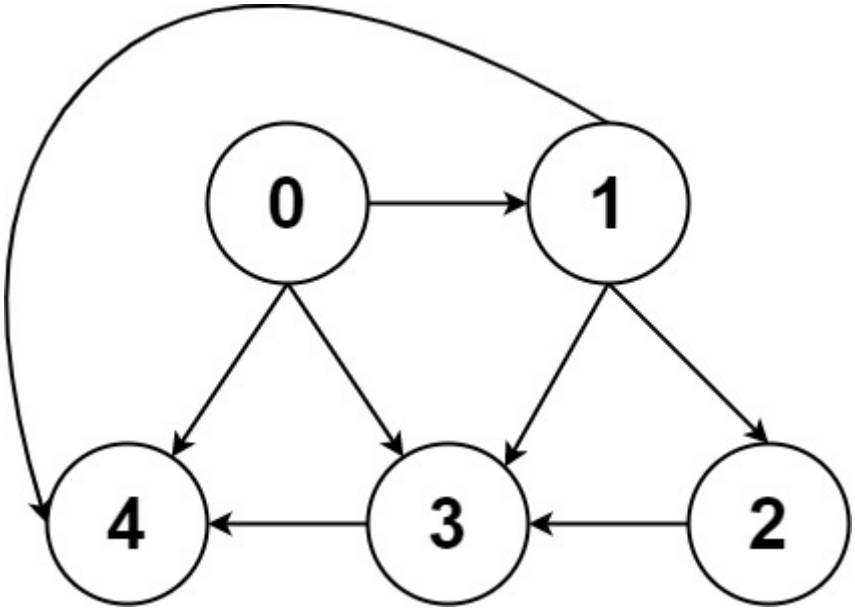
比如说我想判断节点 1 是否和节点 3 相邻，我要去邻接表里 1 对应的邻居列表里查找 3 是否存在。但对于邻接矩阵就简单了，只要看看 `matrix[1][3]` 就知道了，效率高。

所以说，使用哪一种方式实现图，要看具体情况。

> 在常规的算法题中，邻接表的使用会更频繁一些，主要是因为操作起来较为简单，但这不意味着邻接矩阵应该被轻视。矩阵是一个强有力的数学工具，图的一些隐晦性质可以借助精妙的矩阵运算展现出来。不过本文不准备引入数学内容，所以有兴趣的读者可以自行搜索学习。

最后，我们再明确一个图论中特有的**度**（degree）的概念，在无向图中，「度」就是每个节点相连的边的条数。

由于有向图的边有方向，所以有向图中每个节点「度」被细分为**入度**（indegree）和**出度**（outdegree），比如下图：



其中节点 3 的入度为 3（有三条边指向它），出度为 1（它有 1 条边指向别的节点）。

好了，对于「图」这种数据结构，能看懂上面这些就绰绰够用了。

那你可能会问，我们上面说的这个图的模型仅仅是「有向无权图」，不是还有什么加权图，无向图，等等……

其实，这些更复杂的模型都是基于这个最简单的图衍生出来的。

有向加权图怎么实现？很简单呀：

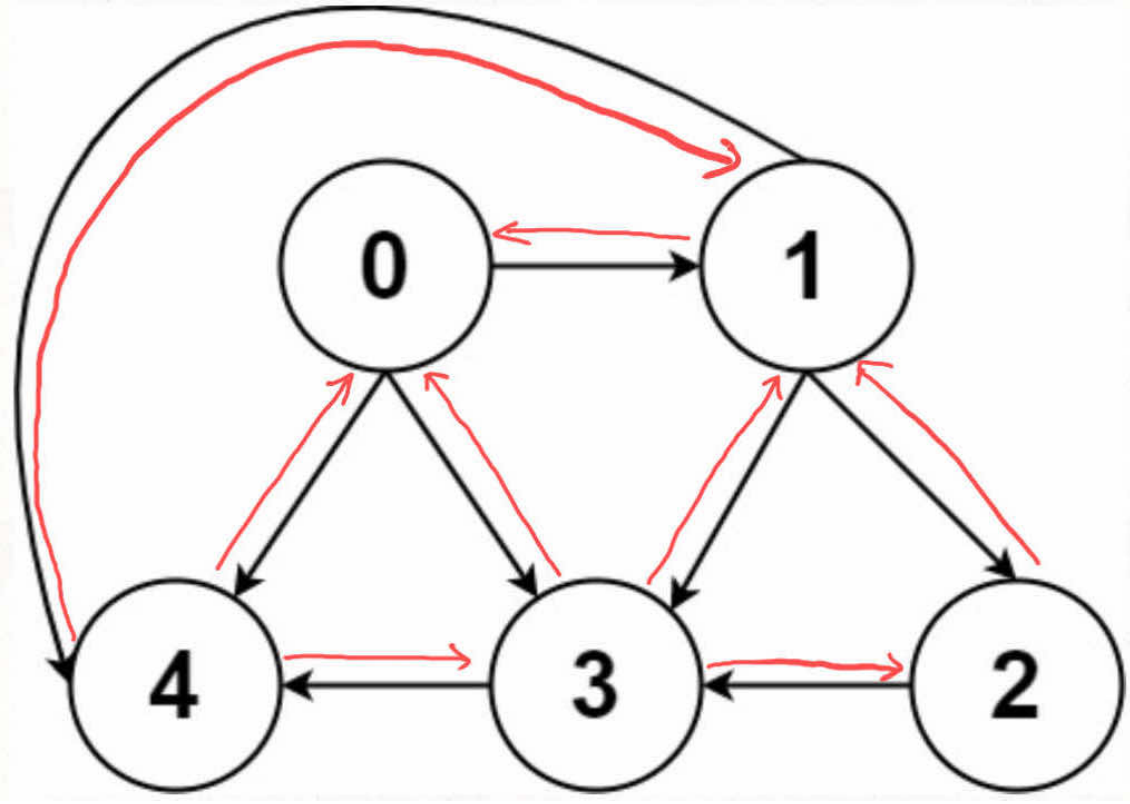
如果是邻接表，我们不仅仅存储某个节点 x 的所有邻居节点，还存储 x 到每个邻居的权重，不就实现加权有向图了吗？

如果是邻接矩阵，matrix[x][y] 不再是布尔值，而是一个 int 值，0 表示没有连接，其他值表示权重，不就变成加权有向图了吗？

如果用代码的形式来表现，大概长这样：

```
// 邻接表
// graph[x] 存储 x 的所有邻居节点以及对应的权重
List<int[]>[] graph;

// 邻接矩阵
// matrix[x][y] 记录 x 指向 y 的边的权重，0 表示不相邻
int[][] matrix;
```

无向图怎么实现？也很简单，所谓的「无向」，是不是等同于「双向」？



如果连接无向图中的节点 x 和 y，把 matrix[x][y] 和 matrix[y][x] 都变成 true 不就行了；邻接表也是类似的操作，在 x 的邻居列表里添加 y，同时在 y 的邻居列表里添加 x。

把上面的技巧合起来，就变成了无向加权图……

好了，关于图的基本介绍就到这里，现在不管来什么乱七八糟的图，你心里应该都有底了。

下面来看看所有数据结构都逃不过的问题：遍历。

图的遍历

学习数据结构和算法的框架思维 说过，各种数据结构被发明出来无非就是为了遍历和访问，所以「遍历」是所有数据结构的基础。

图怎么遍历？还是那句话，参考多叉树，多叉树的 DFS 遍历框架如下：

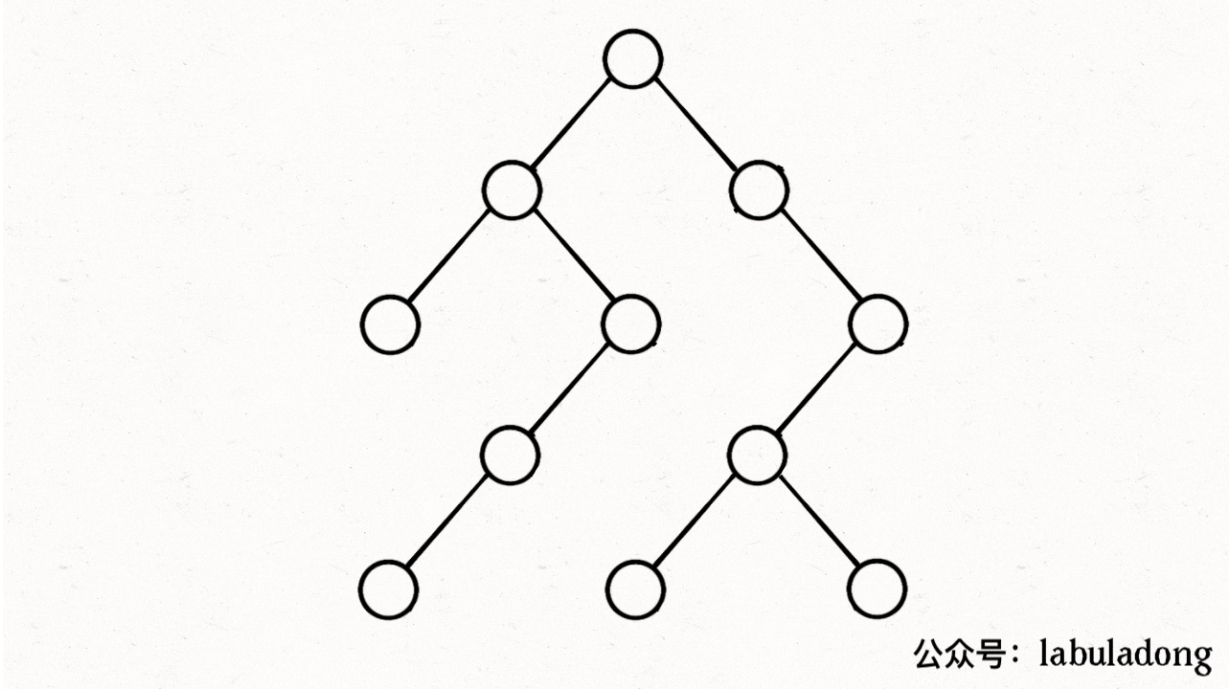
```
/* 多叉树遍历框架 */
void traverse(TreeNode root) {
    if (root == null) return;
    // 前序位置
    for (TreeNode child : root.children) {
        traverse(child);
    }
    // 后序位置
}
```

图和多叉树最大的区别是，图是可能包含环的，你从图的某一个节点开始遍历，有可能走了一圈又回到这个节点，而树不会出现这种情况，从某个节点出发必然走到叶子节点，绝不可能回到它自身。

所以，如果图包含环，遍历框架就要一个 `visited` 数组进行辅助：

```
// 记录被遍历过的节点
boolean[] visited;
// 记录从起点到当前节点的路径
boolean[] onPath;

/* 图遍历框架 */
void traverse(Graph graph, int s) {
    if (visited[s]) return;
    // 经过节点 s，标记为已遍历
    visited[s] = true;
    // 做选择：标记节点 s 在路径上
    onPath[s] = true;
    for (int neighbor : graph.neighbors(s)) {
        traverse(graph, neighbor);
    }
    // 撤销选择：节点 s 离开路径
    onPath[s] = false;
}
```

注意 `visited` 数组和 `onPath` 数组的区别，因为二叉树算是特殊的图，所以用遍历二叉树的过程来理解下这两个数组的区别：



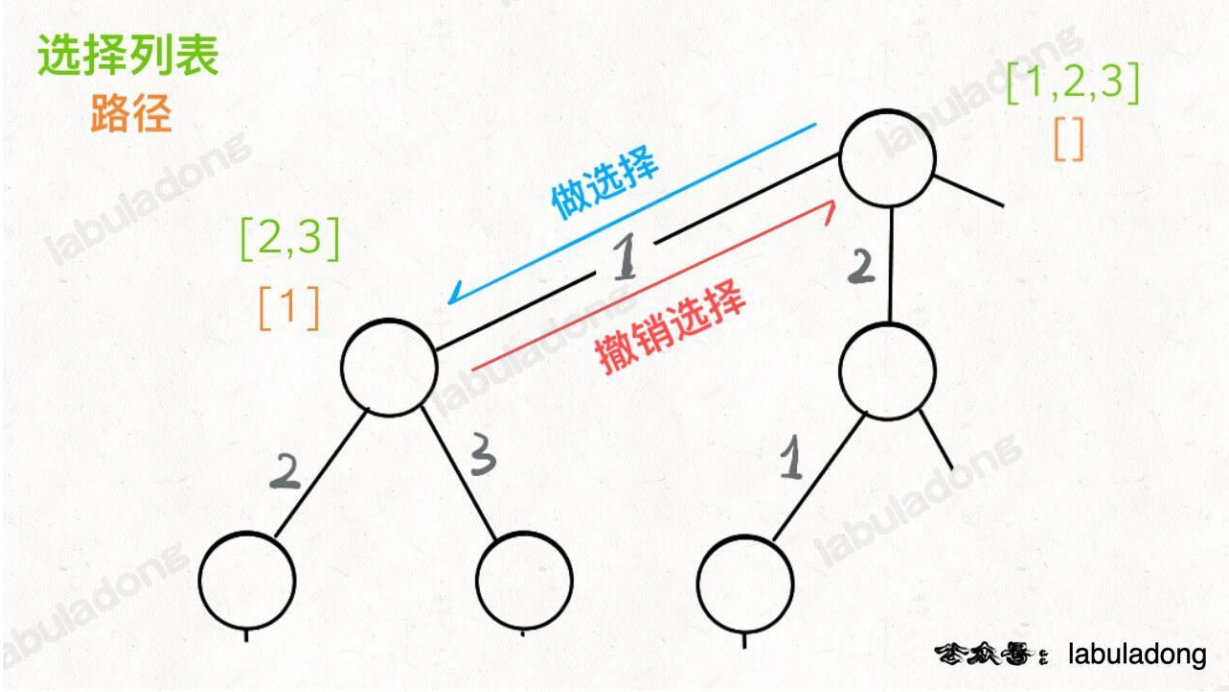
上述 GIF 描述了递归遍历二叉树的过程，在 `visited` 中被标记为 true 的节点用灰色表示，在 `onPath` 中被标记为 true 的节点用绿色表示，类比贪吃蛇游戏，`visited` 记录蛇经过过的格子，而 `onPath` 仅仅记录蛇身。在图的遍历过程中，`onPath` 用于判断是否成环，类比当贪吃蛇自己咬到自己（成环）的场景，这下你可以理解它们二者的区别了吧。

如果让你处理路径相关的问题，这个 `onPath` 变量是肯定会被用到的，比如 拓扑排序 中就有运用。

另外，你应该注意到了，这个 `onPath` 数组的操作很像后文 回溯算法核心套路 中做「做选择」和「撤销选择」，区别在于位置：回溯算法的「做选择」和「撤销选择」在 for 循环里面，而对 `onPath` 数组的操作在 for 循环外面。

为什么有这个区别呢？这就是前文 东哥带你刷二叉树（纲领篇） 中讲到的回溯算法和 DFS 算法的区别所在：回溯算法关注的不是节点，而是树枝。如果没印象了，强烈建议重新阅读前文。

对于回溯算法，我们需要在「树枝」上做选择和撤销选择：



他们的区别可以这样反应到代码上：

```
// DFS 算法，关注点在节点
void traverse(TreeNode root) {
    if (root == null) return;
    printf("进入节点 %s", root);
    for (TreeNode child : root.children) {
        traverse(child);
    }
    printf("离开节点 %s", root);
}

// 回溯算法，关注点在树枝
void backtrack(TreeNode root) {
    if (root == null) return;
    for (TreeNode child : root.children) {
        // 做选择
        printf("从 %s 到 %s", root, child);
        backtrack(child);
        // 撤销选择
        printf("从 %s 到 %s", child, root);
    }
}
```

如果执行这段代码，你会发现根节点被漏掉了：

```
void traverse(TreeNode root) {
    if (root == null) return;
    for (TreeNode child : root.children) {
        printf("进入节点 %s", child);
        traverse(child);
        printf("离开节点 %s", child);
    }
}
```

所以对于这里「图」的遍历，我们应该用 DFS 算法，即把 `onPath` 的操作放到 for 循环外面，否则会漏掉记录起始点的遍历。

说了这么多 `onPath` 数组，再说下 `visited` 数组，其目的很明显了，由于图可能含有环，`visited` 数组就是防止递归重复遍历同一个节点进入死循环的。

当然，如果题目告诉你图中不含环，可以把 `visited` 数组都省掉，基本就是多叉树的遍历。

题目实践

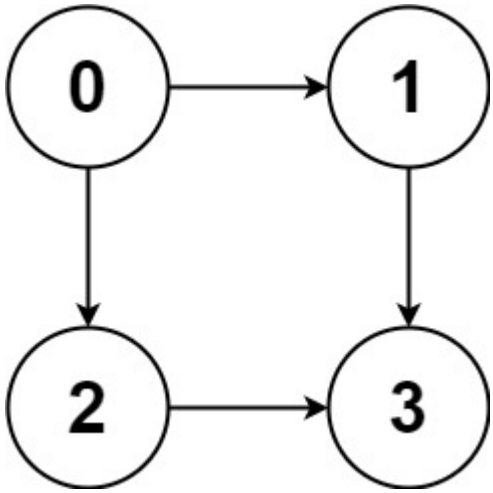
下面我们来看力扣第 797 题「所有可能路径」，函数签名如下：

```
List<List<Integer>> allPathsSourceTarget(int[][] graph);
```

题目输入一幅**有向无环图**，这个图包含 n 个节点，标号为 0, 1, 2,..., n - 1，请你计算所有从节点 0 到节点 n - 1 的路径。

输入的这个 graph 其实就是「邻接表」表示的一幅图，graph[i] 存储这节点 i 的所有邻居节点。

比如输入 graph = [[1,2],[3],[3],[]]，就代表下面这幅图：



算法应该返回 [[0,1,3],[0,2,3]]，即 0 到 3 的所有路径。

解法很简单，以 0 为起点遍历图，同时记录遍历过的路径，当遍历到终点时将路径记录下来即可。

既然输入的图是无环的，我们就不需要 visited 数组辅助了，直接套用图的遍历框架：

```
class Solution {
    // 记录所有路径
    List<List<Integer>> res = new LinkedList<>();

    public List<List<Integer>> allPathsSourceTarget(int[][] graph) {
        // 维护递归过程中经过的路径
        LinkedList<Integer> path = new LinkedList<>();
        traverse(graph, 0, path);
        return res;
    }

    /* 图的遍历框架 */
    void traverse(int[][] graph, int s, LinkedList<Integer> path) {
        // 添加节点 s 到路径
        path.addLast(s);

        int n = graph.length;
        if (s == n - 1) {
            // 到达终点
            res.add(new LinkedList<>(path));
            // 可以在这直接 return，但要 removeLast 正确维护 path
            // path.removeLast();
            // return;
            // 不 return 也可以，因为图中不包含环，不会出现无限递归
        }
```

```
            // 递归每个相邻节点
            for (int v : graph[s]) {
                traverse(graph, v, path);
            }

            // 从路径移出节点 s
            path.removeLast();
        }
    }
```

▶ 🌈 代码可视化动画🌈

这道题就这样解决了，注意 Java 的语言特性，因为 Java 函数参数传的是对象引用，所以向 `res` 中添加 `path` 时需要拷贝一个新的列表，否则最终 `res` 中的列表都是空的。

最后总结一下，图的存储方式主要有邻接表和邻接矩阵，无论什么花里胡哨的图，都可以用这两种方式存储。

在笔试中，最常考的算法是图的遍历，和多叉树的遍历框架是非常类似的。

当然，图还会有很多其他的有趣算法，比如 二分图判定，环检测和拓扑排序（编译器循环引用检测就是类似的算法），最小生成树，Dijkstra 最短路径算法 等等，有兴趣的读者可以去看看，本文就到这了。

如果你有高质量的问题，可以 点击这里 进入本文的讨论区。

▶ 引用本文的题目

安装 我的 Chrome 刷题插件 点开下列题目可直接查看解题思路：

LeetCode	力扣
1245. Tree Diameter🔒	1245. 树的直径🔒
133. Clone Graph	133. 克隆图
1443. Minimum Time to Collect All Apples in a Tree	1443. 收集树上所有苹果的最少时间
200. Number of Islands	200. 岛屿数量
2049. Count Nodes With the Highest Score	2049. 统计最高分的节点数目
310. Minimum Height Trees	310. 最小高度树
542. 01 Matrix	542. 01 矩阵
582. Kill Process🔒	582. 杀掉进程🔒
79. Word Search	79. 单词搜索
-	剑指 Offer II 110. 所有路径

▶ 引用本文的文章

- Dijkstra 算法模板及应用
- Prim 最小生成树算法
- 一文秒杀所有岛屿题目
- 东哥带你刷二叉树（纲领篇）
- 二分图判定算法
- 众里寻他千百度：名流问题
- 前缀树算法模板秒杀五道算法题
- 回溯算法解题套路框架
- 并查集（Union-Find）算法
- 我的刷题心得：算法的本质
- 环检测及拓扑排序算法
- 用算法打败算法
- 算法学习和心流体验

——————————————

更多精品课程可查看 我的网站；扫码查看更多配套学习套件：

拓扑排序

Stars 123k 精品课程 查看 知乎 @labuladong B站 @labuladong

学算法认准 labuladong，致力于把算法讲清楚！网页版 点这里。

读完本文，你不仅学会了算法套路，还可以顺便解决如下题目：

LeetCode	力扣	难度
207. Course Schedule	207. 课程表	🟠
210. Course Schedule II	210. 课程表 II	🟠
-	剑指 Offer II 113. 课程顺序	🟠

> tip：本文有视频版：拓扑排序详解及应用。建议关注我的 B 站账号，我会用视频领读的方式带大家学习那些稍有难度的算法技巧。

图这种数据结构有一些比较特殊的算法，比如二分图判断，有环图无环图的判断，拓扑排序，以及最经典的最小生成树，单源最短路径问题，更难的就是类似网络流这样的问题。

不过以我的经验呢，像网络流这种问题，你又不是打竞赛的，没时间的话就没必要学了；像 最小生成树 和 最短路径问题，虽然从刷题的角度用到的不多，但它们属于经典算法，学有余力可以掌握一下；像 二分图判定、拓扑排序这一类，属于比较基本且有用的算法，应该比较熟练地掌握。

那么本文就结合具体的算法题，来说两个图论算法：有向图的环检测、拓扑排序算法。

这两个算法既可以用 DFS 思路解决，也可以用 BFS 思路解决，相对而言 BFS 解法从代码实现上看更简洁一些，但 DFS 解法有助于你进一步理解递归遍历数据结构的奥义，所以本文中我先讲 DFS 遍历的思路，再讲 BFS 遍历的思路。

环检测算法（DFS 版本）

先来看看力扣第 207 题「课程表」：

▼ 207. 课程表 Leetcode | 力扣

你这个学期必须选修 `numCourses` 门课程，记为 `0` 到 `numCourses - 1` 。

在选修某些课程之前需要一些先修课程。 先修课程按数组 `prerequisites` 给出，其中 `prerequisites[i] = [a_i, b_i]` ，表示如果要学习课程 a_i 则 **必须** 先学习课程 b_i 。

- 例如，先修课程对 `[0, 1]` 表示：想要学习课程 `0` ，你需要先完成课程 `1` 。

请你判断是否可能完成所有课程的学习？如果可以，返回 `true`；否则，返回 `false`。

示例 1：

```
输入：numCourses = 2, prerequisites = [[1,0]]
输出：true
解释：总共有 2 门课程。学习课程 1 之前，你需要完成课程 0 。这是可能的。
```

示例 2：

```
输入：numCourses = 2, prerequisites = [[1,0],[0,1]]
输出：false
解释：总共有 2 门课程。学习课程 1 之前，你需要先完成课程 0 ；并且学习课程 0 之前，你还应先完成课程 1 。这是不可能的。
```

提示：

- `1 <= numCourses <= 2000`
- `0 <= prerequisites.length <= 5000`
- `prerequisites[i].length == 2`
- `0 <= a_i, b_i < numCourses`
- `prerequisites[i]` 中的所有课程对 **互不相同**

函数签名如下：

```
boolean canFinish(int numCourses, int[][] prerequisites);
```

题目应该不难理解，什么时候无法修完所有课程？当存在循环依赖的时候。

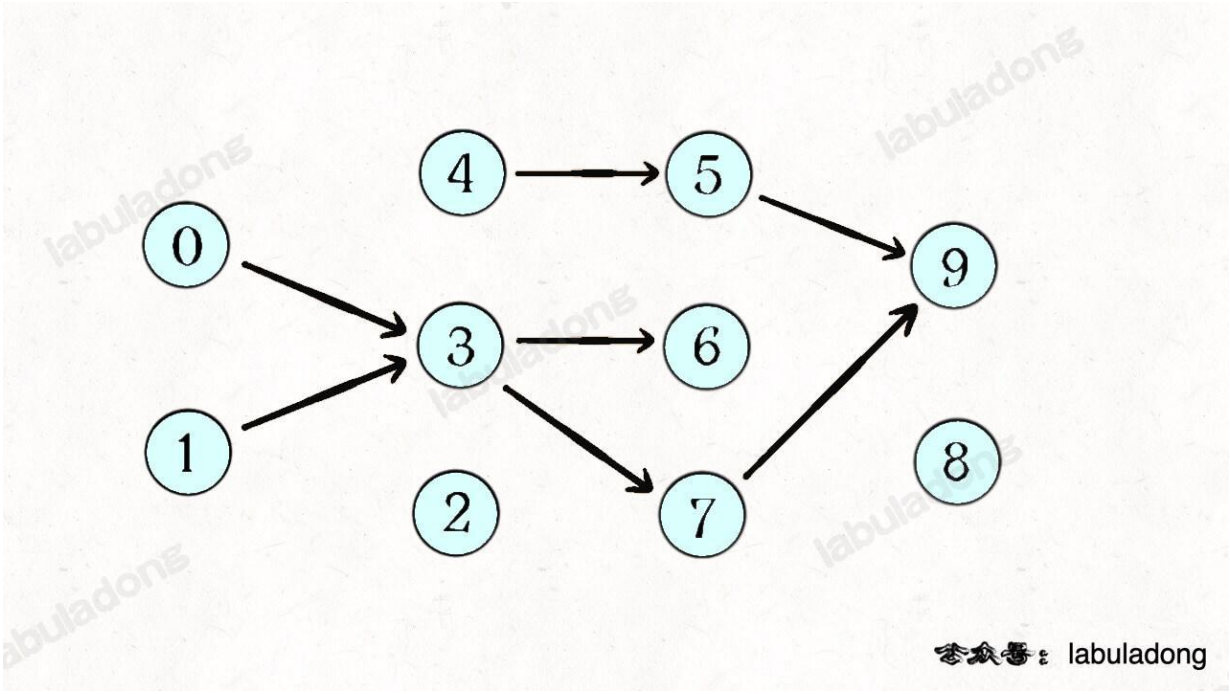
其实这种场景在现实生活中也十分常见，比如我们写代码 import 包也是一个例子，必须合理设计代码目录结构，否则会出现循环依赖，编译器会报错，所以编译器实际上也使用了类似算法来判断你的代码是否能够成功编译。

看到依赖问题，首先想到的就是把问题转化成「有向图」这种数据结构，只要图中存在环，那就说明存在循环依赖。

具体来说，我们首先可以把课程看成「有向图」中的节点，节点编号分别是 `0, 1, ..., numCourses-1`，把课程之间的依赖关系看做节点之间的有向边。

比如说必须修完课程 1 才能去修课程 3，那么就有一条有向边从节点 1 指向 3。

所以我们可以根据题目输入的 `prerequisites` 数组生成一幅类似这样的图：



如果发现这幅有向图中存在环，那就说明课程之间存在循环依赖，肯定没办法全部上完；反之，如果没有环，那么肯定能上完全部课程。

好，那么想解决这个问题，首先我们要把题目的输入转化成一幅有向图，然后再判断图中是否存在环。

如何转换成图呢？我们前文 图论基础 写过图的两种存储形式，邻接矩阵和邻接表。

以我刷题的经验，常见的存储方式是使用邻接表，比如下面这种结构：

```
List<Integer>[] graph;
```

`graph[s]` 是一个列表，存储着节点 `s` 所指向的节点。

所以我们首先可以写一个建图函数：

```
List<Integer>[] buildGraph(int numCourses, int[][] prerequisites) {
    // 图中共有 numCourses 个节点
    List<Integer>[] graph = new LinkedList[numCourses];
    for (int i = 0; i < numCourses; i++) {
        graph[i] = new LinkedList<>();
    }
    for (int[] edge : prerequisites) {
        int from = edge[1], to = edge[0];
        // 添加一条从 from 指向 to 的有向边
        // 边的方向是「被依赖」关系，即修完课程 from 才能修课程 to
        graph[from].add(to);
    }
    return graph;
}
```

图建出来了，怎么判断图中有没有环呢？

先不要急，我们先来思考如何遍历这幅图，只要会遍历，就可以判断图中是否存在环了。

前文 图论基础 写了 DFS 算法遍历图的框架，无非就是从多叉树遍历框架扩展出来的，加了个 `visited` 数组罢了：

```
// 防止重复遍历同一个节点
boolean[] visited;
// 从节点 s 开始 DFS 遍历，将遍历过的节点标记为 true
void traverse(List<Integer>[] graph, int s) {
    if (visited[s]) {
        return;
    }
    /* 前序遍历代码位置 */
    // 将当前节点标记为已遍历
    visited[s] = true;
    for (int t : graph[s]) {
        traverse(graph, t);
    }
    /* 后序遍历代码位置 */
}
```

那么我们就可以直接套用这个遍历代码：

```
// 防止重复遍历同一个节点
boolean[] visited;

boolean canFinish(int numCourses, int[][] prerequisites) {
    List<Integer>[] graph = buildGraph(numCourses, prerequisites);

    visited = new boolean[numCourses];
    for (int i = 0; i < numCourses; i++) {
        traverse(graph, i);
    }
}

void traverse(List<Integer>[] graph, int s) {
    // 代码见上文
}
```

注意图中并不是所有节点都相连，所以要用一个 for 循环将所有节点都作为起点调用一次 DFS 搜索算法。

这样，就能遍历这幅图中的所有节点了，你打印一下 `visited` 数组，应该全是 true。

前文 学习数据结构和算法的框架思维 说过，图的遍历和遍历多叉树差不多，所以到这里你应该都能很容易理解。

现在可以思考如何判断这幅图中是否存在环。

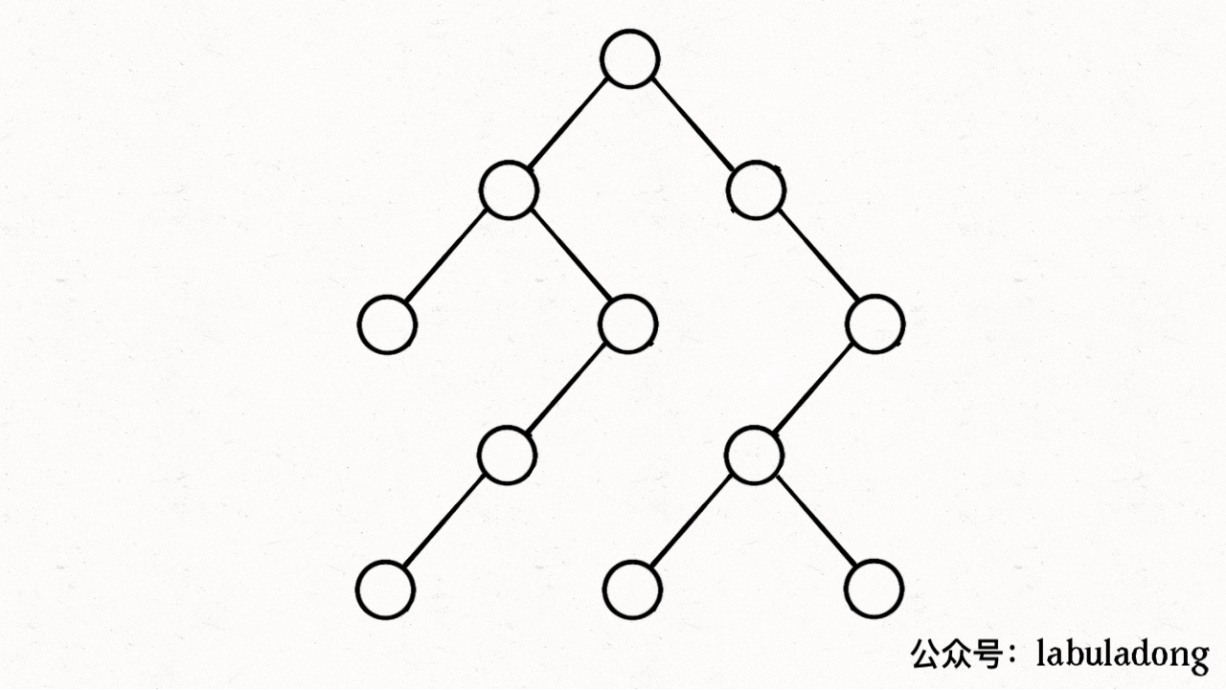
我们后文 回溯算法核心套路详解 说过，你可以把递归函数看成一个在递归树上游走的指针，这里也是类似的：

你也可以把 `traverse` 看做在图中节点上游走的指针，只需要再添加一个布尔数组 `onPath` 记录当前 `traverse` 经过的路径：

```
boolean[] onPath;
boolean[] visited;

boolean hasCycle = false;

void traverse(List<Integer>[] graph, int s) {
    if (onPath[s]) {
        // 发现环！！！
        hasCycle = true;
    }
    if (visited[s] || hasCycle) {
        return;
    }
    // 将节点 s 标记为已遍历
    visited[s] = true;
    // 开始遍历节点 s
    onPath[s] = true;
    for (int t : graph[s]) {
        traverse(graph, t);
    }
    // 节点 s 遍历完成
    onPath[s] = false;
}
```

这里就有点回溯算法的味道了，在进入节点 `s` 的时候将 `onPath[s]` 标记为 true，离开时标记回 false，如果发现 `onPath[s]` 已经被标记，说明出现了环。

注意 `visited` 数组和 `onPath` 数组的区别，因为二叉树算是特殊的图，所以用遍历二叉树的过程来理解下这两个数组的区别：



上述 GIF 描述了递归遍历二叉树的过程，在 `visited` 中被标记为 true 的节点用灰色表示，在 `onPath` 中被标记为 true 的节点用绿色表示。

> 类比贪吃蛇游戏，`visited` 记录蛇经过过的格子，而 `onPath` 仅仅记录蛇身。`onPath` 用于判断是否成环，类比当贪吃蛇自己咬到自己（成环）的场景。

这样，就可以在遍历图的过程中顺便判断是否存在环了，完整代码如下：

```
class Solution {
    // 记录一次递归堆栈中的节点
    boolean[] onPath;
    // 记录遍历过的节点，防止走回头路
    boolean[] visited;
    // 记录图中是否有环
    boolean hasCycle = false;

    boolean canFinish(int numCourses, int[][] prerequisites) {
        List<Integer>[] graph = buildGraph(numCourses, prerequisites);

        visited = new boolean[numCourses];
        onPath = new boolean[numCourses];

        for (int i = 0; i < numCourses; i++) {
            // 遍历图中的所有节点
            traverse(graph, i);
        }
        // 只要没有循环依赖可以完成所有课程
        return !hasCycle;
    }

    void traverse(List<Integer>[] graph, int s) {
```

```
        if (onPath[s]) {
            // 出现环
            hasCycle = true;
        }

        if (visited[s] || hasCycle) {
            // 如果已经找到了环，也不用再遍历了
            return;
        }
        // 前序代码位置
        visited[s] = true;
        onPath[s] = true;
        for (int t : graph[s]) {
            traverse(graph, t);
        }
        // 后序代码位置
        onPath[s] = false;
    }

    List<Integer>[] buildGraph(int numCourses, int[][] prerequisites) {
        // 代码见前文
    }
}
```

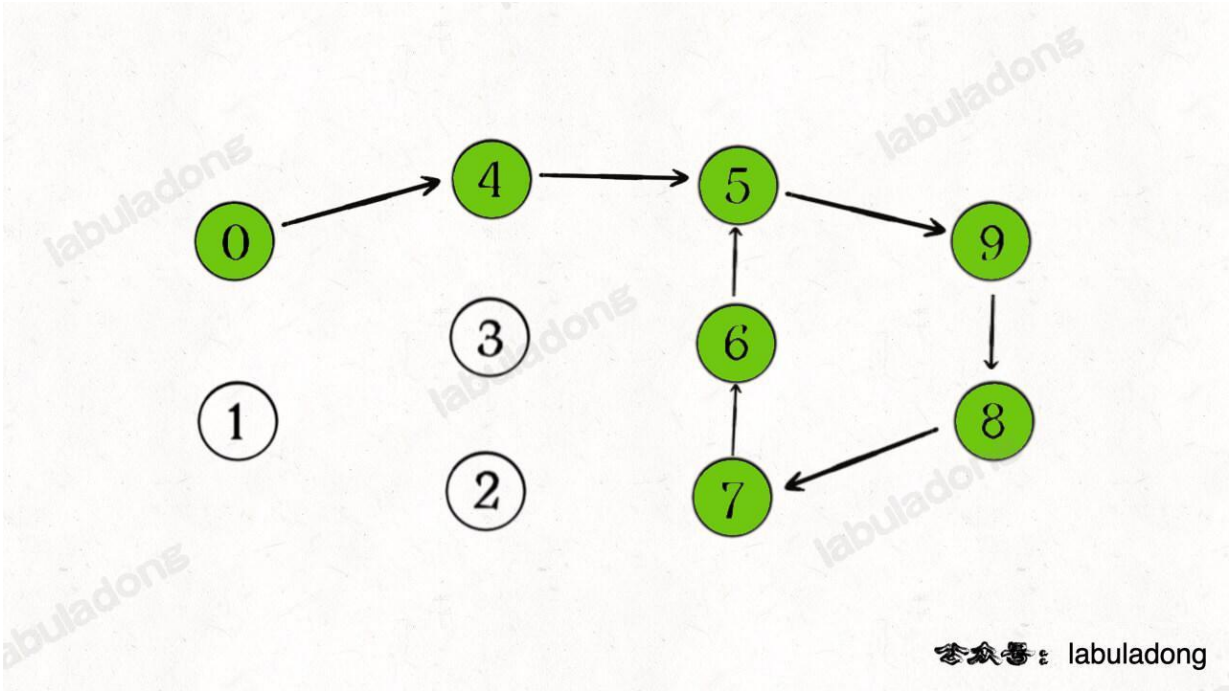
▶ 🌟 代码可视化动画🌟

这道题就解决了，核心就是判断一幅有向图中是否存在环。

不过如果出题人继续恶心你，让你不仅要判断是否存在环，还要返回这个环具体有哪些节点，怎么办？

你可能说，`onPath` 里面为 true 的索引，不就是组成环的节点编号吗？

不是的，假设下图中绿色的节点是递归的路径，它们在 `onPath` 中的值都是 true，但显然成环的节点只是其中的一部分：



这个问题留给大家思考，我会在公众号留言区置顶正确的答案。

那么接下来，我们来再讲一个经典的图算法：拓扑排序。

拓扑排序算法（DFS 版本）

看下力扣第 210 题「课程表 II」：

▼ 210. 课程表 II Leetcode | 力扣

现在你总共有 numCourses 门课需要选，记为 0 到 numCourses - 1。给你一个数组 prerequisites ，其中 prerequisites[i] = [a_i, b_i] ，表示在选修课程 a_i 前 **必须** 先选修 b_i 。

- 例如，想要学习课程 0 ，你需要先完成课程 1 ，我们用一个匹配来表示：[0,1] 。

返回你为了学完所有课程所安排的学习顺序。可能会有多个正确的顺序，你只要返回 **任意一种** 就可以了。如果不可能完成所有课程，返回 **一个空数组** 。

示例 1：

```
输入：numCourses = 2, prerequisites = [[1,0]]
输出：[0,1]
解释：总共有 2 门课程。要学习课程 1，你需要先完成课程 0。因此，正确的课程顺序为 [0,1]
。
```

示例 2：

```
输入：numCourses = 4, prerequisites = [[1,0],[2,0],[3,1],[3,2]]
输出：[0,2,1,3]
解释：总共有 4 门课程。要学习课程 3，你应该先完成课程 1 和课程 2。并且课程 1 和课程 2
```

都应该排在课程 0 之后。
因此，一个正确的课程顺序是 [0,1,2,3] 。另一个正确的排序是 [0,2,1,3] 。

示例 3：

```
输入：numCourses = 1, prerequisites = []
输出：[0]
```

提示：

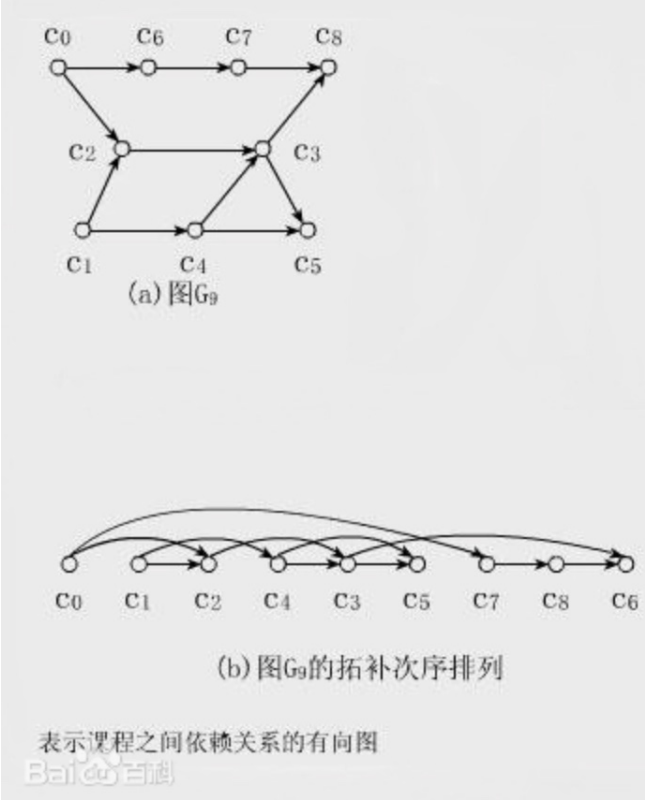
- 1 <= numCourses <= 2000
- 0 <= prerequisites.length <= numCourses * (numCourses - 1)
- prerequisites[i].length == 2
- 0 <= a_i, b_i < numCourses
- a_i != b_i
- 所有[a_i, b_i] **互不相同**

这道题就是上道题的进阶版，不是仅仅让你判断是否可以完成所有课程，而是进一步让你返回一个合理的上课顺序，保证开始修每个课程时，前置的课程都已经修完。

函数签名如下：

```
int[] findOrder(int numCourses, int[][] prerequisites);
```

这里我先说一下拓扑排序（Topological Sorting）这个名词，网上搜出来的定义很数学，这里干脆用百度百科的一幅图来让你直观地感受下：



> 图片中拓扑排序的结果有误，`C7->C8->C6` 应该改为 `C6->C7->C8`。

直观地说就是，让你把一幅图「拉平」，而且这个「拉平」的图里面，所有箭头方向都是一致的，比如上图所有箭头都是朝右的。

很显然，如果一幅有向图中存在环，是无法进行拓扑排序的，因为肯定做不到所有箭头方向一致；反过来，如果一幅图是「有向无环图」，那么一定可以进行拓扑排序。

但是我们这道题和拓扑排序有什么关系呢？

其实也不难看出来，如果把课程抽象成节点，课程之间的依赖关系抽象成有向边，那么这幅图的拓扑排序结果就是上课顺序。

首先，我们先判断一下题目输入的课程依赖是否成环，成环的话是无法进行拓扑排序的，所以我们可以复用上一道题的主函数：

```
public int[] findOrder(int numCourses, int[][] prerequisites) {
    if (!canFinish(numCourses, prerequisites)) {
        // 不可能完成所有课程
        return new int[]{};
    }
    // ...
}
```

那么关键问题来了，如何进行拓扑排序？是不是又要秀什么高大上的技巧了？

其实特别简单，将后序遍历的结果进行反转，就是拓扑排序的结果。

> 有的读者提到，他在网上看到的拓扑排序算法不用对后序遍历结果进行反转，这是为什么呢？
>
> 你确实可以看到这样的解法，原因是他建图的时候对边的定义和我不同。我建的图中箭头方向是「被依赖」关系，比如节点 1 指向 2，含义是节点 1 被节点 2 依赖，即做完 1 才能去做 2，
>
> 如果你反过来，把有向边定义为「依赖」关系，那么整幅图中边全部反转，就可以不对后序遍历结果反转。具体来说，就是把我的解法代码中 `graph[from].add(to);` 改成 `graph[to].add(from);` 就可以不反转了。

不过呢，现实中一般都是从初级任务指向进阶任务，所以像我这样把边定义为「被依赖」关系可能比较符合我们的认知习惯。

直接看解法代码吧，在上一题环检测的代码基础上添加了记录后序遍历结果的逻辑：

```
class Solution {
    // 记录后序遍历结果
    List<Integer> postorder = new ArrayList<>();
    // 记录是否存在环
    boolean hasCycle = false;
    boolean[] visited, onPath;

    // 主函数
    public int[] findOrder(int numCourses, int[][] prerequisites) {
        List<Integer>[] graph = buildGraph(numCourses, prerequisites);
        visited = new boolean[numCourses];
        onPath = new boolean[numCourses];
        // 遍历图
        for (int i = 0; i < numCourses; i++) {
            traverse(graph, i);
        }
        // 有环图无法进行拓扑排序
        if (hasCycle) {
            return new int[]{};
        }
        // 逆后序遍历结果即为拓扑排序结果
        Collections.reverse(postorder);
        int[] res = new int[numCourses];
        for (int i = 0; i < numCourses; i++) {
            res[i] = postorder.get(i);
        }
        return res;
    }

    // 图遍历函数
    void traverse(List<Integer>[] graph, int s) {
        if (onPath[s]) {
            // 发现环
            hasCycle = true;
        }
        if (visited[s] || hasCycle) {
```

```
                return;
            }
            // 前序遍历位置
            onPath[s] = true;
            visited[s] = true;
            for (int t : graph[s]) {
                traverse(graph, t);
            }
            // 后序遍历位置
            postorder.add(s);
            onPath[s] = false;
        }

        // 建图函数
        List<Integer>[] buildGraph(int numCourses, int[][] prerequisites) {
            // 代码见前文
        }
    }
```

▶ 🌟 代码可视化动画🌟

代码虽然看起来多，但是逻辑应该是很清楚的，只要图中无环，那么我们就调用 `traverse` 函数对图进行 DFS 遍历，记录后序遍历结果，最后把后序遍历结果反转，作为最终的答案。

那么为什么后序遍历的反转结果就是拓扑排序呢？

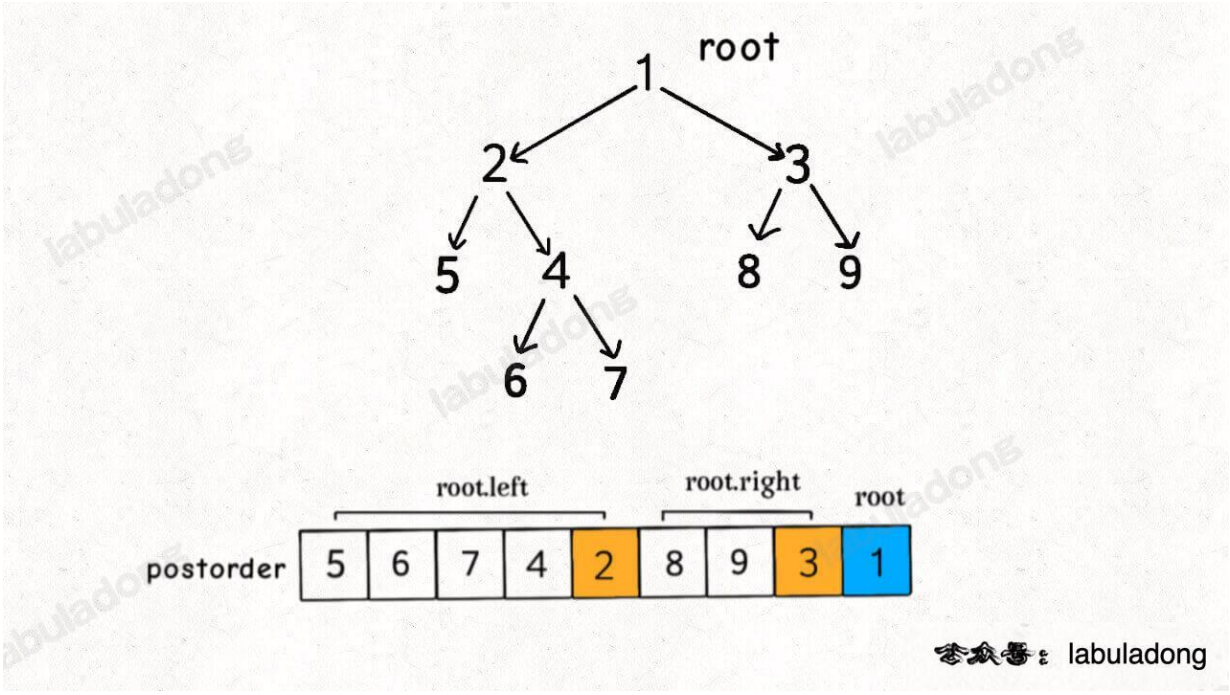
我这里也避免数学证明，用一个直观地例子来解释，我们就说二叉树，这是我们说过很多次的二叉树遍历框架：

```
void traverse(TreeNode root) {
    // 前序遍历代码位置
    traverse(root.left)
    // 中序遍历代码位置
    traverse(root.right)
    // 后序遍历代码位置
}
```

二叉树的后序遍历是什么时候？遍历完左右子树之后才会执行后序遍历位置的代码。换句话说，当左右子树的节点都被装到结果列表里面了，根节点才会被装进去。

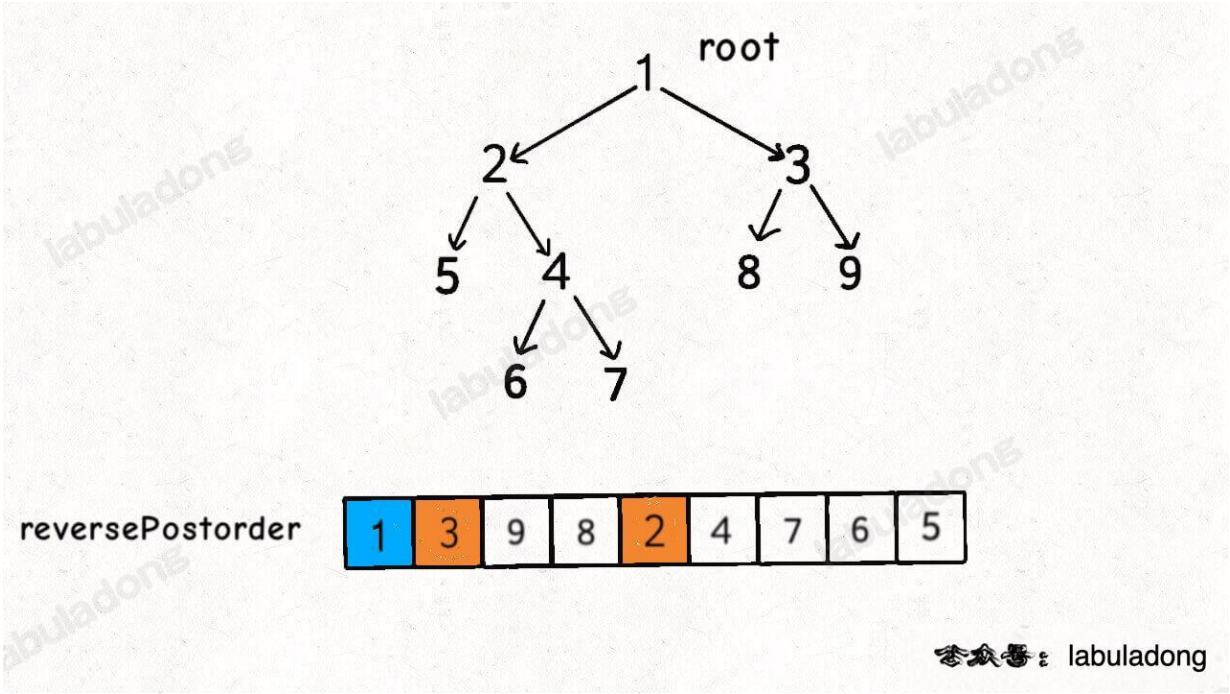
后序遍历的这一特点很重要，之所以拓扑排序的基础是后序遍历，是因为一个任务必须等到它依赖的所有任务都完成之后才能开始开始执行。

你把二叉树理解成一幅有向图，边的方向是由父节点指向子节点，那么就是下图这样：



按照我们的定义，边的含义是「被依赖」关系，那么上图的拓扑排序应该首先是节点 1，然后是 2, 3，以此类推。

但显然标准的后序遍历结果不满足拓扑排序，而如果把后序遍历结果反转，就是拓扑排序结果了：



以上，我直观解释了一下为什么「拓扑排序的结果就是反转之后的后序遍历结果」，当然，我的解释并没有严格的数学证明，有兴趣的读者可以自己查一下。

环检测算法（BFS 版本）

刚才讲了用 DFS 算法利用 `onPath` 数组判断是否存在环；也讲了用 DFS 算法利用逆后序遍历进行拓扑排序。

其实 BFS 算法借助 `indegree` 数组记录每个节点的「入度」，也可以实现这两个算法。不熟悉 BFS 算法的读者可阅读后文 BFS 算法核心框架。

所谓「出度」和「入度」是「有向图」中的概念，很直观：如果一个节点 x 有 a 条边指向别的节点，同时被 b 条边所指，则称节点 x 的出度为 a，入度为 b。

先说环检测算法，直接看 BFS 的解法代码：

```
// 主函数
public boolean canFinish(int numCourses, int[][] prerequisites) {
    // 建图，有向边代表「被依赖」关系
    List<Integer>[] graph = buildGraph(numCourses, prerequisites);
    // 构建入度数组
    int[] indegree = new int[numCourses];
    for (int[] edge : prerequisites) {
        int from = edge[1], to = edge[0];
        // 节点 to 的入度加一
        indegree[to]++;
    }

    // 根据入度初始化队列中的节点
    Queue<Integer> q = new LinkedList<>();
    for (int i = 0; i < numCourses; i++) {
        if (indegree[i] == 0) {
            // 节点 i 没有入度，即没有依赖的节点
            // 可以作为拓扑排序的起点，加入队列
            q.offer(i);
        }
    }

    // 记录遍历的节点个数
    int count = 0;
    // 开始执行 BFS 循环
    while (!q.isEmpty()) {
        // 弹出节点 cur，并将它指向的节点的入度减一
        int cur = q.poll();
        count++;
        for (int next : graph[cur]) {
            indegree[next]--;
            if (indegree[next] == 0) {
                // 如果入度变为 0，说明 next 依赖的节点都已被遍历
                q.offer(next);
            }
        }
    }

    // 如果所有节点都被遍历过，说明不成环
    return count == numCourses;
}


// 建图函数
List<Integer>[] buildGraph(int n, int[][] edges) {
    // 见前文
}
```

我先总结下这段 BFS 算法的思路：

1、构建邻接表，和之前一样，边的方向表示「被依赖」关系。

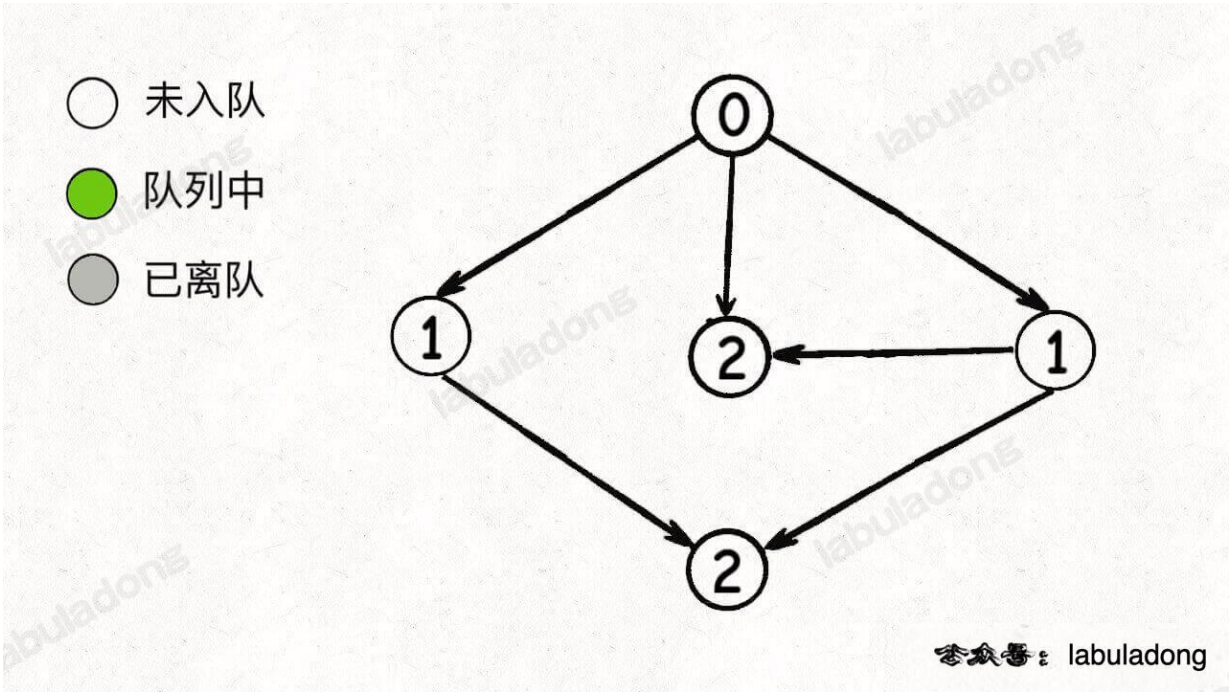
2、构建一个 `indegree` 数组记录每个节点的入度，即 `indegree[i]` 记录节点 `i` 的入度。

3、对 BFS 队列进行初始化，将入度为 0 的节点首先装入队列。

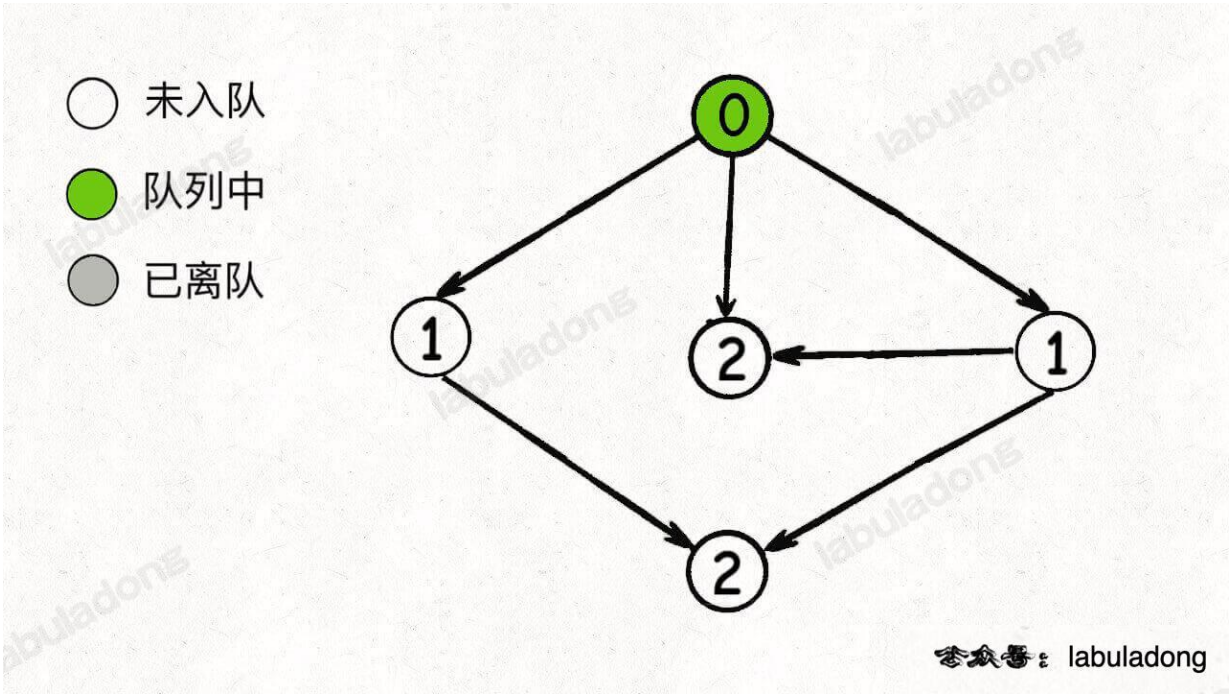
4、开始执行 BFS 循环，不断弹出队列中的节点，减少相邻节点的入度，并将入度变为 0 的节点加入队列。

5、如果最终所有节点都被遍历过（`count` 等于节点数），则说明不存在环，反之则说明存在环。

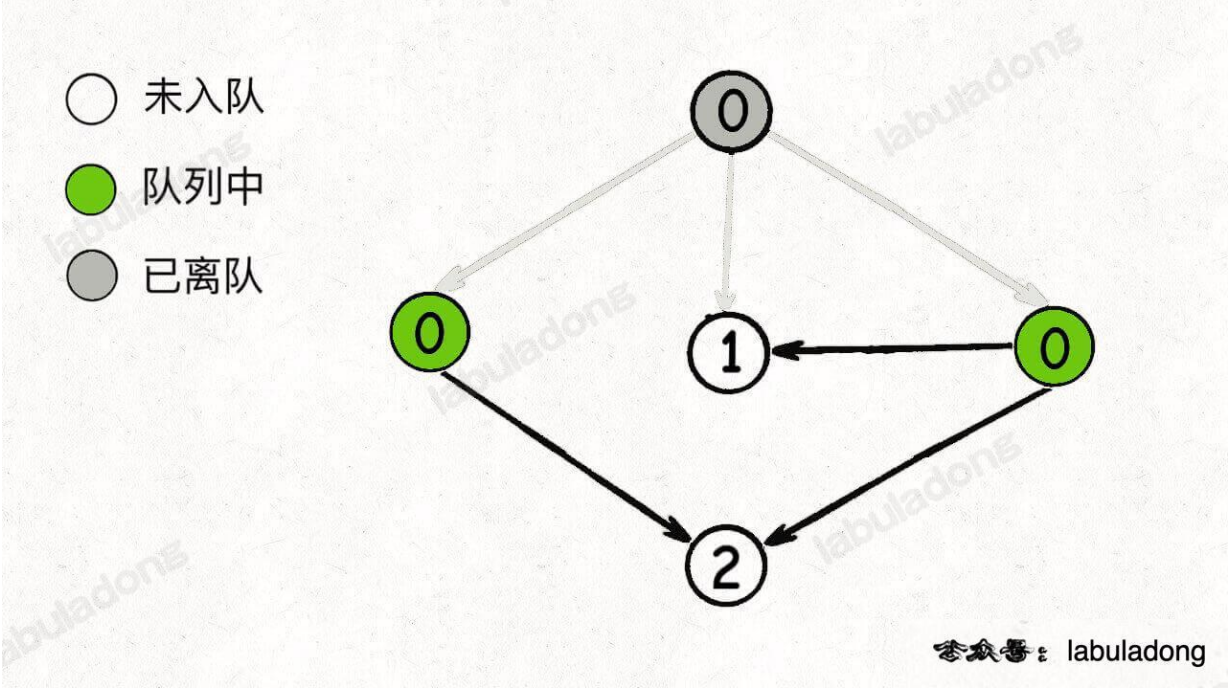
我画个图你就容易理解了，比如下面这幅图，节点中的数字代表该节点的入度：



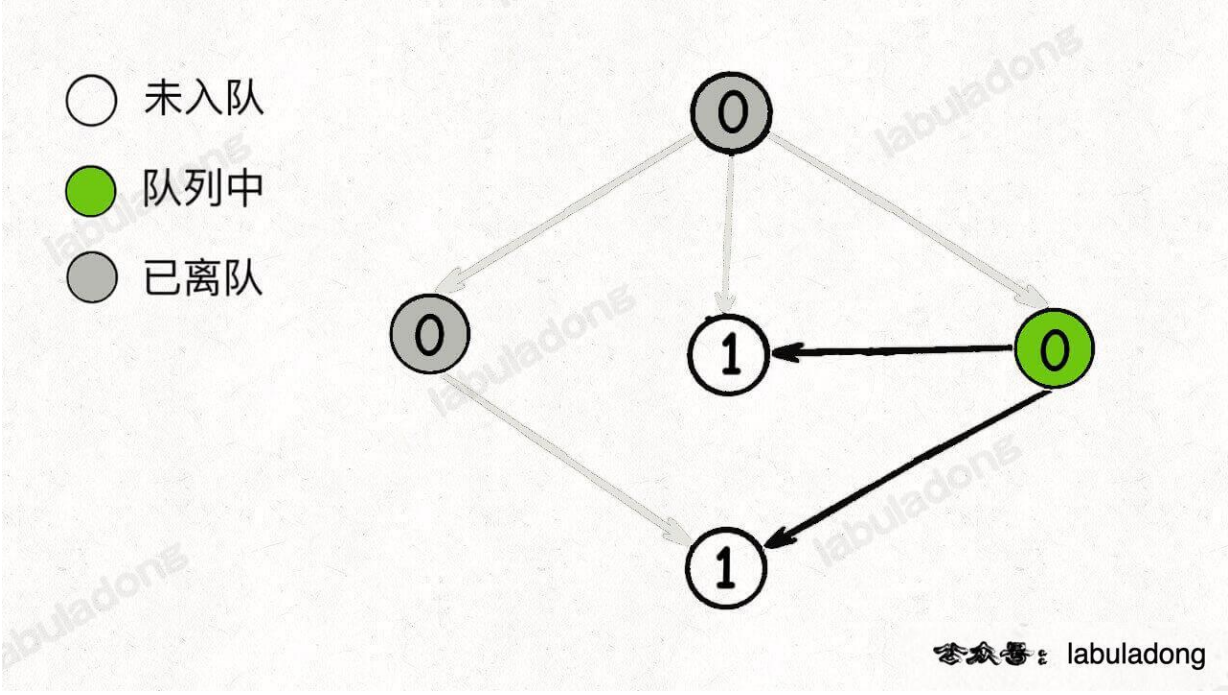
队列进行初始化后，入度为 0 的节点首先被加入队列：



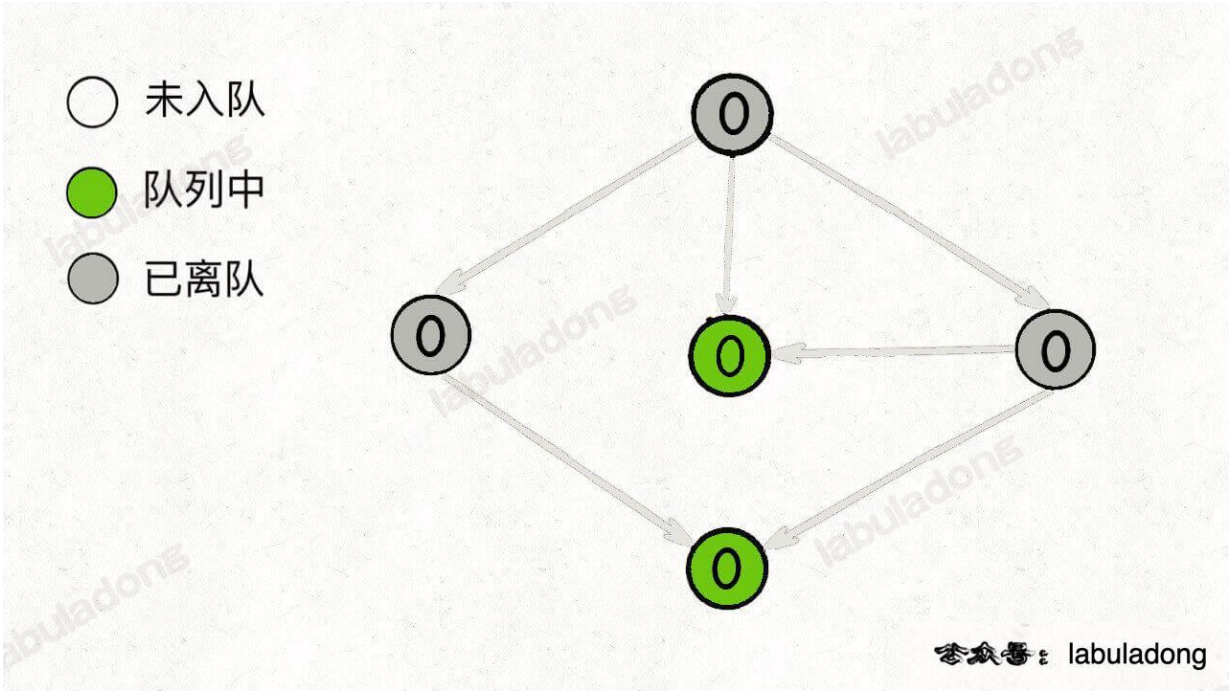
开始执行 BFS 循环，从队列中弹出一个节点，减少相邻节点的入度，同时将新产生的入度为 0 的节点加入队列：



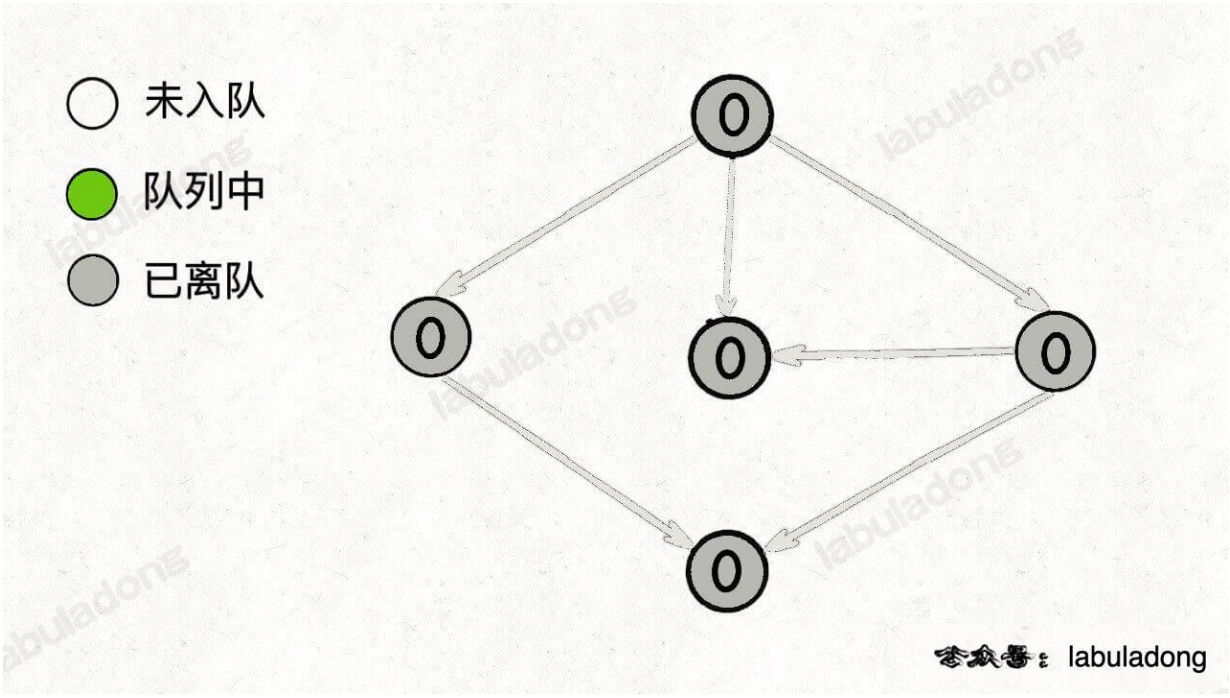
继续从队列弹出节点，并减少相邻节点的入度，这一次没有新产生的入度为 0 的节点：



继续从队列弹出节点，并减少相邻节点的入度，同时将新产生的入度为 0 的节点加入队列：



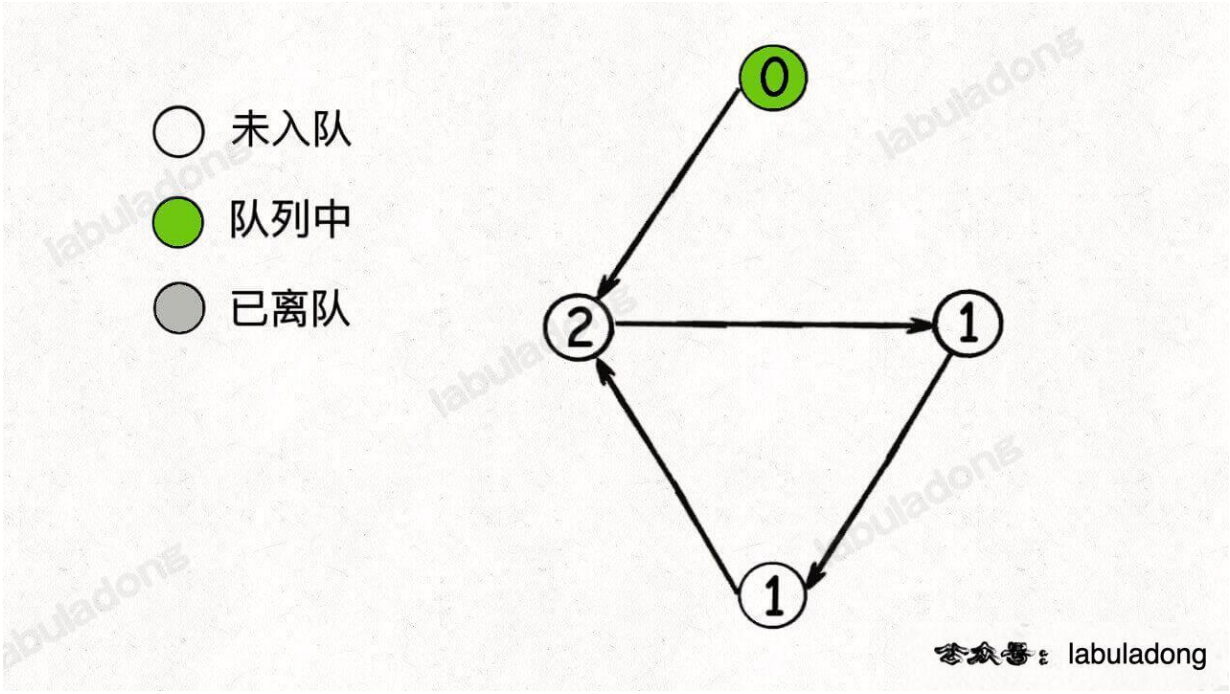
继续弹出节点，直到队列为空：



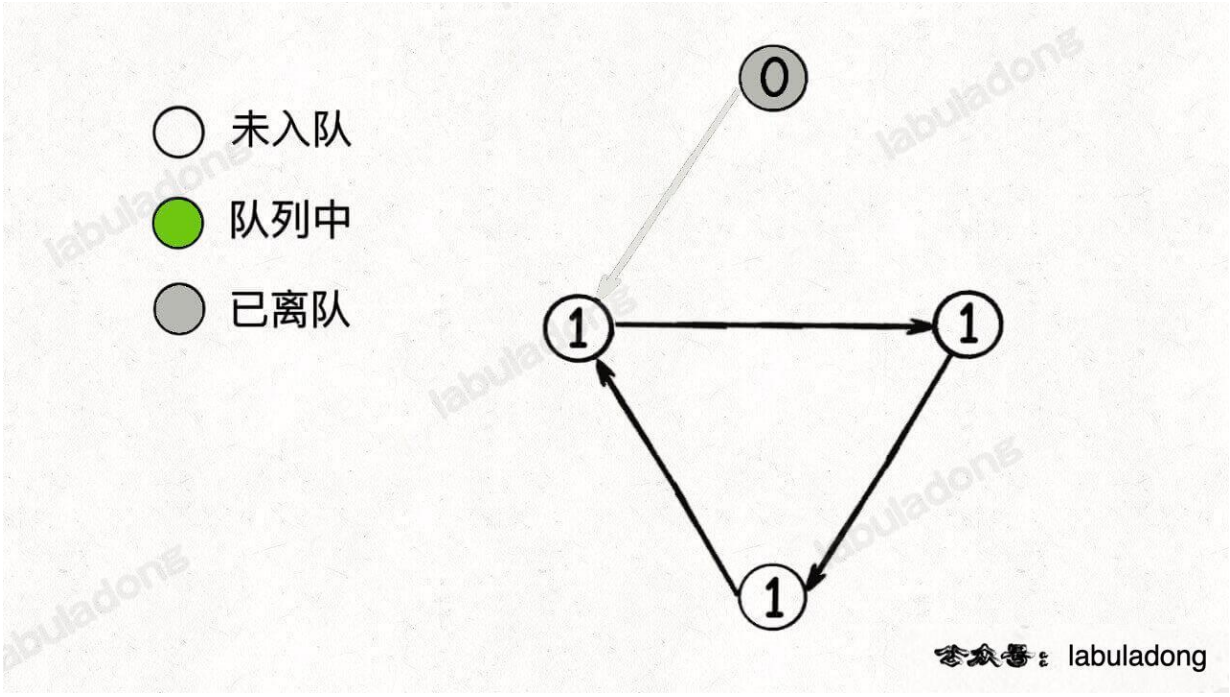
这时候，所有节点都被遍历过一遍，也就说明图中不存在环。

反过来说，如果按照上述逻辑执行 BFS 算法，存在节点没有被遍历，则说明成环。

比如下面这种情况，队列中最初只有一个入度为 0 的节点：



当弹出这个节点并减小相邻节点的入度之后队列为空，但并没有产生新的入度为 0 的节点加入队列，所以 BFS 算法终止：

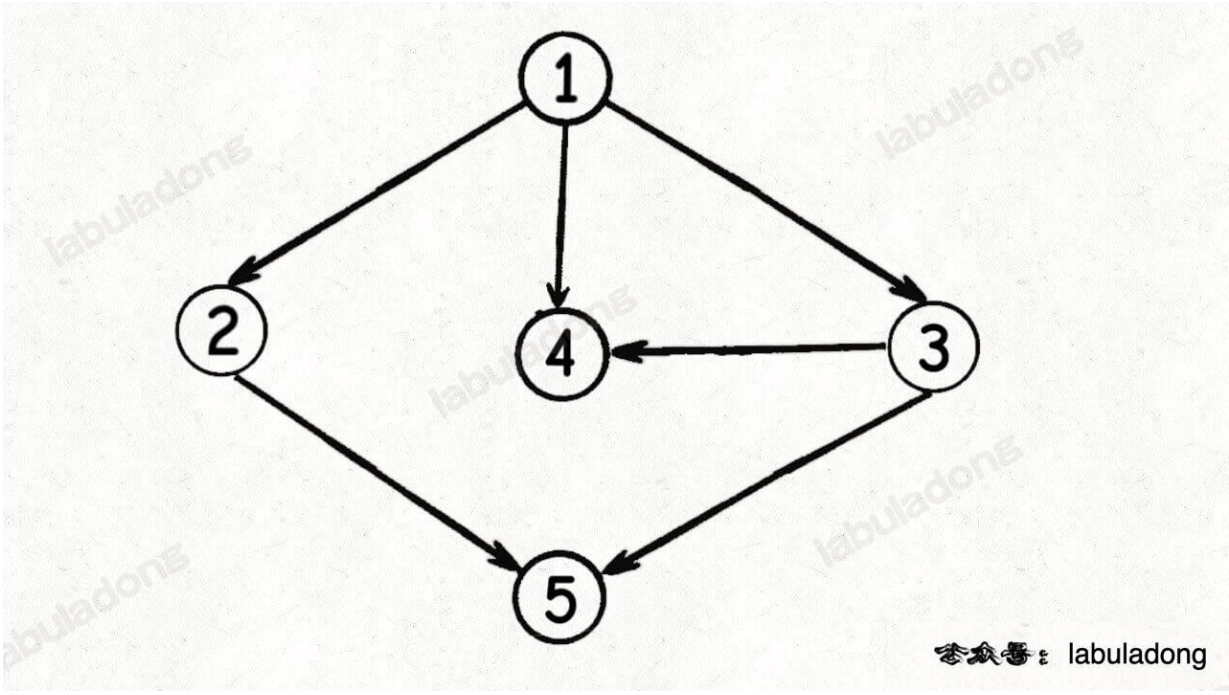


你看到了，如果存在节点没有被遍历，那么说明图中存在环，现在回头去看 BFS 的代码，你应该就很容易理解其中的逻辑了。

拓扑排序算法（BFS 版本）

如果你能看懂 BFS 版本的环检测算法，那么就很容易得到 BFS 版本的拓扑排序算法，因为节点的遍历顺序就是拓扑排序的结果。

比如刚才举的第一个例子，下图每个节点中的值即入队的顺序：



显然，这个顺序就是一个可行的拓扑排序结果。

所以，我们稍微修改一下 BFS 版本的环检测算法，记录节点的遍历顺序即可得到拓扑排序的结果：

```
// 主函数
public int[] findOrder(int numCourses, int[][] prerequisites) {
    // 建图，和环检测算法相同
    List<Integer>[] graph = buildGraph(numCourses, prerequisites);
    // 计算入度，和环检测算法相同
    int[] indegree = new int[numCourses];
    for (int[] edge : prerequisites) {
        int from = edge[1], to = edge[0];
        indegree[to]++;
    }

    // 根据入度初始化队列中的节点，和环检测算法相同
    Queue<Integer> q = new LinkedList<>();
    for (int i = 0; i < numCourses; i++) {
        if (indegree[i] == 0) {
            q.offer(i);
        }
    }

    // 记录拓扑排序结果
    int[] res = new int[numCourses];
    // 记录遍历节点的顺序（索引）
    int count = 0;
    // 开始执行 BFS 算法
    while (!q.isEmpty()) {
        int cur = q.poll();
        // 弹出节点的顺序即为拓扑排序结果
        res[count] = cur;
        count++;
```

```
            for (int next : graph[cur]) {
                indegree[next]--;
                if (indegree[next] == 0) {
                    q.offer(next);
                }
            }
        }

        if (count != numCourses) {
            // 存在环，拓扑排序不存在
            return new int[]{};
        }

        return res;
    }

    // 建图函数
    List<Integer>[] buildGraph(int n, int[][] edges) {
        // 见前文
    }
```

按道理，图的遍历 都需要 `visited` 数组防止走回头路，这里的 BFS 算法其实是通过 `indegree` 数组实现的 `visited` 数组的作用，只有入度为 0 的节点才能入队，从而保证不会出现死循环。

好了，到这里环检测算法、拓扑排序算法的 BFS 实现也讲完了，继续留一个思考题：

对于 BFS 的环检测算法，如果问你形成环的节点具体是哪些，你应该如何实现呢？

如果你有高质量的问题，可以 点击这里 进入本文的讨论区。

▶ 引用本文的题目

安装 我的 Chrome 刷题插件 点开下列题目可直接查看解题思路：

LeetCode	力扣
310. Minimum Height Trees	310. 最小高度树
-	剑指 Offer II 113. 课程顺序

▶ 引用本文的文章

- Dijkstra 算法模板及应用
- Kruskal 最小生成树算法
- Prim 最小生成树算法
- 二分图判定算法
- 图论基础及遍历算法
- 并查集（Union-Find）算法
- 我的刷题心得：算法的本质
- 用算法打败算法

更多精品课程可查看 我的网站；扫码查看更多配套学习套件：

二分图判定

Stars 123k 精品课程 查看 知乎 @labuladong B站 @labuladong

学算法认准 labuladong，致力于把算法讲清楚！网页版 点这里。

读完本文，你不仅学会了算法套路，还可以顺便解决如下题目：

LeetCode	力扣	难度
785. Is Graph Bipartite?	785. 判断二分图	🟠
886. Possible Bipartition	886. 可能的二分法	🟠
-	剑指 Offer II 106. 二分图	🟠

> tip：本文有视频版：二分图判定算法及应用。建议关注我的 B 站账号，我会用视频领读的方式带大家学习那些稍有难度的算法技巧。

我之前写了好几篇图论相关的文章：

图遍历算法

名流问题

并查集算法计算连通分量

环检测和拓扑排序

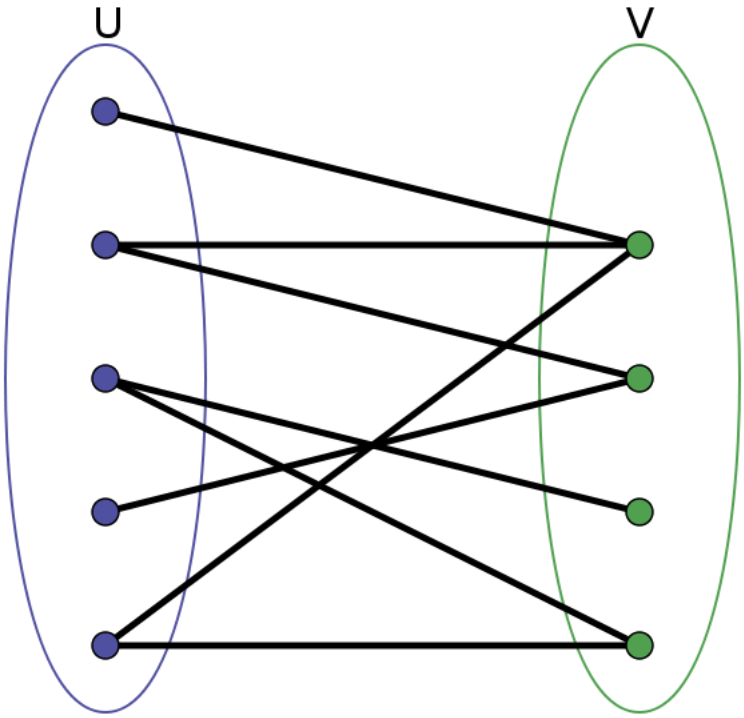
Dijkstra 最短路径算法

今天继续来讲一个经典图论算法：二分图判定。

二分图简介

在讲二分图的判定算法之前，我们先来看下百度百科对「二分图」的定义：

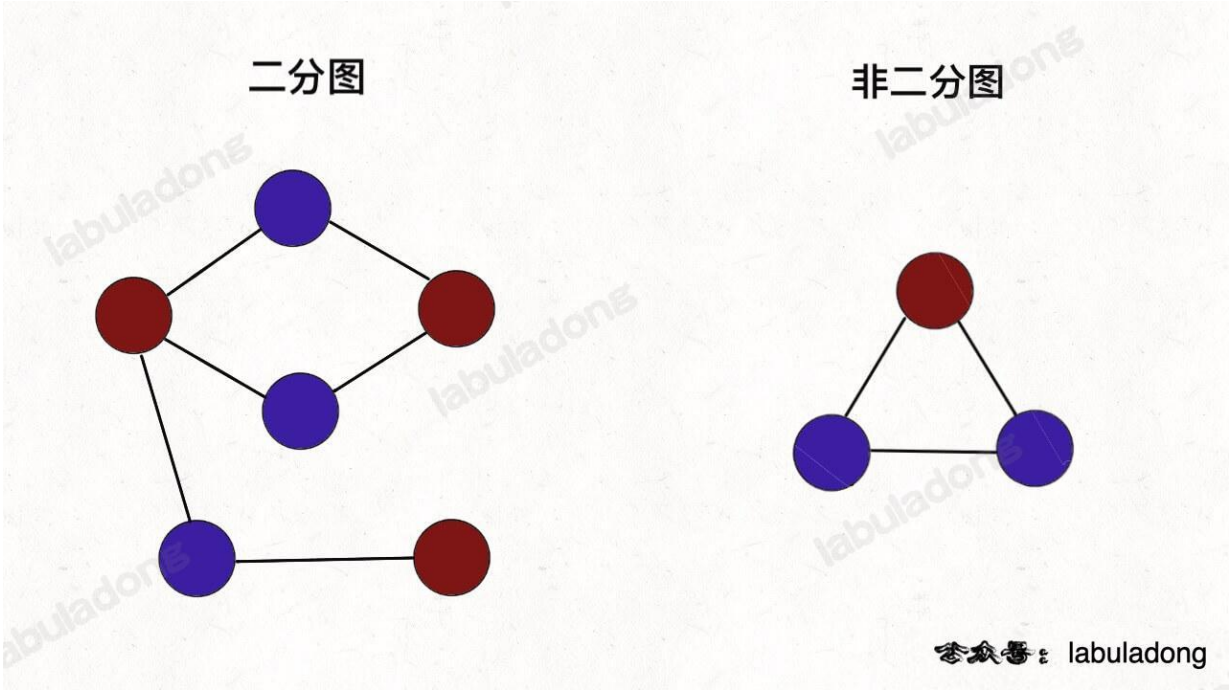
> 二分图的顶点集可分割为两个互不相交的子集，图中每条边依附的两个顶点都分属于这两个子集，且两个子集内的顶点不相邻。



其实图论里面很多术语的定义都比较拗口，不容易理解。我们甭看这个死板的定义了，来玩个游戏吧：

给你一幅「图」，请你用两种颜色将图中的所有顶点着色，且使得任意一条边的两个端点的颜色都不相同，你能做到吗？

这就是图的「双色问题」，其实这个问题就等同于二分图的判定问题，如果你能够成功地将图染色，那么这幅图就是一幅二分图，反之则不是：



在具体讲解二分图判定算法之前，我们先来说说计算机大佬们闲着无聊解决双色问题的目的是什么。

如果你有高质量的问题，可以 点击这里 进入本文的讨论区。

▶ 引用本文的题目

安装 我的 Chrome 刷题插件 点开下列题目可直接查看解题思路：

LeetCode	力扣
310. Minimum Height Trees	310. 最小高度树

▶ 引用本文的文章

- Kruskal 最小生成树算法
- Prim 最小生成树算法
- 图论基础及遍历算法
- 并查集（Union-Find）算法
- 我的刷题心得：算法的本质
- 环检测及拓扑排序算法
- 用算法打败算法

本文为网站会员内容，请 点这里 查看。

Union-Find算法详解

Stars 123k 精品课程 查看 知乎 @labuladong B站 @labuladong

学算法认准 labuladong，致力于把算法讲清楚！网页版 点这里。

读完本文，你不仅学会了算法套路，还可以顺便解决如下题目：

LeetCode	力扣	难度
130. Surrounded Regions	130. 被围绕的区域	🟠
323. Number of Connected Components in an Undirected Graph🔒	323. 无向图中连通分量的数目🔒	🟠
990. Satisfiability of Equality Equations	990. 等式方程的可满足性	🟠

记得我之前在讲 图论算法基础 时说图论相关的算法不会经常考，但最近被打脸了，因为一些读者和我反馈近期求职面试涉及很多图论相关的算法，可能是因为环境不好所以算法这块更卷了吧。

常见的图论算法我都已经写过了，这里按难度顺序列举一下：

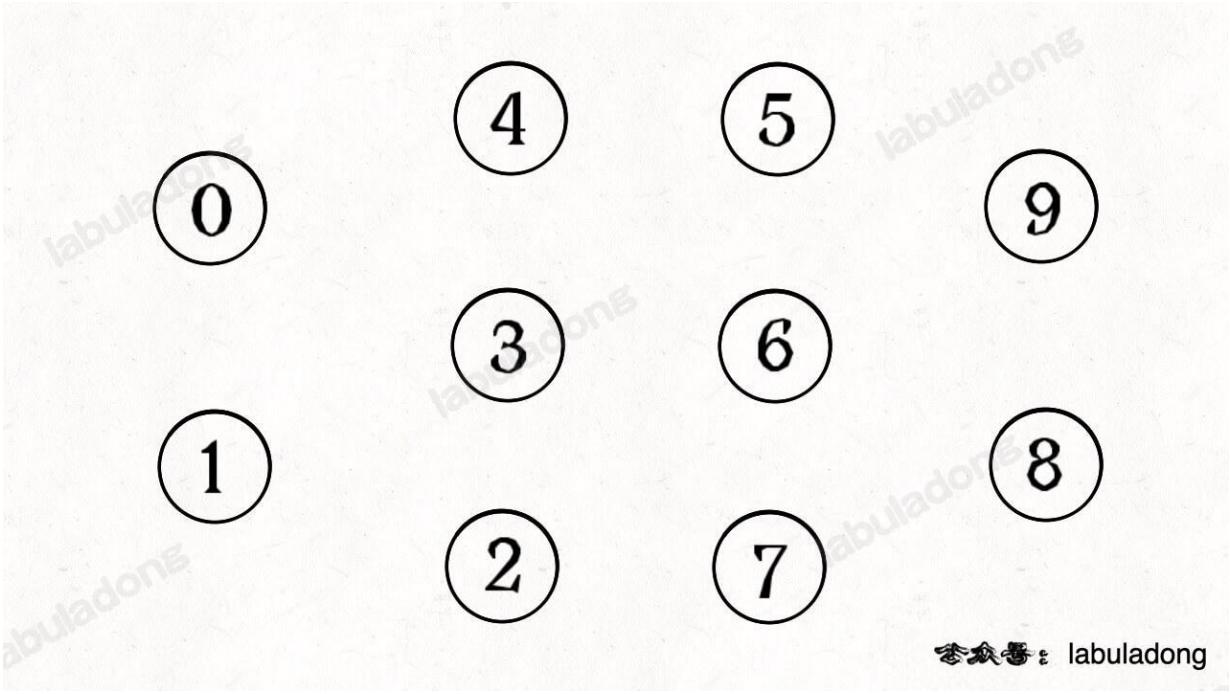
1. 图论算法基础
2. 二分图判定算法及应用
3. 环检测/拓扑排序算法及应用
4. 并查集算法及应用（本文）
5. Kruskal 最小生成树算法及应用
6. Prim 最小生成树算法及应用
7. Dijkstra 算法模板及应用

并查集（Union-Find）算法是一个专门针对「动态连通性」的算法，我之前写过两次，因为这个算法的考察频率高，而且它也是最小生成树算法的前置知识，所以我整合了本文，争取一篇文章把这个算法讲明白。

首先，从什么是图的动态连通性开始讲。

一、动态连通性

简单说，动态连通性其实可以抽象成给一幅图连线。比如下面这幅图，总共有 10 个节点，他们互不相连，分别用 0~9 标记：



现在我们的 Union-Find 算法主要需要实现这两个 API：

```
class UF {
    /* 将 p 和 q 连接 */
    public void union(int p, int q);
    /* 判断 p 和 q 是否连通 */
    public boolean connected(int p, int q);
    /* 返回图中有多少个连通分量 */
    public int count();
}
```

这里所说的「连通」是一种等价关系，也就是说具有如下三个性质：

1、自反性：节点 p 和 p 是连通的。

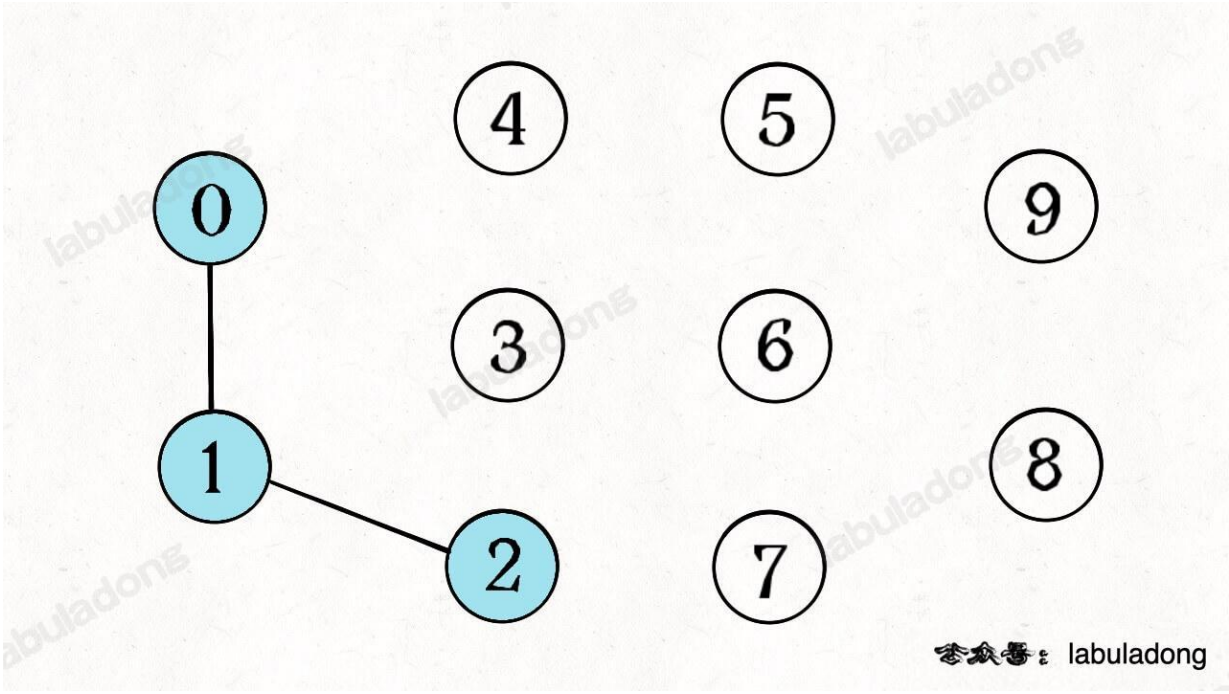
2、对称性：如果节点 p 和 q 连通，那么 q 和 p 也连通。

3、传递性：如果节点 p 和 q 连通，q 和 r 连通，那么 p 和 r 也连通。

比如说之前那幅图，0～9 任意两个**不同**的点都不连通，调用 `connected` 都会返回 false，连通分量为 10 个。

如果现在调用 `union(0, 1)`，那么 0 和 1 被连通，连通分量降为 9 个。

再调用 `union(1, 2)`，这时 0,1,2 都被连通，调用 `connected(0, 2)` 也会返回 true，连通分量变为 8 个。



判断这种「等价关系」非常实用，比如说编译器判断同一个变量的不同引用，比如社交网络中的朋友圈计算等等。

这样，你应该大概明白什么是动态连通性了，Union-Find 算法的关键就在于 `union` 和 `connected` 函数的效率。那么用什么模型来表示这幅图的连通状态呢？用什么数据结构来实现代码呢？

如果你有高质量的问题，可以 点击这里 进入本文的讨论区。

▶ 引用本文的题目

安装 我的 Chrome 刷题插件 点开下列题目可直接查看解题思路：

LeetCode	力扣
1361. Validate Binary Tree Nodes	1361. 验证二叉树
200. Number of Islands	200. 岛屿数量
261. Graph Valid Tree🔒	261. 以图判树🔒
310. Minimum Height Trees	310. 最小高度树
368. Largest Divisible Subset	368. 最大整除子集
582. Kill Process🔒	582. 杀掉进程🔒
765. Couples Holding Hands	765. 情侣牵手
947. Most Stones Removed with Same Row or Column	947. 移除最多的同行或同列石头

▶ 引用本文的文章

- Dijkstra 算法模板及应用
- Kruskal 最小生成树算法
- Prim 最小生成树算法

- 一文秒杀所有岛屿题目
- 二分图判定算法
- 我的刷题心得：算法的本质
- 用算法打败算法

———————————————

本文为网站会员内容，请 点这里 查看。

Kruskal 最小生成树算法

Stars 123k 精品课程 查看 知乎 @labuladong B站 @labuladong

学算法认准 labuladong，致力于把算法讲清楚！网页版 点这里。

读完本文，你不仅学会了算法套路，还可以顺便解决如下题目：

LeetCode	力扣	难度
1135. Connecting Cities With Minimum Cost🔒	1135. 最低成本联通所有城市🔒	🟠
1584. Min Cost to Connect All Points	1584. 连接所有点的最小费用	🟠
261. Graph Valid Tree🔒	261. 以图判树🔒	🟠

图论中知名度比较高的算法应该就是 Dijkstra 最短路径算法，环检测和拓扑排序，二分图判定算法 以及今天要讲的最小生成树（Minimum Spanning Tree）算法了。

最小生成树算法主要有 Prim 算法（普里姆算法）和 Kruskal 算法（克鲁斯卡尔算法）两种，这两种算法虽然都运用了贪心思想，但从实现上来说差异还是蛮大的。

本文先来讲比较简单易懂的 Kruskal 算法，然后在下一篇文章 Prim 算法模板 中聊 Prim 算法。

Kruskal 算法其实很容易理解和记忆，其关键是要熟悉并查集算法，如果不熟悉，建议先看下前文 Union-Find 并查集算法。

接下来，我们从最小生成树的定义说起。

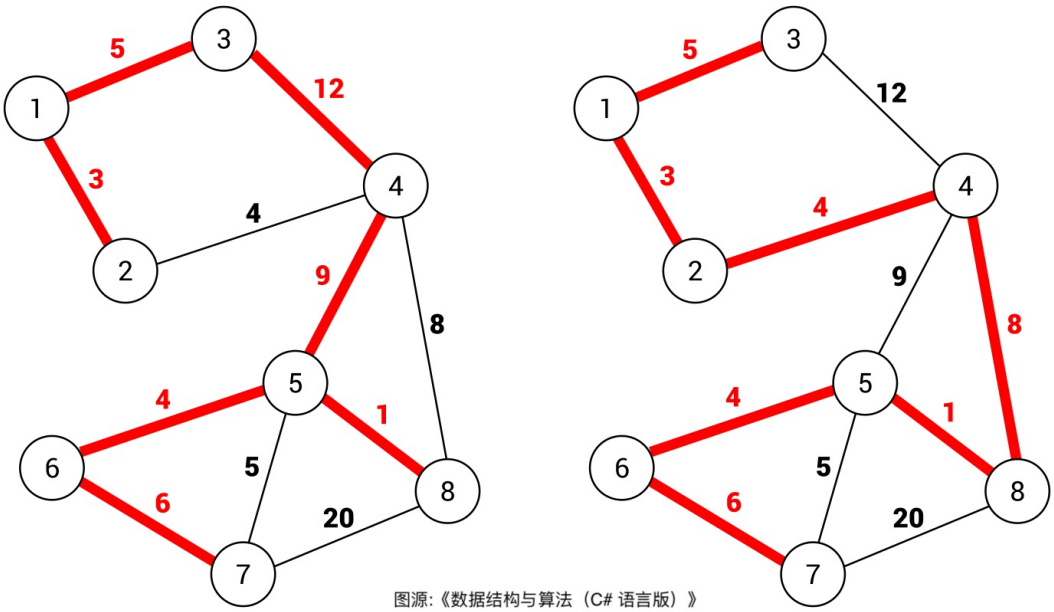
什么是最小生成树

先说「树」和「图」的根本区别：树不会包含环，图可以包含环。

如果一幅图没有环，完全可以拉伸成一棵树的模样。说的专业一点，树就是「无环连通图」。

那么什么是图的「生成树」呢，其实按字面意思也好理解，就是在图中找一棵包含图中的所有节点的树。专业点说，生成树是含有图中所有顶点的「无环连通子图」。

容易想到，一幅图可以有很多不同的生成树，比如下面这幅图，红色的边就组成了两棵不同的生成树：



图源:《数据结构与算法（C# 语言版）》

对于加权图，每条边都有权重，所以每棵生成树都有一个权重和。比如上图，右侧生成树的权重和显然比左侧生成树的权重和要小。

那么最小生成树很好理解了，所有可能的生成树中，权重和最小的那棵生成树就叫「最小生成树」。

> 一般来说，我们都是在**无向加权图**中计算最小生成树的，所以使用最小生成树算法的现实场景中，图的边权重一般代表成本、距离这样的标量。

在讲 Kruskal 算法之前，需要回顾一下 Union-Find 并查集算法。

如果你有高质量的问题，可以 点击这里 进入本文的讨论区。

▶ **引用本文的题目**

安装 我的 Chrome 刷题插件 点开下列题目可直接查看解题思路：

LeetCode	力扣
310. Minimum Height Trees	310. 最小高度树

▶ **引用本文的文章**

- Prim 最小生成树算法
- 图论基础及遍历算法
- 并查集（Union-Find）算法

———————————————

本文为网站会员内容，请 点这里 查看。

Prim 最小生成树算法

Stars 123k 精品课程 查看 知乎 @labuladong B站 @labuladong

学算法认准 labuladong，致力于把算法讲清楚！网页版 点这里。

读完本文，你不仅学会了算法套路，还可以顺便解决如下题目：

LeetCode	力扣	难度
1135. Connecting Cities With Minimum Cost🔒	1135. 最低成本联通所有城市🔒	🟠
1584. Min Cost to Connect All Points	1584. 连接所有点的最小费用	🟠

本文是第 7 篇图论算法文章，先列举一下我之前写过的图论算法：

1、图论算法基础

2、二分图判定算法

3、环检测和拓扑排序算法

4、Dijkstra 最短路径算法

5、Union Find 并查集算法

6、Kruskal 最小生成树算法

像图论算法这种高级算法虽然不算难，但是阅读量普遍比较低，我本来是不想写 Prim 算法的，但考虑到算法知识结构的完整性，我还是想把 Prim 算法的坑填上，这样所有经典的图论算法就基本完善了。

Prim 算法和 Kruskal 算法都是经典的最小生成树算法，阅读本文之前，希望你读过前文 Kruskal 最小生成树算法，了解最小生成树的基本定义以及 Kruskal 算法的基本原理，这样就能很容易理解 Prim 算法逻辑了。

对比 Kruskal 算法

图论的最小生成树问题，就是让你从图中找若干边形成一个边的集合 `mst`，这些边有以下特性：

1、这些边组成的是一棵树（树和图的区别在于不能包含环）。

2、这些边形成的树要包含所有节点。

3、这些边的权重之和要尽可能小。

那么 Kruskal 算法是使用什么逻辑满足上述条件，计算最小生成树的呢？

首先，Kruskal 算法用到了贪心思想，来满足权重之和尽可能小的问题：

先对所有边按照权重从小到大排序，从权重最小的边开始，选择合适的边加入 `mst` 集合，这样挑出来的边组成的树就是权重和最小的。

其次，Kruskal 算法用到了 Union-Find 并查集算法，来保证挑选出来的这些边组成的一定是一棵「树」，而不会包含环或者形成一片「森林」：

如果一条边的两个节点已经是连通的，则这条边会使树中出现环；如果最后的连通分量总数大于 1，则说明形成的是「森林」而不是一棵「树」。

那么，本文的主角 Prim 算法是使用什么逻辑来计算最小生成树的呢？

首先，Prim 算法也使用贪心思想来让生成树的权重尽可能小，也就是「切分定理」，这个后文会详细解释。

其次，Prim 算法使用 BFS 算法思想 和 `visited` 布尔数组避免成环，来保证选出来的边最终形成的一定是一棵树。

Prim 算法不需要事先对所有边排序，而是利用优先级队列动态实现排序的效果，所以我觉得 Prim 算法类似于 Kruskal 的动态过程。

下面介绍一下 Prim 算法的核心原理：切分定理。

如果你有高质量的问题，可以 点击这里 进入本文的讨论区。

▶ **引用本文的文章**

- Kruskal 最小生成树算法
- 并查集（Union-Find）算法
- 环检测及拓扑排序算法

————————————————

本文为网站会员内容，请 点这里 查看。

我写了个模板，把 Dijkstra 算法变成了默写题

Stars 123k 精品课程 查看 知乎 @labuladong B站 @labuladong

学算法认准 labuladong，致力于把算法讲清楚！网页版 点这里。

读完本文，你不仅学会了算法套路，还可以顺便解决如下题目：

LeetCode	力扣	难度
1514. Path with Maximum Probability	1514. 概率最大的路径	🟠
1631. Path With Minimum Effort	1631. 最小体力消耗路径	🟠
743. Network Delay Time	743. 网络延迟时间	🟠

其实，很多算法的底层原理异常简单，无非就是一步一步延伸，变得**看起来**好像特别复杂，特别牛逼。

但如果你看过历史文章，应该可以对算法形成自己的理解，就会发现很多算法都是换汤不换药，毫无新意，非常枯燥。

比如，东哥手把手带你刷二叉树（总纲） 中说二叉树非常重要，你把这个结构掌握了，就会发现 动态规划，分治算法，回溯（DFS）算法，BFS 算法框架，Union-Find 并查集算法，二叉堆实现优先级队列 就是把二叉树翻来覆去的运用。

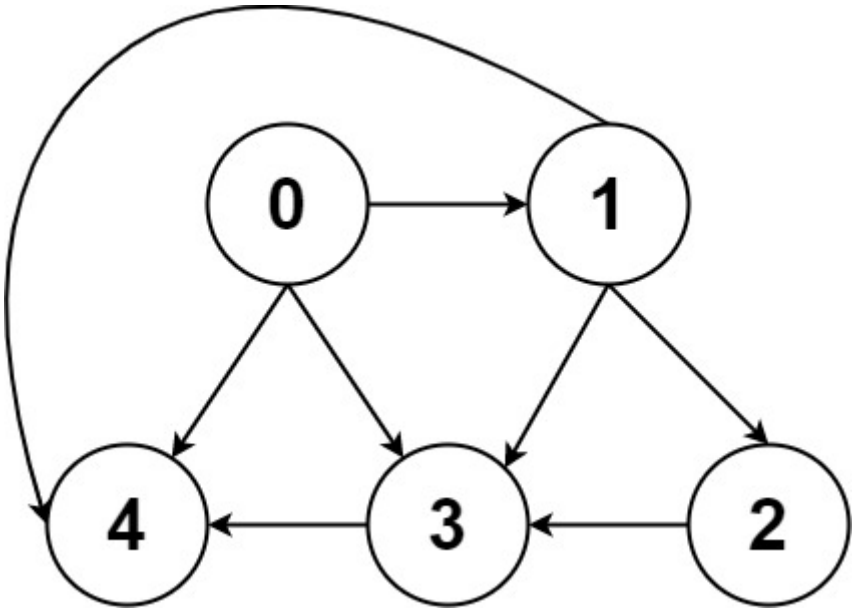
那么本文又要告诉你，Dijkstra 算法（一般音译成迪杰斯特拉算法）无非就是一个 BFS 算法的加强版，它们都是从二叉树的层序遍历衍生出来的。

这也是为什么我在 学习数据结构和算法的框架思维 中这么强调二叉树的原因。

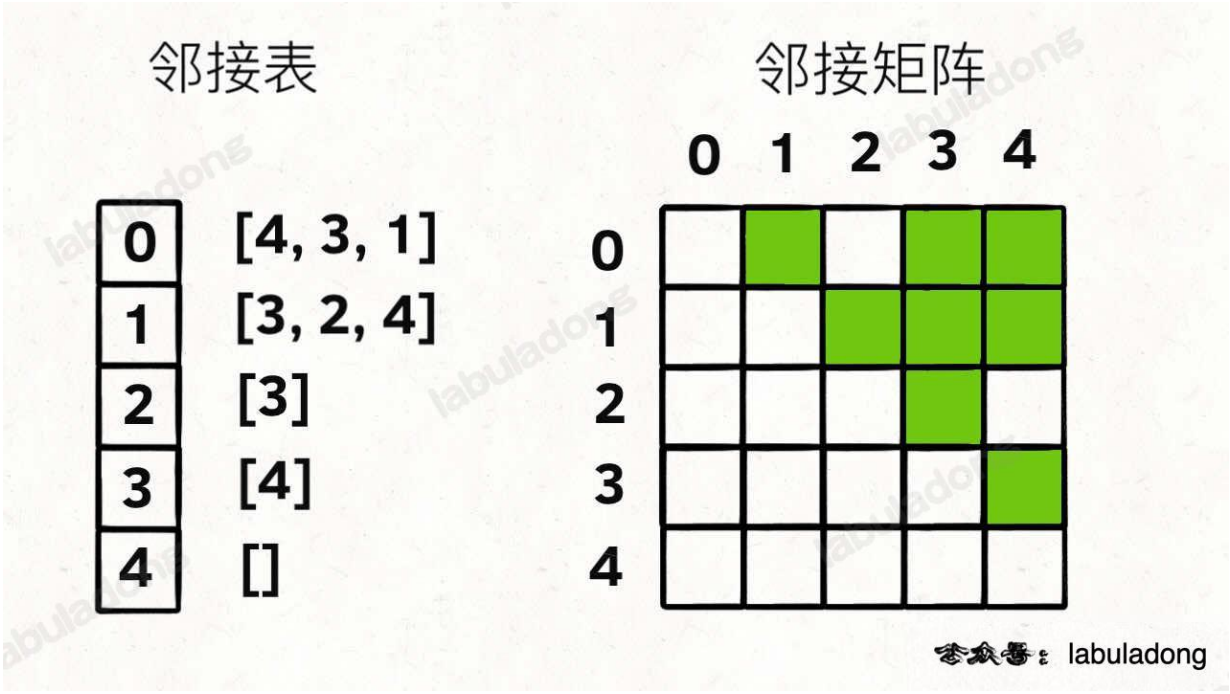
下面我们由浅入深，从二叉树的层序遍历聊到 Dijkstra 算法，给出 Dijkstra 算法的代码框架，顺手秒杀几道运用 Dijkstra 算法的题目。

图的抽象

前文 图论第一期：遍历基础 说过「图」这种数据结构的基本实现，图中的节点一般就抽象成一个数字（索引），图的具体实现一般是「邻接矩阵」或者「邻接表」。



比如上图这幅图用邻接表和邻接矩阵的存储方式如下：



前文 图论第二期：拓扑排序 告诉你，我们用邻接表的场景更多，结合上图，一幅图可以用如下 Java 代码表示：

```
// graph[s] 存储节点 s 指向的节点（出度）
List<Integer>[] graph;
```

如果你想把一个问题抽象成「图」的问题，那么首先要实现一个 API `adj`：

```
// 输入节点 s 返回 s 的相邻节点
List<Integer> adj(int s);
```

类似多叉树节点中的 children 字段记录当前节点的所有子节点，adj(s) 就是计算一个节点 s 的相邻节点。

比如上面说的用邻接表表示「图」的方式，adj 函数就可以这样表示：

```
List<Integer>[] graph;

// 输入节点 s，返回 s 的相邻节点
List<Integer> adj(int s) {
    return graph[s];
}
```

当然，对于「加权图」，我们需要知道两个节点之间的边权重是多少，所以还可以抽象出一个 weight 方法：

```
// 返回节点 from 到节点 to 之间的边的权重
int weight(int from, int to);
```

这个 weight 方法可以根据实际情况而定，因为不同的算法题，题目给的「权重」含义可能不一样，我们存储权重的方式也不一样。

有了上述基础知识，就可以搞定 Dijkstra 算法了，下面我给你从二叉树的层序遍历开始推演出 Dijkstra 算法的实现。

二叉树层级遍历和 BFS 算法

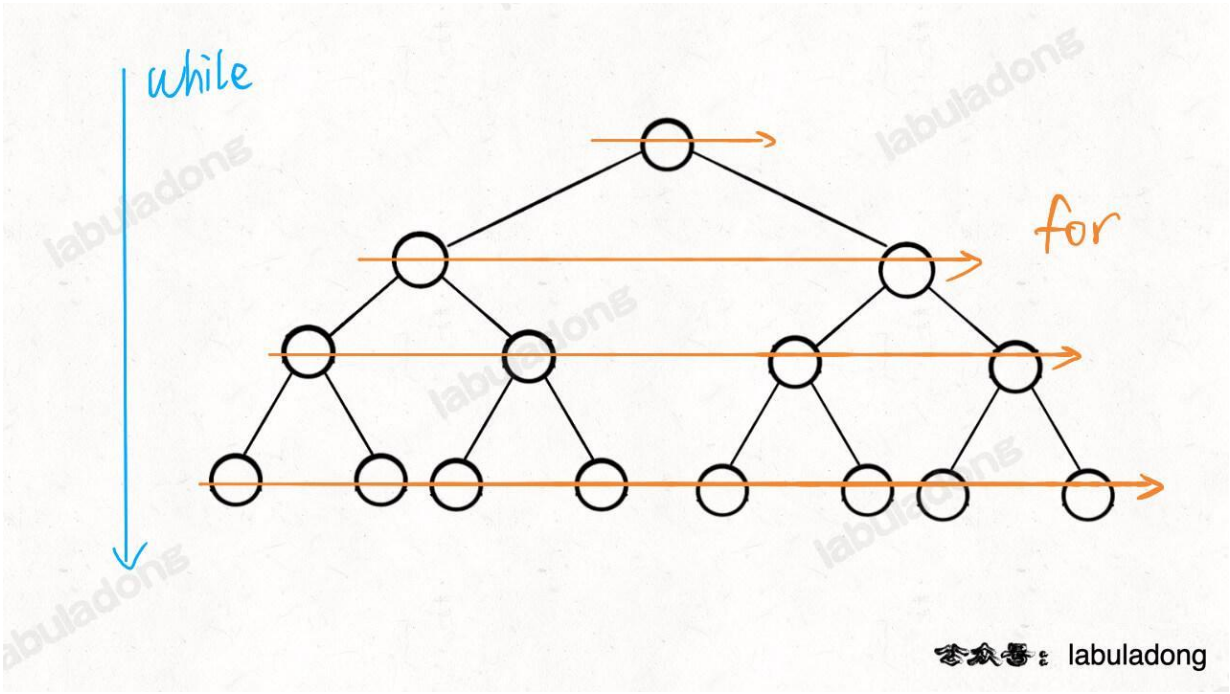
我们之前说过二叉树的层级遍历框架：

```
// 输入一棵二叉树的根节点，层序遍历这棵二叉树
void levelTraverse(TreeNode root) {
    if (root == null) return 0;
    Queue<TreeNode> q = new LinkedList<>();
    q.offer(root);

    int depth = 1;
    // 从上到下遍历二叉树的每一层
    while (!q.isEmpty()) {
        int sz = q.size();
        // 从左到右遍历每一层的每个节点
        for (int i = 0; i < sz; i++) {
            TreeNode cur = q.poll();
            printf("节点 %s 在第 %s 层", cur, depth);

            // 将下一层节点放入队列
            if (cur.left != null) {
                q.offer(cur.left);
            }
            if (cur.right != null) {
```

```
                q.offer(cur.right);
            }
        }
        depth++;
    }
}
```

我们先来思考一个问题，注意二叉树的层级遍历 while 循环里面还套了个 for 循环，为什么要这样？

while 循环和 for 循环的配合正是这个遍历框架设计的巧妙之处：



while 循环控制一层一层往下走，for 循环利用 sz 变量控制从左到右遍历每一层二叉树节点。

注意我们代码框架中的 depth 变量，其实就记录了当前遍历到的层数。换句话说，每当我们遍历到一个节点 cur，都知道这个节点属于第几层。

算法题经常会问二叉树的最大深度呀，最小深度呀，层序遍历结果呀，等等问题，所以记录下来这个深度 depth 是有必要的。

基于二叉树的遍历框架，我们又可以扩展出多叉树的层序遍历框架：

```
// 输入一棵多叉树的根节点，层序遍历这棵多叉树
void levelTraverse(TreeNode root) {
    if (root == null) return;
    Queue<TreeNode> q = new LinkedList<>();
    q.offer(root);

    int depth = 1;
    // 从上到下遍历多叉树的每一层
    while (!q.isEmpty()) {
        int sz = q.size();
        // 从左到右遍历每一层的每个节点
        for (int i = 0; i < sz; i++) {
```

```
            TreeNode cur = q.poll();
            printf("节点 %s 在第 %s 层", cur, depth);

            // 将下一层节点放入队列
            for (TreeNode child : cur.children) {
                q.offer(child);
            }
        }
        depth++;
    }
}
```

基于多叉树的遍历框架，我们又可以扩展出 BFS（广度优先搜索）的算法框架：

```
// 输入起点，进行 BFS 搜索
int BFS(Node start) {
    Queue<Node> q; // 核心数据结构
    Set<Node> visited; // 避免走回头路

    q.offer(start); // 将起点加入队列
    visited.add(start);

    int step = 0; // 记录搜索的步数
    while (q not empty) {
        int sz = q.size();
        /* 将当前队列中的所有节点向四周扩散一步 */
        for (int i = 0; i < sz; i++) {
            Node cur = q.poll();
            printf("从 %s 到 %s 的最短距离是 %s", start, cur, step);

            /* 将 cur 的相邻节点加入队列 */
            for (Node x : cur.adj()) {
                if (x not in visited) {
                    q.offer(x);
                    visited.add(x);
                }
            }
        }
        step++;
    }
}
```

如果对 BFS 算法不熟悉，可以看后文 BFS 算法框架，这里只是为了让你做个对比，所谓 BFS 算法，就是把算法问题抽象成一幅「无权图」，然后继续玩二叉树层级遍历那一套罢了。

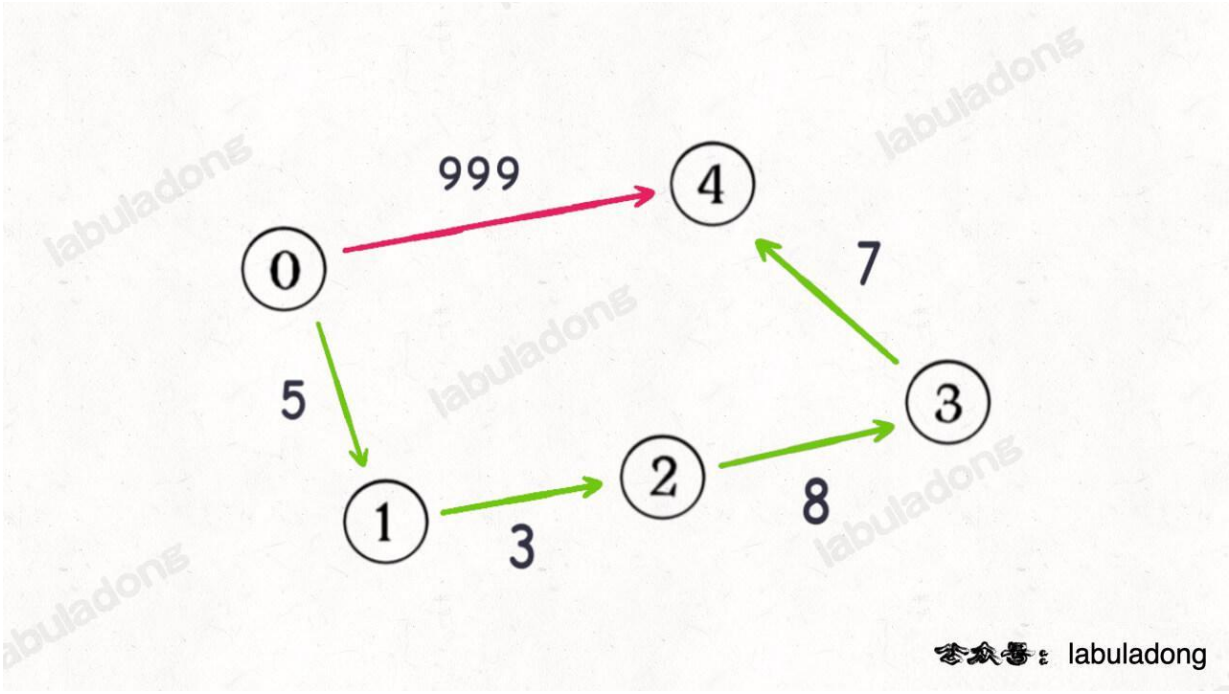
注意，我们的 BFS 算法框架也是 `while` 循环嵌套 `for` 循环的形式，也用了一个 `step` 变量记录 `for` 循环执行的次数，无非就是多用了一个 `visited` 集合记录走过的节点，防止走回头路罢了。

为什么这样呢？

所谓「无权图」，与其说每条「边」没有权重，不如说每条「边」的权重都是 1，从起点 `start` 到任意一个节点之间的路径权重就是它们之间「边」的条数，那可不就是 `step` 变量记录的值么？

再加上 BFS 算法利用 `for` 循环一层一层向外扩散的逻辑和 `visited` 集合防止走回头路的逻辑，当你每次从队列中拿出节点 `cur` 的时候，从 `start` 到 `cur` 的最短权重就是 `step` 记录的步数。

但是，到了「加权图」的场景，事情就没有这么简单了，因为你不能默认每条边的「权重」都是 1 了，这个权重可以是任意正数（Dijkstra 算法要求不能存在负权重边），比如下图的例子：



如果沿用 BFS 算法中的 `step` 变量记录「步数」，显然红色路径一步就可以走到终点，但是这一步的权重很大；正确的最小权重路径应该是绿色的路径，虽然需要走很多步，但是路径权重依然很小。

其实 Dijkstra 和 BFS 算法差不多，不过在讲解 Dijkstra 算法框架之前，我们首先需要对之前的框架进行如下改造：

想办法去掉 `while` 循环里面的 `for` 循环。

为什么？有了刚才的铺垫，这个不难理解，刚才说 `for` 循环是干什么用的来着？

是为了让二叉树一层一层往下遍历，让 BFS 算法一步一步向外扩散，因为这个层数 `depth`，或者这个步数 `step`，在之前的场景中有用。

但现在我们想解决「加权图」中的最短路径问题，「步数」已经没有参考意义了，「路径的权重之和」才有意义，所以这个 `for` 循环可以被去掉。

怎么去掉？就拿二叉树的层级遍历来说，其实你可以直接去掉 `for` 循环相关的代码：

```
// 输入一棵二叉树的根节点，遍历这棵二叉树所有节点
void levelTraverse(TreeNode root) {
    if (root == null) return 0;
    Queue<TreeNode> q = new LinkedList<>();
    q.offer(root);
```

```
    // 遍历二叉树的每一个节点
    while (!q.isEmpty()) {
        TreeNode cur = q.poll();
        printf("我不知道节点 %s 在第几层", cur);

        // 将子节点放入队列
        if (cur.left != null) {
            q.offer(cur.left);
        }
        if (cur.right != null) {
            q.offer(cur.right);
        }
    }
}
```

但问题是，没有 `for` 循环，你也没办法维护 `depth` 变量了。

如果你想同时维护 `depth` 变量，让每个节点 `cur` 知道自己在第几层，可以想其他办法，比如新建一个 `State` 类，记录每个节点所在的层数：

```
class State {
    // 记录 node 节点的深度
    int depth;
    TreeNode node;

    State(TreeNode node, int depth) {
        this.depth = depth;
        this.node = node;
    }
}

// 输入一棵二叉树的根节点，遍历这棵二叉树所有节点
void levelTraverse(TreeNode root) {
    if (root == null) return 0;
    Queue<State> q = new LinkedList<>();
    q.offer(new State(root, 1));

    // 遍历二叉树的每一个节点
    while (!q.isEmpty()) {
        State cur = q.poll();
        TreeNode cur_node = cur.node;
        int cur_depth = cur.depth;
        printf("节点 %s 在第 %s 层", cur_node, cur_depth);

        // 将子节点放入队列
        if (cur_node.left != null) {
            q.offer(new State(cur_node.left, cur_depth + 1));
        }
        if (cur_node.right != null) {
            q.offer(new State(cur_node.right, cur_depth + 1));
        }
```

```
        }
    }
```

这样，我们就可以不使用 `for` 循环也确切地知道每个二叉树节点的深度了。

如果你能够理解上面这段代码，我们就可以来看 Dijkstra 算法的代码框架了。

如果你有高质量的问题，可以 点击这里 进入本文的讨论区。

▶ 引用本文的题目

安装 我的 Chrome 刷题插件 点开下列题目可直接查看解题思路：

LeetCode	力扣
286. Walls and Gates🔒	286. 墙与门🔒
310. Minimum Height Trees	310. 最小高度树
542. 01 Matrix	542. 01 矩阵

▶ 引用本文的文章

- BFS 算法解题套路框架
- Kruskal 最小生成树算法
- Prim 最小生成树算法
- 东哥带你刷二叉树（纲领篇）
- 二分图判定算法
- 图论基础及遍历算法
- 并查集（Union-Find）算法
- 我的刷题心得：算法的本质
- 旅游省钱大法：加权最短路径
- 环检测及拓扑排序算法

————————————————

本文为网站会员内容，请 点这里 查看。

霸剑篇、暴力搜索算法

计算机除了穷举之外啥也不会，所谓算法就是考察你会不会穷举，能不能聪明地穷举。

宽泛地讲，for 循坏遍历一遍数组，这也叫穷举，但本章说的暴力穷举主要包括深度优先（DFS）算法和广度优先（BFS）算法。

其中，DFS 算法和回溯算法可以说是师出同门，大同小异，图论算法基础 探讨过这个问题，区别仅仅在于根节点是否被遍历到而已。

且 BFS 算法常见于求最值的场景，因为 BFS 的算法逻辑保证了算法第一次到达目标时的代价是最小的。

公众号标签：暴力搜索算法

3.1 DFS 算法/回溯算法

回溯算法的效率一般不高，但却是最好用的算法。

因为回溯算法就是典型的暴力穷举算法嘛，简单粗暴，如果你笔试的时候不会做一道题，那就尝试用回溯算法硬上，超时没关系，多少能捞点分回来。

回溯算法框架如下：

```
result = []
def backtrack(路径, 选择列表):
    if 满足结束条件:
        result.add(路径)
        return

    for 选择 in 选择列表:
        做选择
        backtrack(路径, 选择列表)
        撤销选择
```


名称	最新版本号	详情
PDF 教材	V5.2	下载
刷题打卡挑战	开放报名	报名
网站会员	V已上线	购买
Chrome 刷题插件	V4.4.3	使用手册
vscode 刷题插件	V1.5.4	使用手册
JetBrains IDE 刷题插件	V1.8.6	使用手册

回溯算法解题套路框架

Stars 123k 精品课程 查看 知乎 @labuladong B站 @labuladong

学算法认准 labuladong，致力于把算法讲清楚！网页版 点这里。

读完本文，你不仅学会了算法套路，还可以顺便解决如下题目：

LeetCode	力扣	难度
46. Permutations	46. 全排列	🟠
51. N-Queens	51. N 皇后	🔴
52. N-Queens II	52. N皇后 II	🔴
-	剑指 Offer II 083. 没有重复元素集合的全排列	🟠

> tip：本文有视频版：回溯算法框架套路详解。建议关注我的 B 站账号，我会用视频领读的方式带大家学习那些稍有难度的算法技巧。

这篇文章是很久之前的一篇 回溯算法详解 的进阶版，之前那篇不够清楚，就不必看了，看这篇就行。把框架给你讲清楚，你会发现回溯算法问题都是一个套路。

本文解决几个问题：

回溯算法是什么？解决回溯算法相关的问题有什么技巧？如何学习回溯算法？回溯算法代码是否有规律可循？

其实回溯算法和我们常说的 DFS 算法非常类似，本质上就是一种暴力穷举算法。回溯算法和 DFS 算法的细微差别是：回溯算法是在遍历「树枝」，DFS 算法是在遍历「节点」，本文就是简单提一下，你有个印象就行了。等你看了 手把手刷二叉树（纲领篇） 和 图论算法基础 之后就能深刻理解这句话的含义了。

抽象地说，解决一个回溯问题，实际上就是遍历一棵决策树的过程，树的每个叶子节点存放着一个合法答案。你把整棵树遍历一遍，把叶子节点上的答案都收集起来，就能得到所有的合法答案。

站在回溯树的一个节点上，你只需要思考 3 个问题：

1、路径：也就是已经做出的选择。

2、选择列表：也就是你当前可以做的选择。

3、结束条件：也就是到达决策树底层，无法再做选择的条件。

如果你不理解这三个词语的解释，没关系，我们后面会用「全排列」和「N 皇后问题」这两个经典的回溯算法问题来帮你理解这些词语是什么意思，现在你先留着印象。

代码方面，回溯算法的框架：

```
result = []
def backtrack(路径, 选择列表):
    if 满足结束条件:
        result.add(路径)
        return

    for 选择 in 选择列表:
        做选择
        backtrack(路径, 选择列表)
        撤销选择
```

其核心就是 for 循环里面的递归，在递归调用之前「做选择」，在递归调用之后「撤销选择」，特别简单。

什么叫做选择和撤销选择呢，这个框架的底层原理是什么呢？下面我们就通过「全排列」这个问题来解开之前的疑惑，详细探究一下其中的奥妙！

一、全排列问题

力扣第 46 题「全排列」就是给你输入一个数组 `nums`，让你返回这些数字的全排列。

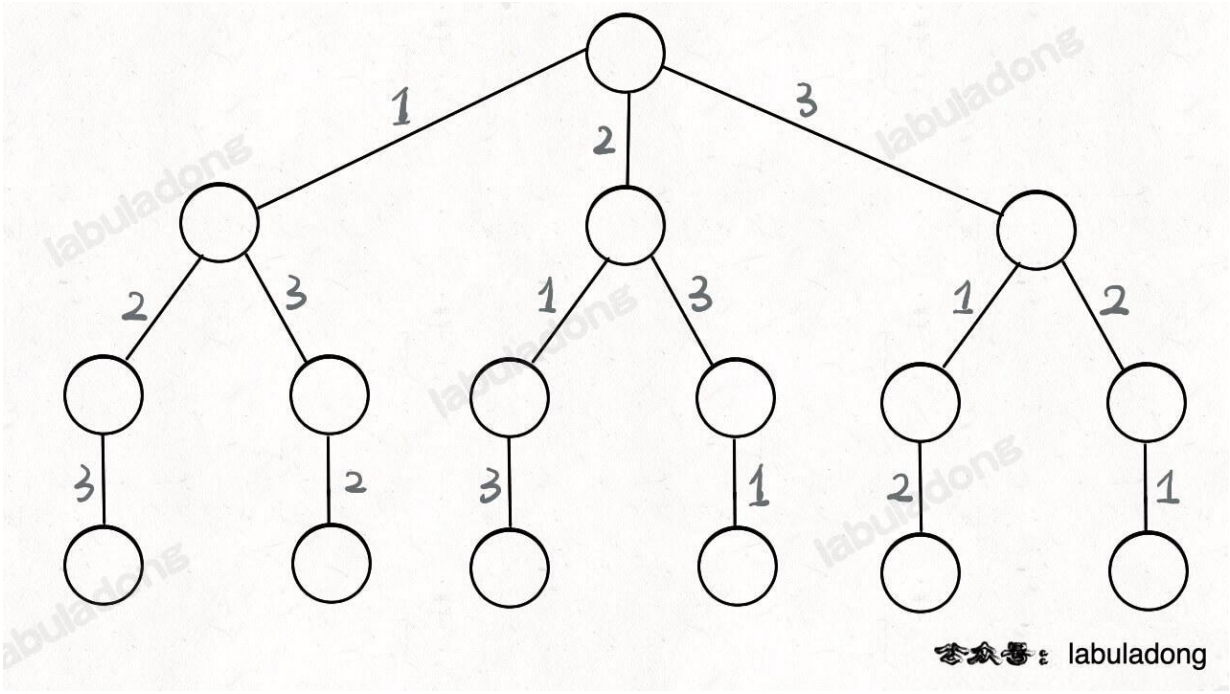
> **我们这次讨论的全排列问题不包含重复的数字，包含重复数字的扩展场景我在后文 回溯算法秒杀排列组合子集的九种题型 中讲解。**
>
> 另外，有些读者之前看过的全排列算法代码可能是那种 `swap` 交换元素的写法，和我在本文介绍的代码不同。这是回溯算法两种穷举思路，我会在后文 球盒模型：回溯算法穷举的两种视角 讲明白。现在还不适合直接跟你讲那个解法，你照着我的思路学习即可。

我们在高中的时候就做过排列组合的数学题，我们也知道 `n` 个不重复的数，全排列共有 `n!` 个。那么我们当时是怎么穷举全排列的呢？

比方说给三个数 `[1,2,3]`，你肯定不会无规律地乱穷举，一般是这样：

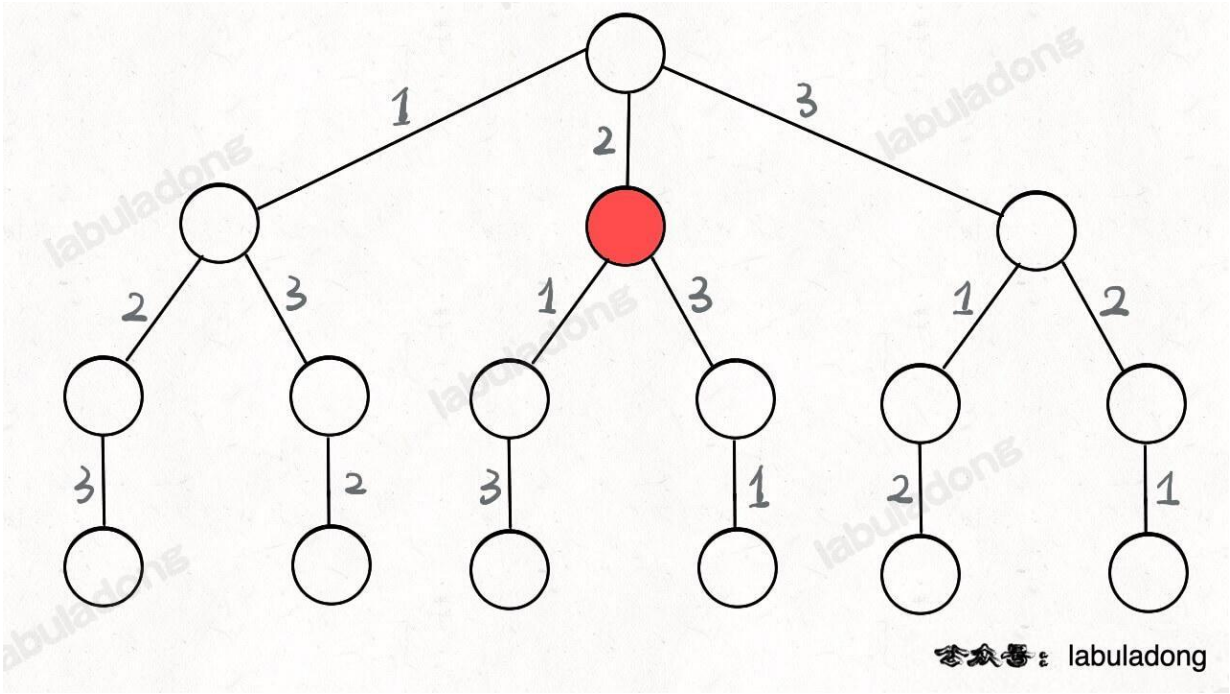
先固定第一位为 1，然后第二位可以是 2，那么第三位只能是 3；然后可以把第二位变成 3，第三位就只能是 2 了；然后就只能变化第一位，变成 2，然后再穷举后两位……

其实这就是回溯算法，我们高中无师自通就会用，或者有的同学直接画出如下这棵回溯树：



只要从根遍历这棵树，记录路径上的数字，其实就是所有的全排列。**我们不妨把这棵树称为回溯算法的「决策树」**。

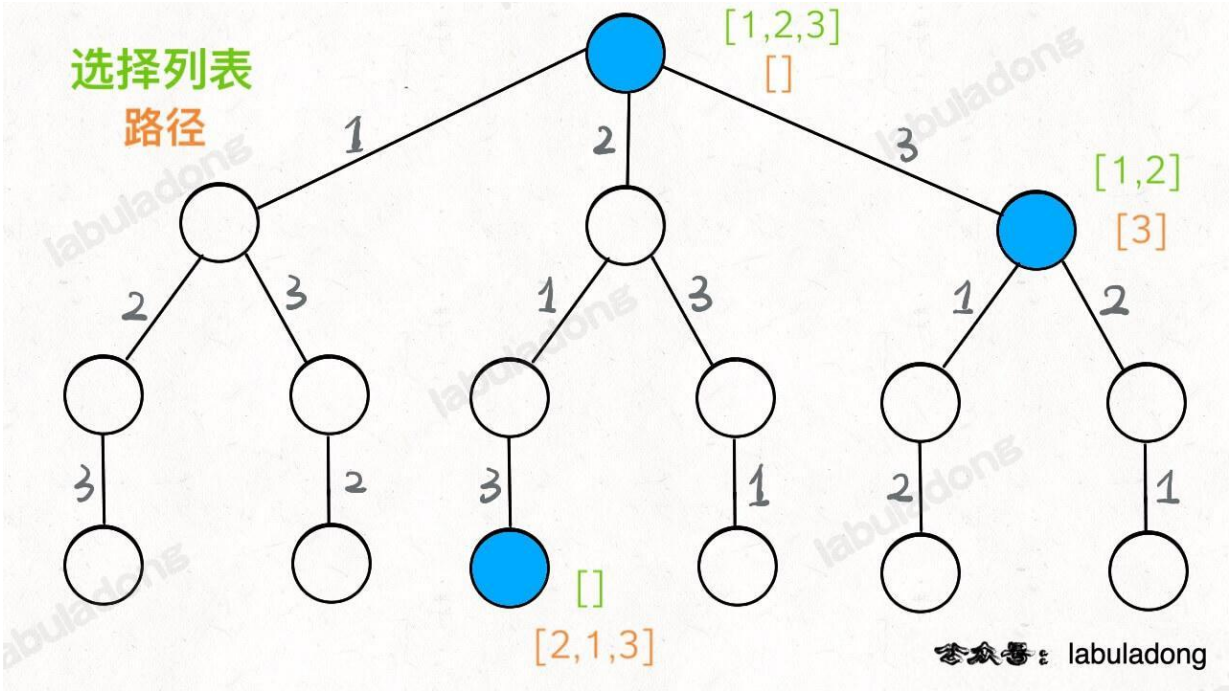
为啥说这是决策树呢，因为你在每个节点上其实都在做决策。比如说你站在下图的红色节点上：



你现在就在做决策，可以选择 1 那条树枝，也可以选择 3 那条树枝。为啥只能在 1 和 3 之中选择呢？因为 2 这个树枝在你身后，这个选择你之前做过了，而全排列是不允许重复使用数字的。

现在可以解答开头的几个名词：`[2]` 就是「路径」，记录你已经做过的选择；`[1,3]` 就是「选择列表」，表示你当前可以做出的选择；「结束条件」就是遍历到树的底层叶子节点，这里也就是选择列表为空的时候。

如果明白了这几个名词，可以把「路径」和「选择」列表作为决策树上每个节点的属性，比如下图列出了几个蓝色节点的属性：



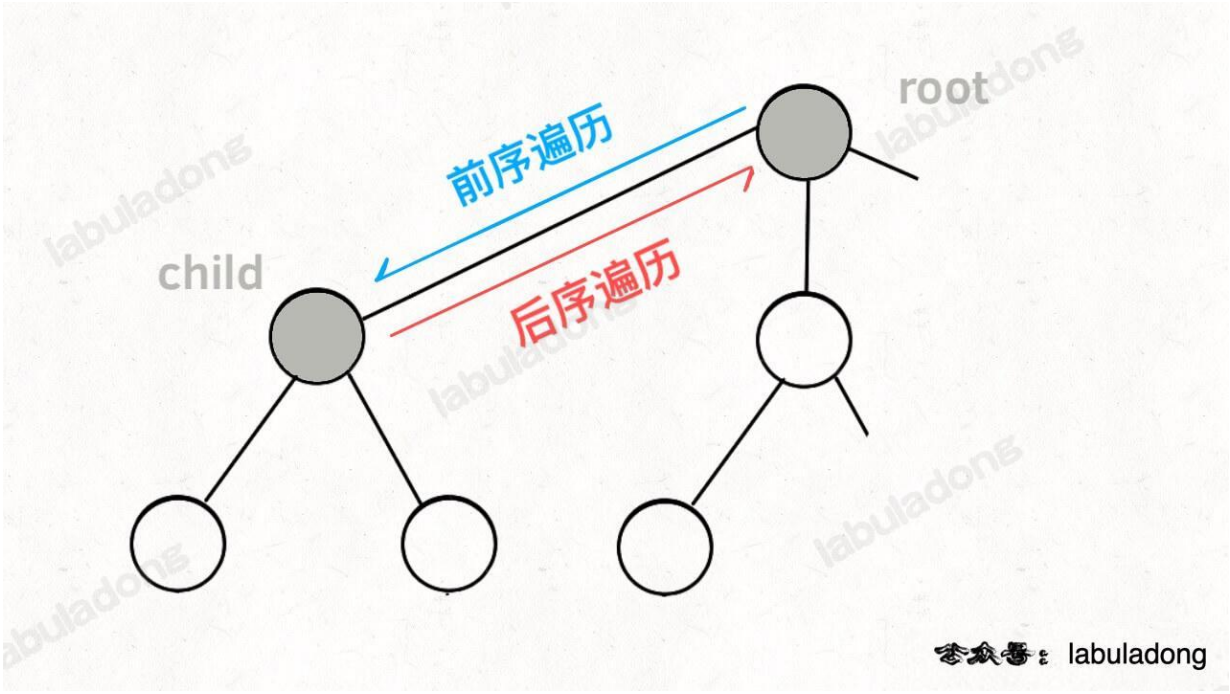
我们定义的 backtrack 函数其实就像一个指针，在这棵树上游走，同时要正确维护每个节点的属性，每当走到树的底层叶子节点，其「路径」就是一个全排列。

再进一步，如何遍历一棵树？这个应该不难吧。回忆一下之前 学习数据结构的框架思维 写过，各种搜索问题其实都是树的遍历问题，而多叉树的遍历框架就是这样：

```
void traverse(TreeNode root) {
    for (TreeNode child : root.childern) {
        // 前序位置需要的操作
        traverse(child);
        // 后序位置需要的操作
    }
}
```

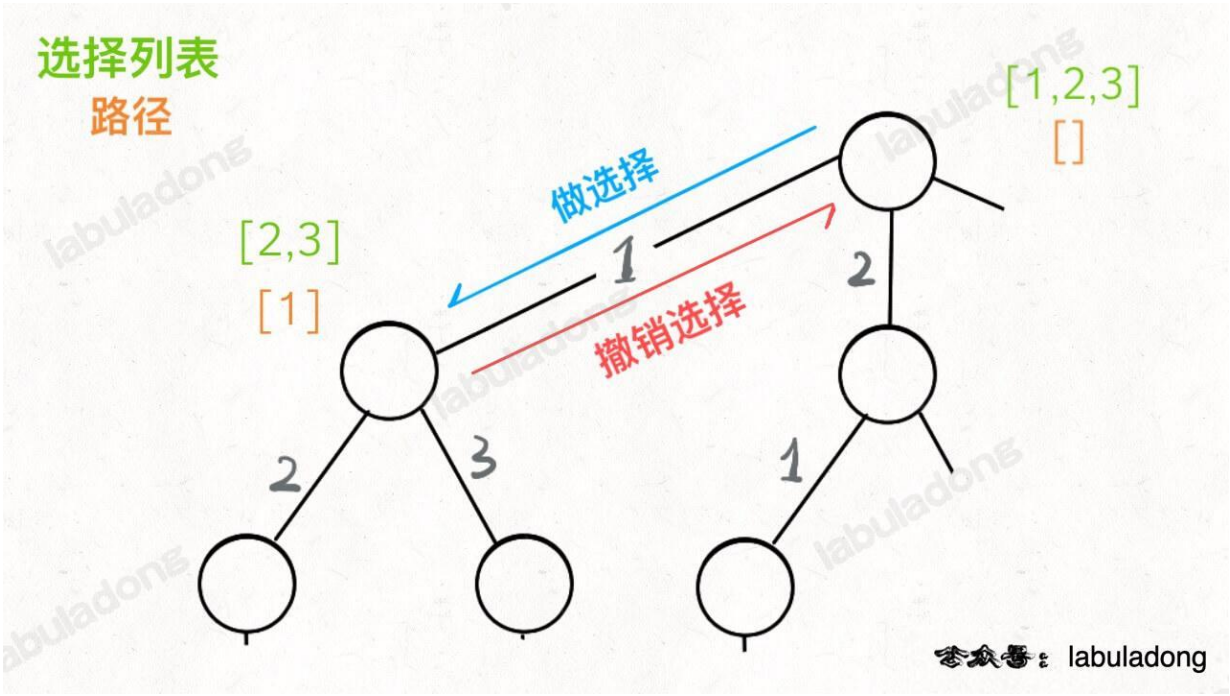
> 细心的读者肯定会疑问：多叉树 DFS 遍历框架的前序位置和后序位置应该在 for 循环外面，并不应该是在 for 循环里面呀？为什么在回溯算法中跑到 for 循环里面了？
>
> 是的，DFS 算法的前序和后序位置应该在 for 循环外面，不过回溯算法和 DFS 算法略有不同，前文 图论算法基础 会详细对比，这里可以暂且忽略这个问题。

而所谓的前序遍历和后序遍历，他们只是两个很有用的时间点，我给你画张图你就明白了：



前序遍历的代码在进入某一个节点之前的那个时间点执行，后序遍历代码在离开某个节点之后的那个时间点执行。

回想我们刚才说的，「路径」和「选择」是每个节点的属性，函数在树上游走要正确处理节点的属性，那么就要在这两个特殊时间点搞点动作：



现在，你是否理解了回溯算法的这段核心框架？

```
for 选择 in 选择列表:
    # 做选择
    将该选择从选择列表移除
    路径.add(选择)
    backtrack(路径, 选择列表)
    # 撤销选择
```

```
    路径.remove(选择)
    将该选择再加入选择列表
```

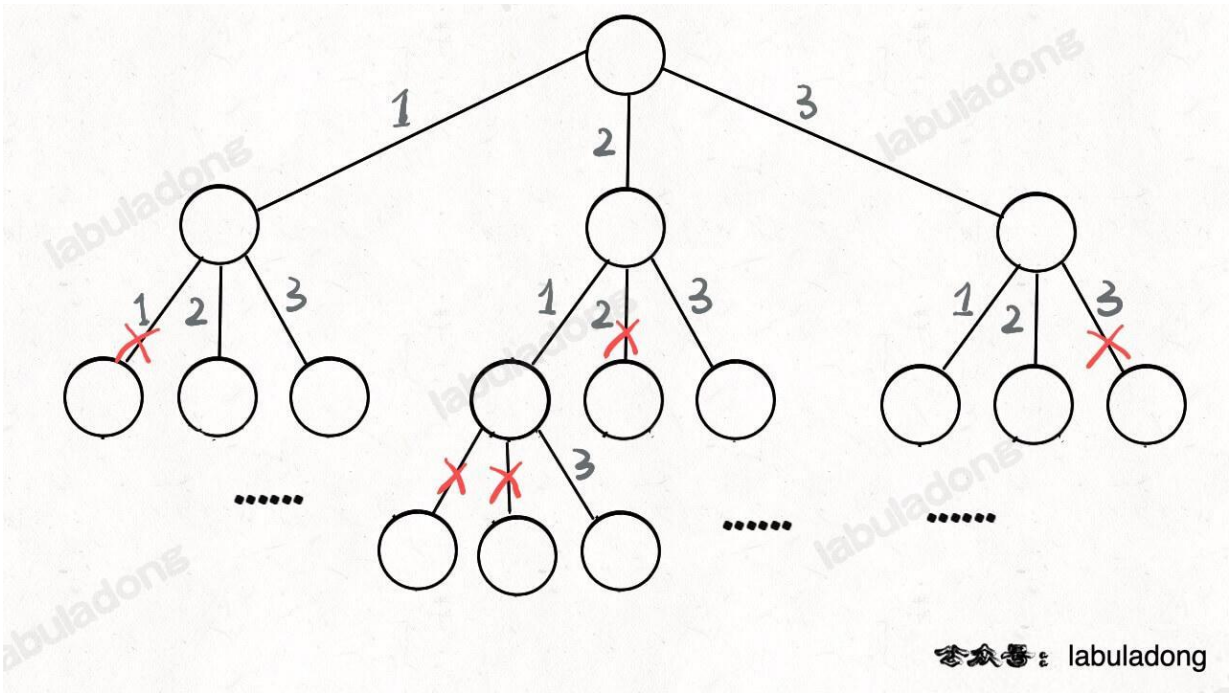
我们只要在递归之前做出选择，在递归之后撤销刚才的选择，就能正确得到每个节点的选择列表和路径。

下面，直接看全排列代码：

```
class Solution {
    List<List<Integer>> res = new LinkedList<>();

    /* 主函数，输入一组不重复的数字，返回它们的全排列 */
    List<List<Integer>> permute(int[] nums) {
        // 记录「路径」
        LinkedList<Integer> track = new LinkedList<>();
        // 「路径」中的元素会被标记为 true，避免重复使用
        boolean[] used = new boolean[nums.length];

        backtrack(nums, track, used);
        return res;
    }

    // 路径：记录在 track 中
    // 选择列表：nums 中不存在于 track 的那些元素（used[i] 为 false）
    // 结束条件：nums 中的元素全都在 track 中出现
    void backtrack(int[] nums, LinkedList<Integer> track, boolean[] used)
{
        // 触发结束条件
        if (track.size() == nums.length) {
            res.add(new LinkedList(track));
            return;
        }

        for (int i = 0; i < nums.length; i++) {
            // 排除不合法的选择
            if (used[i]) {
                // nums[i] 已经在 track 中，跳过
                continue;
            }
            // 做选择
            track.add(nums[i]);
            used[i] = true;
            // 进入下一层决策树
            backtrack(nums, track, used);
            // 取消选择
            track.removeLast();
            used[i] = false;
        }
    }
}
```

▶ 🍭 代码可视化动画🍭

我们这里稍微做了些变通，没有显式记录「选择列表」，而是通过 used 数组排除已经存在 track 中的元素，从而推导出当前的选择列表：



至此，我们就通过全排列问题详解了回溯算法的底层原理。当然，这个算法解决全排列不是最高效的，你可能看到有的解法连 used 数组都不使用，通过交换元素达到目的。但是那种解法稍微难理解一些，这里就不写了，有兴趣可以自行搜索一下。

但是必须说明的是，不管怎么优化，都符合回溯框架，而且时间复杂度都不可能低于 O(N!)，因为穷举整棵决策树是无法避免的，你最后肯定要穷举出 N! 种全排列结果。**这也是回溯算法的一个特点，不像动态规划存在重叠子问题可以优化，回溯算法就是纯暴力穷举，复杂度一般都很高**。

明白了全排列问题，就可以直接套回溯算法框架了，下面简单看看 N 皇后问题。

二、N 皇后问题

力扣第 51 题「N 皇后」就是这个经典问题，简单解释一下：给你一个 N×N 的棋盘，让你放置 N 个皇后，使得它们不能互相攻击，请你计算出所有可能的放法。函数签名如下：

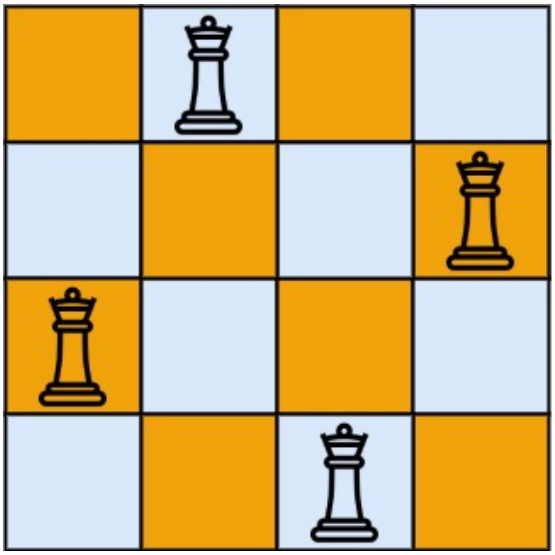
```
vector<vector<string>> solveNQueens(int n);
```

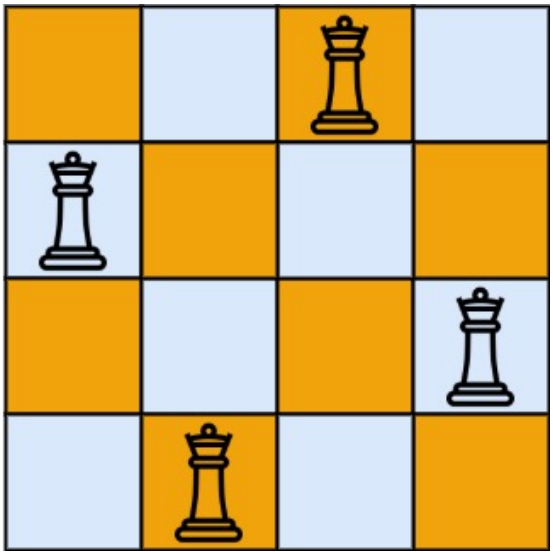
> 皇后可以攻击同一行、同一列、左上左下右上右下四个方向的任意单位。

比如如果给你输入 N = 4，那么你就要在 4x4 的棋盘上放置 4 个皇后，返回以下结果（用 . 代表空棋盘，Q 代表皇后）：

```

```

```
[
    [".Q..","...Q","Q...","..Q."],
    ["..Q.","Q...","...Q",".Q.."]
]
```





这个问题本质上跟全排列问题差不多，决策树的每一层表示棋盘上的每一行；每个节点可以做出的选择是，在该行的任意一列放置一个皇后。

因为 C++ 代码对字符串的操作方便一些，所以这道题我用 C++ 来写解法，直接套用回溯算法框架：

```
class Solution {
public:
    vector<vector<string>> res;

    /* 输入棋盘边长 n，返回所有合法的放置 */
    vector<vector<string>> solveNQueens(int n) {
        // vector<string> 代表一个棋盘
        // '.' 表示空，'Q' 表示皇后，初始化空棋盘
        vector<string> board(n, string(n, '.'));
        backtrack(board, 0);
        return res;
    }

    // 路径：board 中小于 row 的那些行都已经成功放置了皇后
    // 选择列表：第 row 行的所有列都是放置皇后的选择
    // 结束条件：row 超过 board 的最后一行
    void backtrack(vector<string>& board, int row) {
        // 触发结束条件
        if (row == board.size()) {
            res.push_back(board);
            return;
        }

        int n = board[row].size();
        for (int col = 0; col < n; col++) {
```

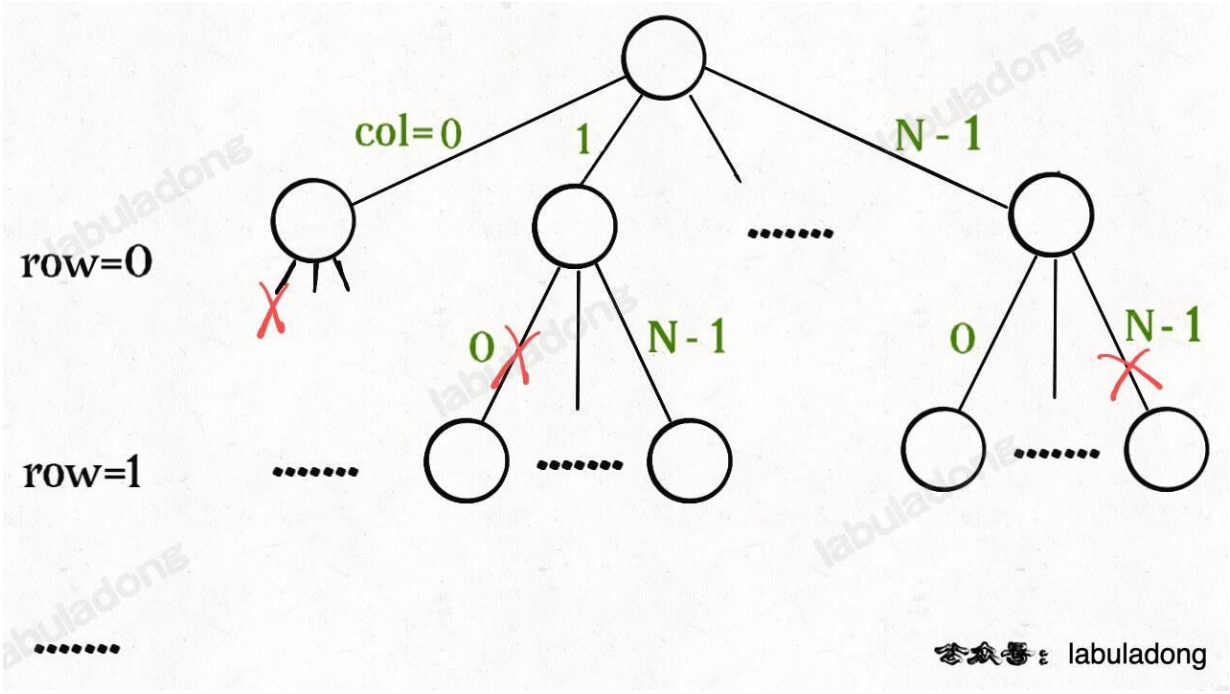
```
                // 排除不合法选择
                if (!isValid(board, row, col)) {
                    continue;
                }
                // 做选择
                board[row][col] = 'Q';
                // 进入下一行决策
                backtrack(board, row + 1);
                // 撤销选择
                board[row][col] = '.';
            }
        }
    }
```

这部分主要代码，其实跟全排列问题差不多，`isValid` 函数的实现也很简单：

```
/* 是否可以在 board[row][col] 放置皇后？ */
bool isValid(vector<string>& board, int row, int col) {
    int n = board.size();
    // 检查列是否有皇后互相冲突
    for (int i = 0; i <= row; i++) {
        if (board[i][col] == 'Q')
            return false;
    }
    // 检查右上方是否有皇后互相冲突
    for (int i = row - 1, j = col + 1;
            i >= 0 && j < n; i--, j++) {
        if (board[i][j] == 'Q')
            return false;
    }
    // 检查左上方是否有皇后互相冲突
    for (int i = row - 1, j = col - 1;
            i >= 0 && j >= 0; i--, j--) {
        if (board[i][j] == 'Q')
            return false;
    }
    return true;
}
```

> 肯定有读者问，按照 N 皇后问题的描述，我们为什么不检查左下角，右下角和下方的格子，只检查了左上角，右上角和上方的格子呢？
>
> 因为皇后是一行一行从上往下放的，所以左下方，右下方和正下方不用检查（还没放皇后）；因为一行只会放一个皇后，所以每行不用检查。也就是最后只用检查上面，左上，右上三个方向。

函数 `backtrack` 依然像个在决策树上游走的指针，通过 `row` 和 `col` 就可以表示函数遍历到的位置，通过 `isValid` 函数可以将不符合条件的情况剪枝：



如果直接给你这么一大段解法代码，可能是懵逼的。但是现在明白了回溯算法的框架套路，还有啥难理解的呢？无非是改改做选择的方式，排除不合法选择的方式而已，只要框架存于心，你面对的只剩下小问题了。

▶ 🥳 代码可视化动画🥳

当 `N = 8` 时，就是八皇后问题，数学大佬高斯穷尽一生都没有数清楚八皇后问题到底有几种可能的放置方法，但是我们的算法只需要一秒就可以算出来所有可能的结果。

不过真的不怪高斯，这个问题的复杂度确实非常高，粗略估算一下：

`N` 行棋盘中，第一行有 `N` 个位置可能可以放皇后，第二行有 `N - 1` 个位置，第三行有 `N - 2` 个位置，以此类推，再叠加每次放皇后之前 `isValid` 函数所需的 O(N) 复杂度，所以总的时间复杂度上界是 O(N! * N)，而且没有什么明显的冗余计算可以优化效率。你可以试试 `N = 10` 的时候，计算就已经很耗时了。

当然，因为有 `isValid` 函数剪枝，并不会真的在每个位置都尝试放皇后，所以实际的执行效率会高一些。但正如后文 算法时空复杂度分析实用指南 所说，这个时间复杂度作为上界是没问题的。

有的时候，如果我们并不想得到所有合法的答案，只想要一个答案，怎么办呢？比如解数独的算法，找所有解法复杂度太高，只要找到一种解法就可以。

其实特别简单，只要稍微修改一下回溯算法的代码，用一个外部变量记录是否找到答案，找到答案后就停止继续递归即可：

```
bool found = false;
// 函数找到一个答案后就返回 true
bool backtrack(vector<string>& board, int row) {
    if (found) {
        // 已经找到一个答案了，不用再找了
        return;
    }

    // 触发结束条件
```

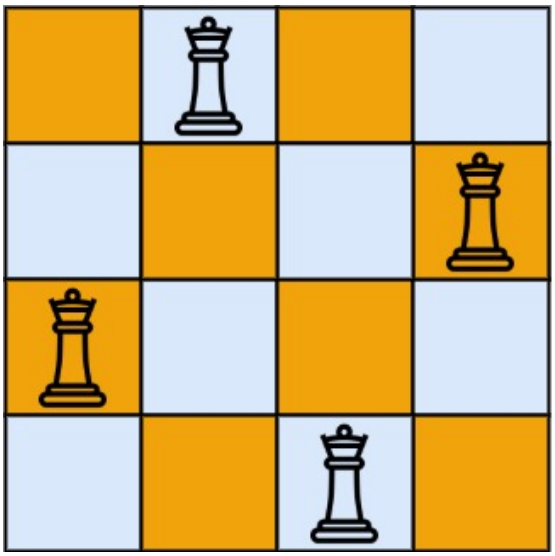
```
    if (row == board.size()) {
        res.push_back(board);
        // 找到了第一个答案
        found = true;
        return;
    }

    ...
}
```

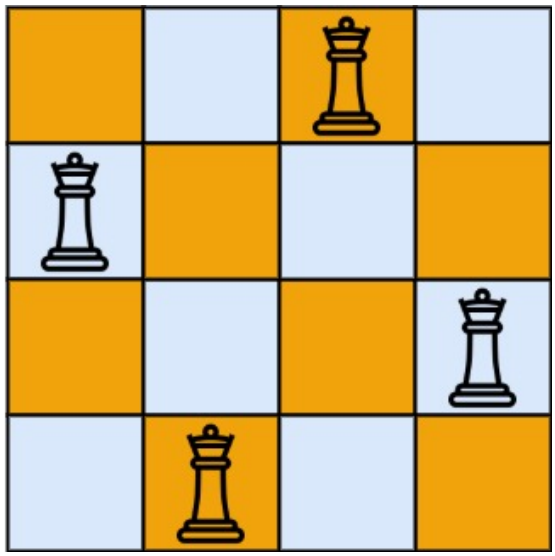
这样修改后，只要找到一个答案，后续的递归穷举都会被阻断。也许你可以在 N 皇后问题的代码框架上，稍加修改，写一个解数独的算法？可以参考我的这篇文章 回溯算法秒杀数独问题。

再简单拓展一下，有可能题目不需要你计算出 N 皇后问题的所有具体结果，而仅仅问你共有几种解法，应该怎么做呢？

比如力扣第 52 题「N 皇后 II」：

给你一个整数 n，返回 n 皇后问题不同的解决方案的数量。比如输入 n = 4，你的算法返回 2，因为 4x4 的棋盘只有两种可行的解决方案。





其实你把我们上面写的解法 copy 过去也可以解决这个问题，因为我们计算出来的 res 就存储了所有合法的棋盘嘛，那么 res 中元素的个数不就是所有可行解法的总数吗？

是这样的，但要知道创建和存储这些具体的棋盘解法是要消耗空间和时间的，所以效率上可能会差一些。

更好的办法就是直接把 res 变量变成 int 类型，每次在 base case 找到一个合法答案的时候递增 res 变量即可：

```
// 仅仅记录合法结果的数量
int res = 0;

void backtrack(vector<string>& board, int row) {
    if (row == board.size()) {
        // 找到一个合法结果
        res++;
```

```
            return;
        }

        // 其他都一样
    }
```

三、最后总结

回溯算法就是个多叉树的遍历问题，关键就是在前序遍历和后序遍历的位置做一些操作，算法框架如下：

```
def backtrack(...):
    for 选择 in 选择列表:
        做选择
        backtrack(...)
        撤销选择
```

写 `backtrack` 函数时，需要维护走过的「路径」和当前可以做的「选择列表」，当触发「结束条件」时，将「路径」记入结果集。

其实想想看，回溯算法和动态规划是不是有点像呢？我们在动态规划系列文章中多次强调，动态规划的三个需要明确的点就是「状态」「选择」和「base case」，是不是就对应着走过的「路径」，当前的「选择列表」和「结束条件」？

动态规划和回溯算法底层都把问题抽象成了树的结构，但这两种算法在思路上是完全不同的。在 东哥带你刷二叉树（纲领篇） 你将看到动态规划和回溯算法更深层次的区别和联系。

如果你有高质量的问题，可以 点击这里 进入本文的讨论区。

▶ **引用本文的题目**

安装 我的 Chrome 刷题插件 点开下列题目可直接查看解题思路：

LeetCode	力扣
111. Minimum Depth of Binary Tree	111. 二叉树的最小深度
112. Path Sum	112. 路径总和
113. Path Sum II	113. 路径总和 II
131. Palindrome Partitioning	131. 分割回文串
140. Word Break II	140. 单词拆分 II
17. Letter Combinations of a Phone Number	17. 电话号码的字母组合
22. Generate Parentheses	22. 括号生成
301. Remove Invalid Parentheses	301. 删除无效的括号
332. Reconstruct Itinerary	332. 重新安排行程

LeetCode	力扣
39. Combination Sum	39. 组合总和
638. Shopping Offers	638. 大礼包
698. Partition to K Equal Sum Subsets	698. 划分为k个相等的子集
77. Combinations	77. 组合
78. Subsets	78. 子集
784. Letter Case Permutation	784. 字母大小写全排列
93. Restore IP Addresses	93. 复原 IP 地址
-	剑指 Offer 34. 二叉树中和为某一值的路径
-	剑指 Offer II 079. 所有子集
-	剑指 Offer II 080. 含有 k 个元素的组合
-	剑指 Offer II 081. 允许重复选择元素的组合
-	剑指 Offer II 083. 没有重复元素集合的全排列
-	剑指 Offer II 085. 生成匹配的括号

▶ 引用本文的文章

- BFS 算法解题套路框架
- Dijkstra 算法模板及应用
- FloodFill算法详解及应用
- base case 和备忘录的初始值怎么定?
- 一文秒杀所有岛屿题目
- 东哥带你刷二叉树（纲领篇）
- 分治算法详解：运算优先级
- 前缀树算法模板秒杀五道算法题
- 动态规划和回溯算法的思维转换
- 可视化代码编辑器使用指南
- 回溯算法最佳实践：括号生成
- 回溯算法最佳实践：解数独
- 回溯算法最佳实践：集合划分
- 回溯算法秒杀所有排列/组合/子集问题
- 图论基础及遍历算法
- 学习算法和刷题的框架思维
- 我的刷题心得：算法的本质
- 环检测及拓扑排序算法
- 球盒模型：回溯算法穷举的两种视角
- 目标和问题：背包问题的变体
- 算法学习和心流体验
- 算法时空复杂度分析实用指南

- 算法笔试「骗分」套路
- 经典动态规划：戳气球

——————————————————

更多精品课程可查看 我的网站；扫码查看更多配套学习套件：

回溯算法团灭子集、排列、组合问题

Stars 123k 精品课程 查看 知乎 @labuladong B站 @labuladong

学算法认准 labuladong，致力于把算法讲清楚！网页版 点这里。

读完本文，你不仅学会了算法套路，还可以顺便解决如下题目：

LeetCode	力扣	难度
216. Combination Sum III	216. 组合总和 III	🟠
39. Combination Sum	39. 组合总和	🟠
40. Combination Sum II	40. 组合总和 II	🟠
46. Permutations	46. 全排列	🟠
47. Permutations II	47. 全排列 II	🟠
77. Combinations	77. 组合	🟠
78. Subsets	78. 子集	🟠
90. Subsets II	90. 子集 II	🟠
-	剑指 Offer II 079. 所有子集	🟠
-	剑指 Offer II 080. 含有 k 个元素的组合	🟠
-	剑指 Offer II 081. 允许重复选择元素的组合	🟠
-	剑指 Offer II 082. 含有重复元素集合的组合	🟠
-	剑指 Offer II 083. 没有重复元素集合的全排列	🟠
-	剑指 Offer II 084. 含有重复元素集合的全排列	🟠

> tip：本文有视频版：回溯算法秒杀所有排列/组合/子集问题。建议关注我的 B 站账号，我会用视频领读的方式带大家学习那些稍有难度的算法技巧。

虽然排列、组合、子集系列问题是高中就学过的，但如果想编写算法解决它们，还是非常考验计算机思维的，本文就讲讲编程解决这几个问题的核心思路，以后再有什么变体，你也能手到擒来，以不变应万变。

无论是排列、组合还是子集问题，简单说无非就是让你从序列 `nums` 中以给定规则取若干元素，主要有以下几种变体：

形式一、元素无重不可复选，即 `nums` 中的元素都是唯一的，每个元素最多只能被使用一次，这也是最基本的形式。

以组合为例，如果输入 `nums = [2,3,6,7]`，和为 7 的组合应该只有 `[7]`。

形式二、元素可重不可复选，即 `nums` 中的元素可以存在重复，每个元素最多只能被使用一次。

以组合为例，如果输入 `nums = [2,5,2,1,2]`，和为 7 的组合应该有两种 `[2,2,2,1]` 和 `[5,2]`。

形式三、元素无重可复选，即 `nums` 中的元素都是唯一的，每个元素可以被使用若干次。

以组合为例，如果输入 `nums = [2,3,6,7]`，和为 7 的组合应该有两种 `[2,2,3]` 和 `[7]`。

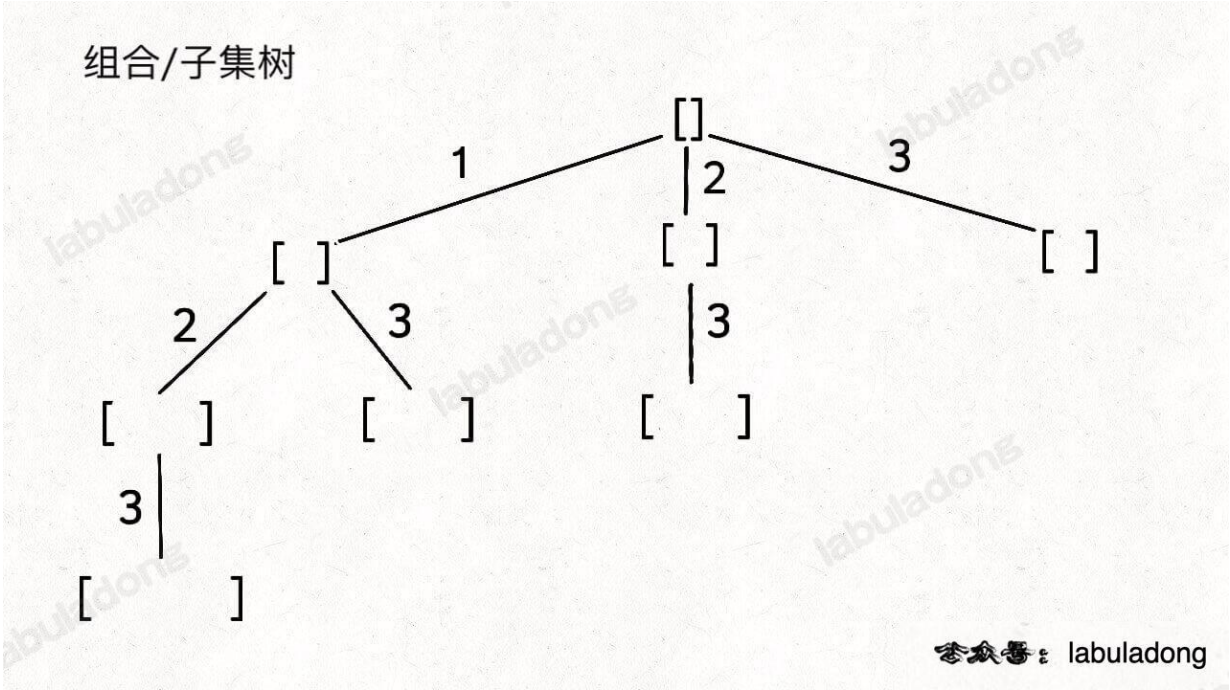
当然，也可以说有第四种形式，即元素可重可复选。但既然元素可复选，那又何必存在重复元素呢？元素去重之后就等同于形式三，所以这种情况不用考虑。

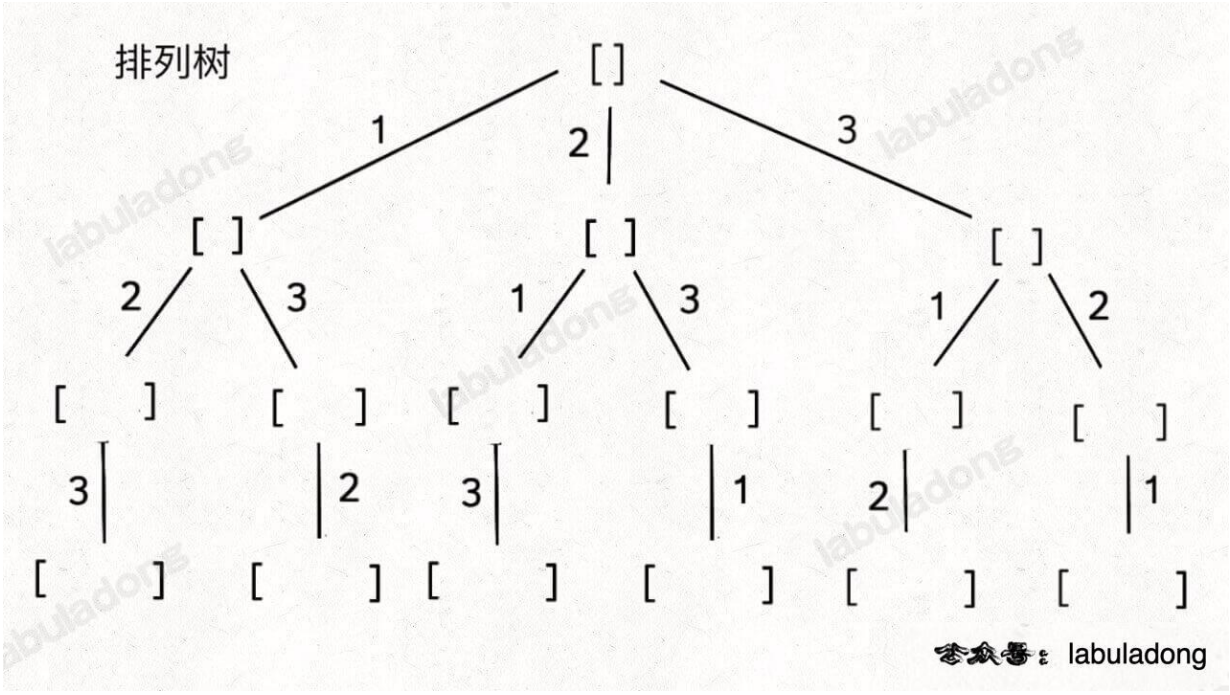
上面用组合问题举的例子，但排列、组合、子集问题都可以有这三种基本形式，所以共有 9 种变化。

除此之外，题目也可以再添加各种限制条件，比如让你求和为 `target` 且元素个数为 `k` 的组合，那这么一来又可以衍生出一堆变体，怪不得面试笔试中经常考到排列组合这种基本题型。

但无论形式怎么变化，其本质就是穷举所有解，而这些解呈现树形结构，所以合理使用回溯算法框架，稍改代码框架即可把这些问题一网打尽。

具体来说，你需要先阅读并理解前文 回溯算法核心套路，然后记住如下子集问题和排列问题的回溯树，就可以解决所有排列组合子集相关的问题：





为什么只要记住这两种树形结构就能解决所有相关问题呢？

首先，组合问题和子集问题其实是等价的，这个后面会讲；至于之前说的三种变化形式，无非是在这两棵树上剪掉或者增加一些树枝罢了。

那么，接下来我们就开始穷举，把排列/组合/子集问题的 9 种形式都过一遍，学学如何用回溯算法把它们一套带走。

> 另外，有些读者之前看过的排列/子集/组合的解法代码可能和我在本文介绍的代码不同。这是因为回溯算法有两种穷举视角，我会在后文 球盒模型：回溯算法穷举的两种视角 手把手给你讲清楚。现在还不适合直接跟你讲那些解法，你照着我的思路学习即可。

子集（元素无重不可复选）

力扣第 78 题「子集」就是这个问题：

题目给你输入一个无重复元素的数组 `nums`，其中每个元素最多使用一次，请你返回 `nums` 的所有子集。

函数签名如下：

```
List<List<Integer>> subsets(int[] nums)
```

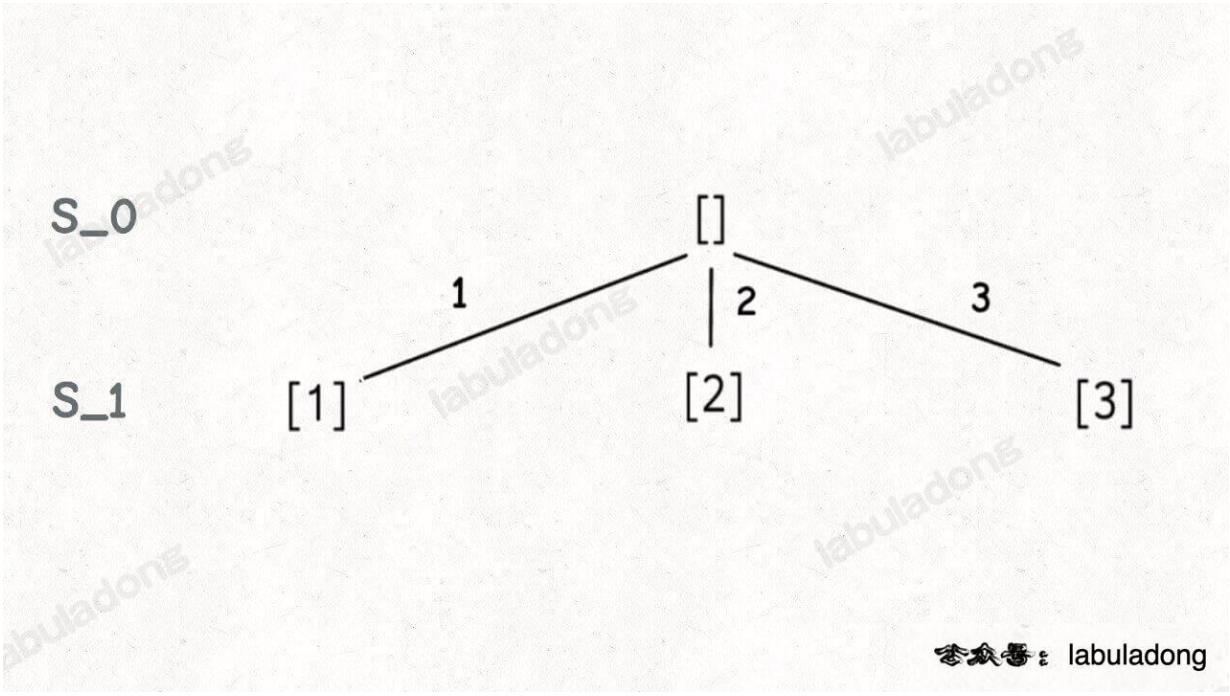
比如输入 `nums = [1,2,3]`，算法应该返回如下子集：

```
[ [],[1],[2],[3],[1,2],[1,3],[2,3],[1,2,3] ]
```

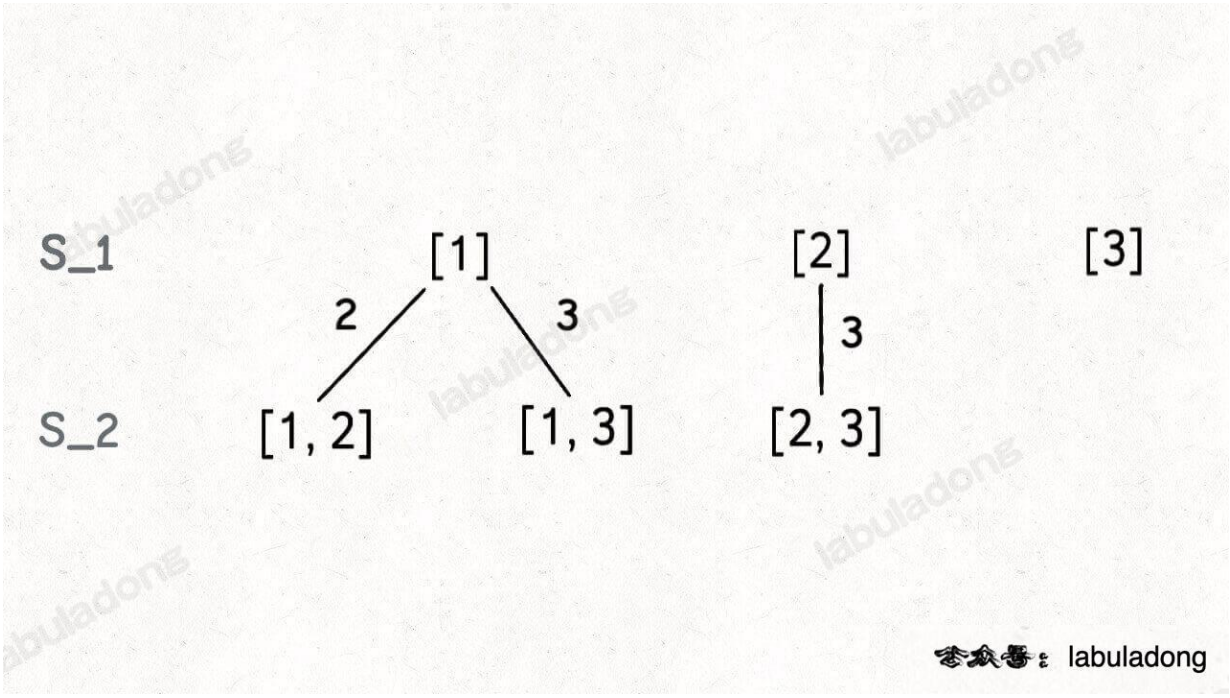
好，我们暂时不考虑如何用代码实现，先回忆一下我们的高中知识，如何手推所有子集？

首先，生成元素个数为 0 的子集，即空集 `[]`，为了方便表示，我称之为 `S_0`。

然后，在 `S_0` 的基础上生成元素个数为 1 的所有子集，我称为 `S_1`：



接下来，我们可以在 `S_1` 的基础上推导出 `S_2`，即元素个数为 2 的所有子集：



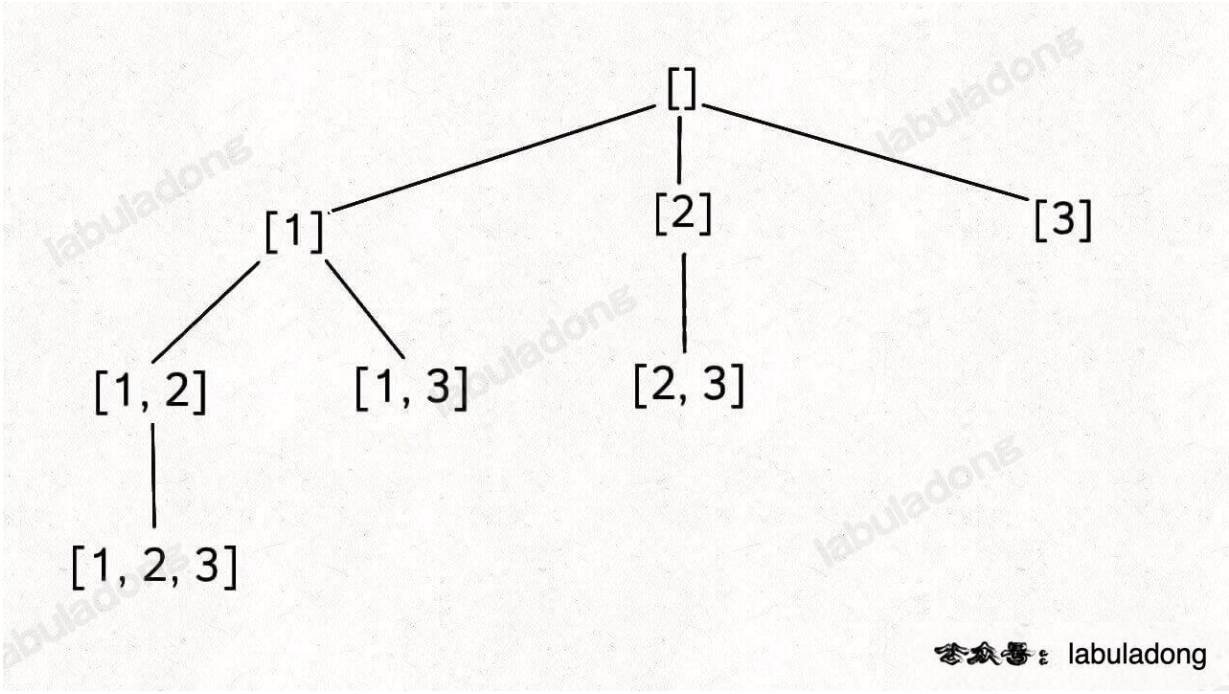
为什么集合 `[2]` 只需要添加 3，而不添加前面的 1 呢？

因为集合中的元素不用考虑顺序，`[1,2,3]` 中 2 后面只有 3，如果你添加了前面的 1，那么 `[2,1]` 会和之前已经生成的子集 `[1,2]` 重复。

换句话说，我们通过保证元素之间的相对顺序不变来防止出现重复的子集。

接着，我们可以通过 `S_2` 推出 `S_3`，实际上 `S_3` 中只有一个集合 `[1,2,3]`，它是通过 `[1,2]` 推出的。

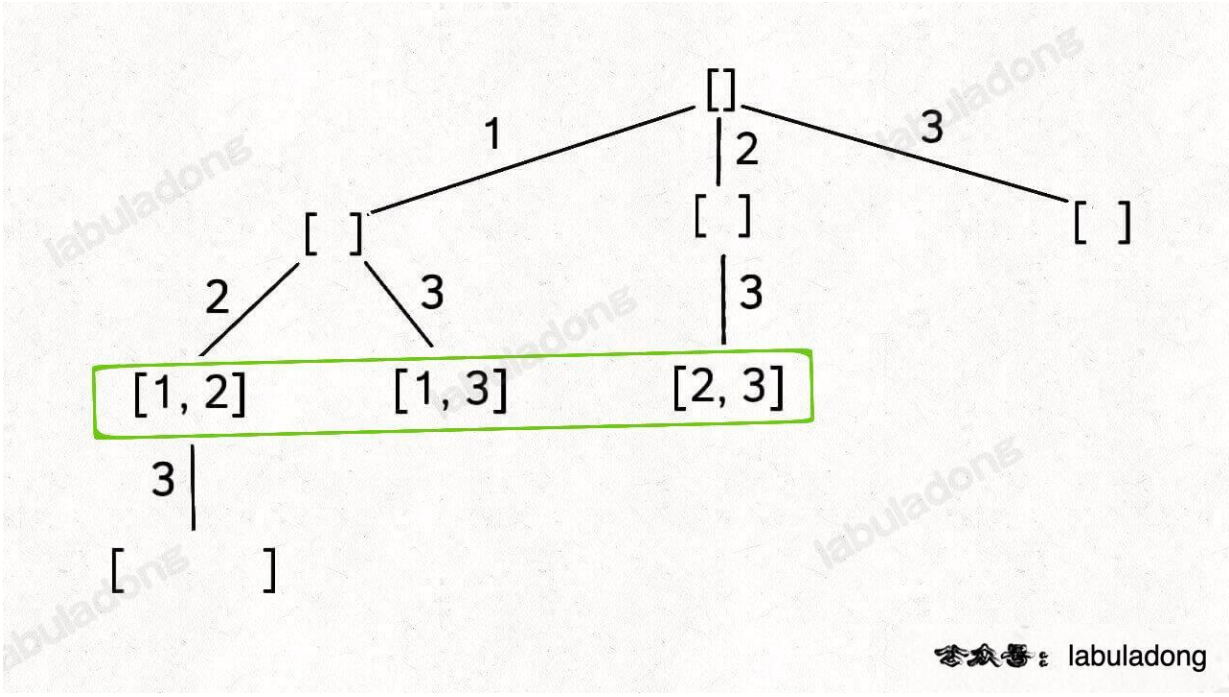
整个推导过程就是这样一棵树：



注意这棵树的特性：

如果把根节点作为第 0 层，将每个节点和根节点之间树枝上的元素作为该节点的值，那么第 n 层的所有节点就是大小为 n 的所有子集。

你比如大小为 2 的子集就是这一层节点的值：



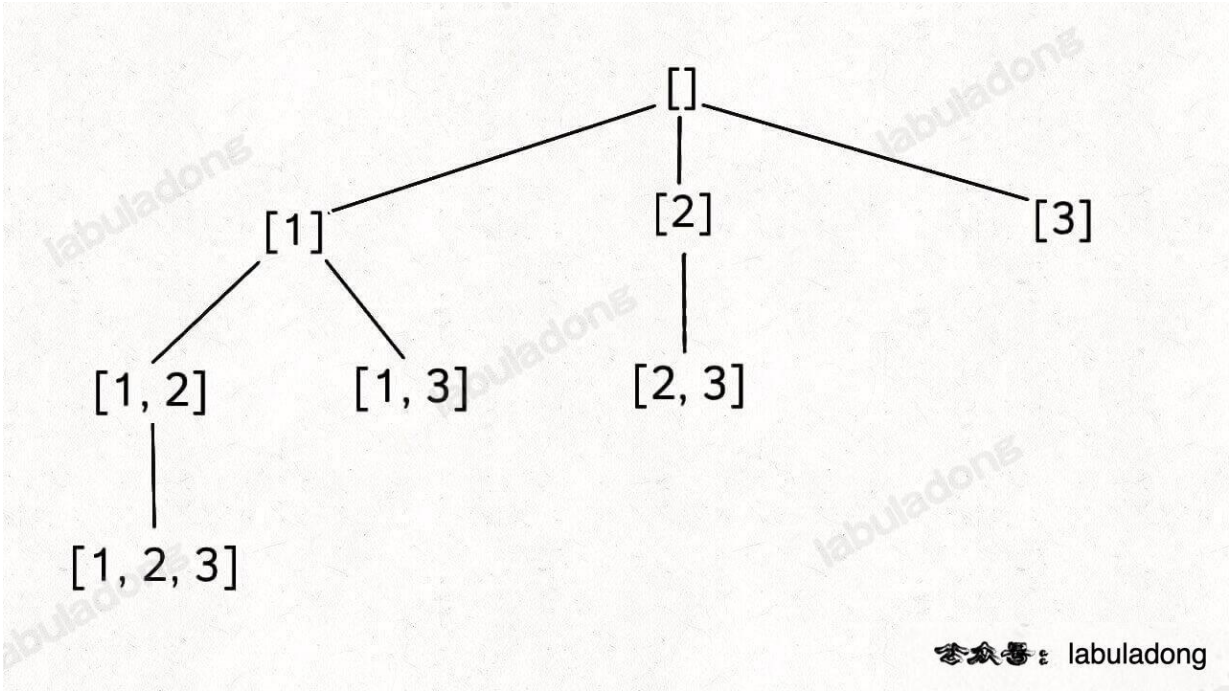
> **注意，本文之后所说「节点的值」都是指节点和根节点之间树枝上的元素，且将根节点认为是第 0 层。**

那么再进一步，如果想计算所有子集，那只要遍历这棵多叉树，把所有节点的值收集起来不就行了？

直接看代码：

```
class Solution {

    List<List<Integer>> res = new LinkedList<>();
    // 记录回溯算法的递归路径
    LinkedList<Integer> track = new LinkedList<>();

    // 主函数
    public List<List<Integer>> subsets(int[] nums) {
        backtrack(nums, 0);
        return res;
    }

    // 回溯算法核心函数，遍历子集问题的回溯树
    void backtrack(int[] nums, int start) {

        // 前序位置，每个节点的值都是一个子集
        res.add(new LinkedList<>(track));

        // 回溯算法标准框架
        for (int i = start; i < nums.length; i++) {
            // 做选择
            track.addLast(nums[i]);
            // 通过 start 参数控制树枝的遍历，避免产生重复的子集
            backtrack(nums, i + 1);
            // 撤销选择
            track.removeLast();
        }
    }
}
```

看过前文 回溯算法核心框架 的读者应该很容易理解这段代码吧，我们使用 `start` 参数控制树枝的生长避免产生重复的子集，用 `track` 记录根节点到每个节点的路径的值，同时在前序位置把每个节点的路径值收集起来，完成回溯树的遍历就收集了所有子集：



最后，`backtrack` 函数开头看似没有 base case，会不会进入无限递归?

其实不会的，当 `start == nums.length` 时，叶子节点的值会被装入 `res`，但 for 循环不会执行，也就结束了递归。

▶ 🌈 代码可视化动画🌈

组合（元素无重不可复选）

如果你能够成功的生成所有无重子集，那么你稍微改改代码就能生成所有无重组合了。

你比如说，让你在 `nums = [1,2,3]` 中拿 2 个元素形成所有的组合，你怎么做?

稍微想想就会发现，大小为 2 的所有组合，不就是所有大小为 2 的子集嘛。

所以我说组合和子集是一样的：大小为 `k` 的组合就是大小为 `k` 的子集。

比如力扣第 77 题「组合」：

给定两个整数 `n` 和 `k`，返回范围 `[1, n]` 中所有可能的 `k` 个数的组合。

函数签名如下：

```
List<List<Integer>> combine(int n, int k)
```

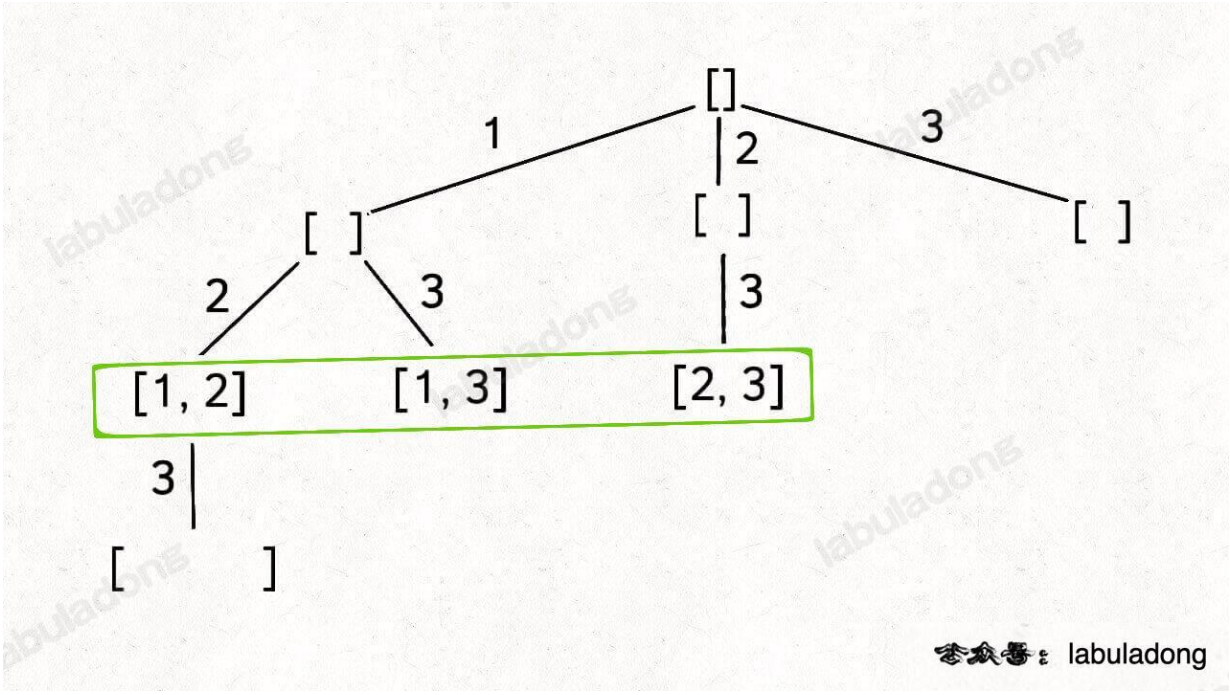
比如 `combine(3, 2)` 的返回值应该是：

```
[ [1,2],[1,3],[2,3] ]
```

这是标准的组合问题，但我给你翻译一下就变成子集问题了：

给你输入一个数组 `nums = [1,2..,n]` 和一个正整数 `k`，请你生成所有大小为 `k` 的子集。

还是以 `nums = [1,2,3]` 为例，刚才让你求所有子集，就是把所有节点的值都收集起来；**现在你只需要把第 2 层（根节点视为第 0 层）的节点收集起来，就是大小为 2 的所有组合**：



反映到代码上，只需要稍改 base case，控制算法仅仅收集第 `k` 层节点的值即可：

```
class Solution {

    List<List<Integer>> res = new LinkedList<>();
    // 记录回溯算法的递归路径
    LinkedList<Integer> track = new LinkedList<>();

    // 主函数
    public List<List<Integer>> combine(int n, int k) {
        backtrack(1, n, k);
        return res;
    }

    void backtrack(int start, int n, int k) {
        // base case
        if (k == track.size()) {
            // 遍历到了第 k 层，收集当前节点的值
            res.add(new LinkedList<>(track));
            return;
        }

        // 回溯算法标准框架
        for (int i = start; i <= n; i++) {
            // 选择
            track.addLast(i);
```

```
                // 通过 start 参数控制树枝的遍历，避免产生重复的子集
                backtrack(i + 1, n, k);
                // 撤销选择
                track.removeLast();
            }
        }
    }
```

这样，标准的组合问题也解决了。

▶ 🌈 代码可视化动画🌈

排列（元素无重不可复选）

排列问题在前文 回溯算法核心框架 讲过，这里就简单过一下。

力扣第 46 题「全排列」就是标准的排列问题：

给定一个**不含重复数字**的数组 `nums`，返回其所有可能的**全排列**。

函数签名如下：

```
List<List<Integer>> permute(int[] nums)
```

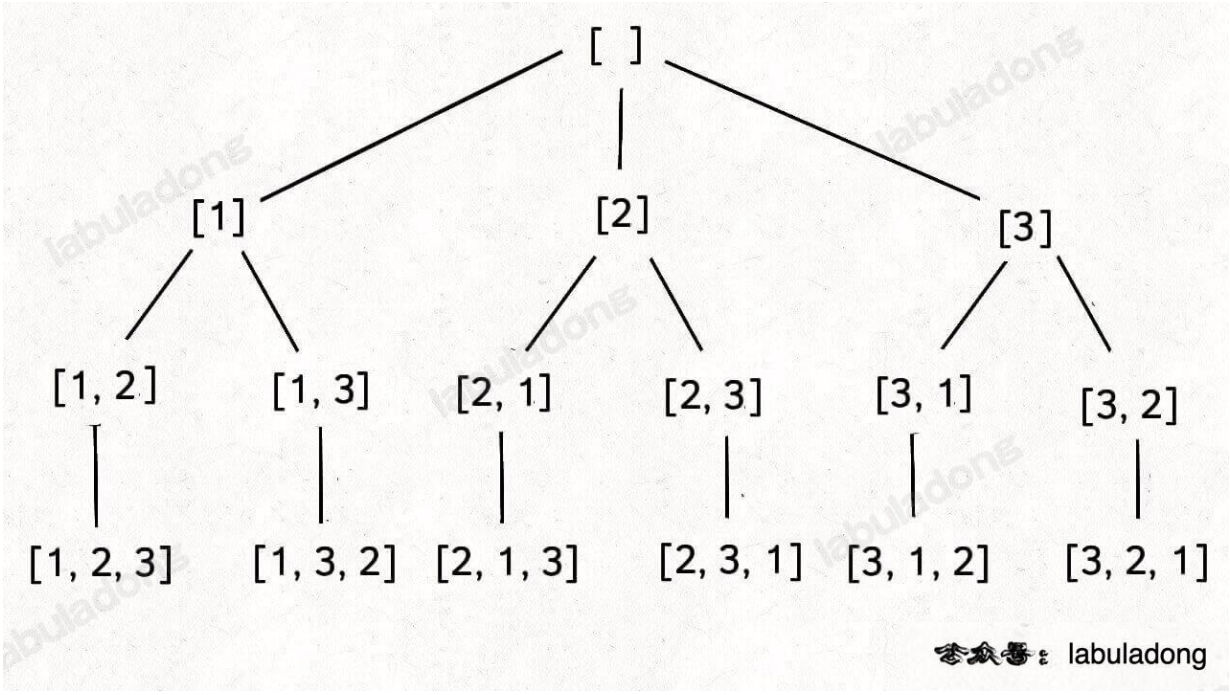
比如输入 `nums = [1,2,3]`，函数的返回值应该是：

```
[
    [1,2,3],[1,3,2],
    [2,1,3],[2,3,1],
    [3,1,2],[3,2,1]
]
```

刚才讲的组合/子集问题使用 `start` 变量保证元素 `nums[start]` 之后只会出现 `nums[start+1..]` 中的元素，通过固定元素的相对位置保证不出现重复的子集。

但排列问题本身就是让你穷举元素的位置，`nums[i]` 之后也可以出现 `nums[i]` 左边的元素，所以之前的那一套玩不转了，需要额外使用 `used` 数组来标记哪些元素还可以被选择。

标准全排列可以抽象成如下这棵多叉树：



我们用 used 数组标记已经在路径上的元素避免重复选择，然后收集所有叶子节点上的值，就是所有全排列的结果：

```
class Solution {

    List<List<Integer>> res = new LinkedList<>();
    // 记录回溯算法的递归路径
    LinkedList<Integer> track = new LinkedList<>();
    // track 中的元素会被标记为 true
    boolean[] used;

    /* 主函数，输入一组不重复的数字，返回它们的全排列 */
    public List<List<Integer>> permute(int[] nums) {
        used = new boolean[nums.length];
        backtrack(nums);
        return res;
    }

    // 回溯算法核心函数
    void backtrack(int[] nums) {
        // base case，到达叶子节点
        if (track.size() == nums.length) {
            // 收集叶子节点上的值
            res.add(new LinkedList(track));
            return;
        }

        // 回溯算法标准框架
        for (int i = 0; i < nums.length; i++) {
            // 已经存在 track 中的元素，不能重复选择
            if (used[i]) {
                continue;
            }
```

```
                // 做选择
                used[i] = true;
                track.addLast(nums[i]);
                // 进入下一层回溯树
                backtrack(nums);
                // 取消选择
                track.removeLast();
                used[i] = false;
            }
        }
    }
```

▶ 🌈 代码可视化动画🌈

这样，全排列问题就解决了。

但如果题目不让你算全排列，而是让你算元素个数为 k 的排列，怎么算？

也很简单，改下 backtrack 函数的 base case，仅收集第 k 层的节点值即可：

```
// 回溯算法核心函数
void backtrack(int[] nums, int k) {
    // base case，到达第 k 层，收集节点的值
    if (track.size() == k) {
        // 第 k 层节点的值就是大小为 k 的排列
        res.add(new LinkedList(track));
        return;
    }

    // 回溯算法标准框架
    for (int i = 0; i < nums.length; i++) {
        // ...
        backtrack(nums, k);
        // ...
    }
}
```

子集/组合（元素可重不可复选）

刚才讲的标准子集问题输入的 nums 是没有重复元素的，但如果存在重复元素，怎么处理呢？

力扣第 90 题「子集 II」就是这样一个问题：

给你一个整数数组 nums，其中可能包含重复元素，请你返回该数组所有可能的子集。

函数签名如下：

```
List<List<Integer>> subsetsWithDup(int[] nums)
```

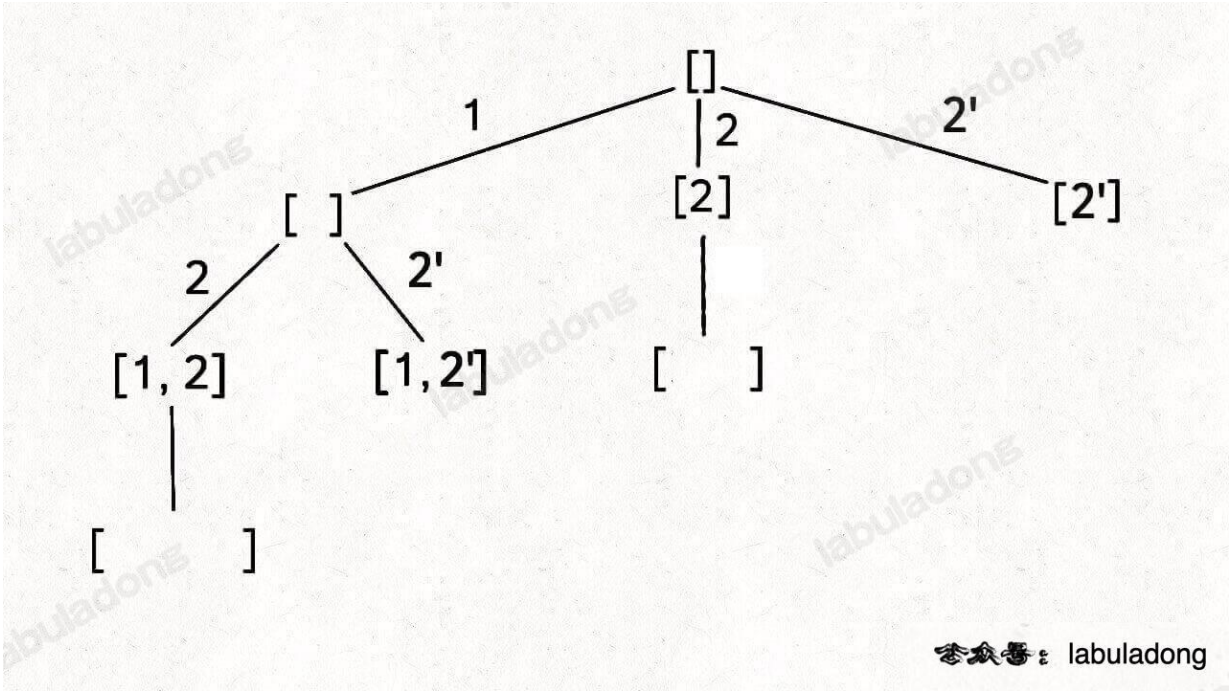
比如输入 `nums = [1,2,2]`，你应该输出：

```
[ [],[1],[2],[1,2],[2,2],[1,2,2] ]
```

当然，按道理说「集合」不应该包含重复元素的，但既然题目这样问了，我们就忽略这个细节吧，仔细思考一下这道题怎么做才是正事。

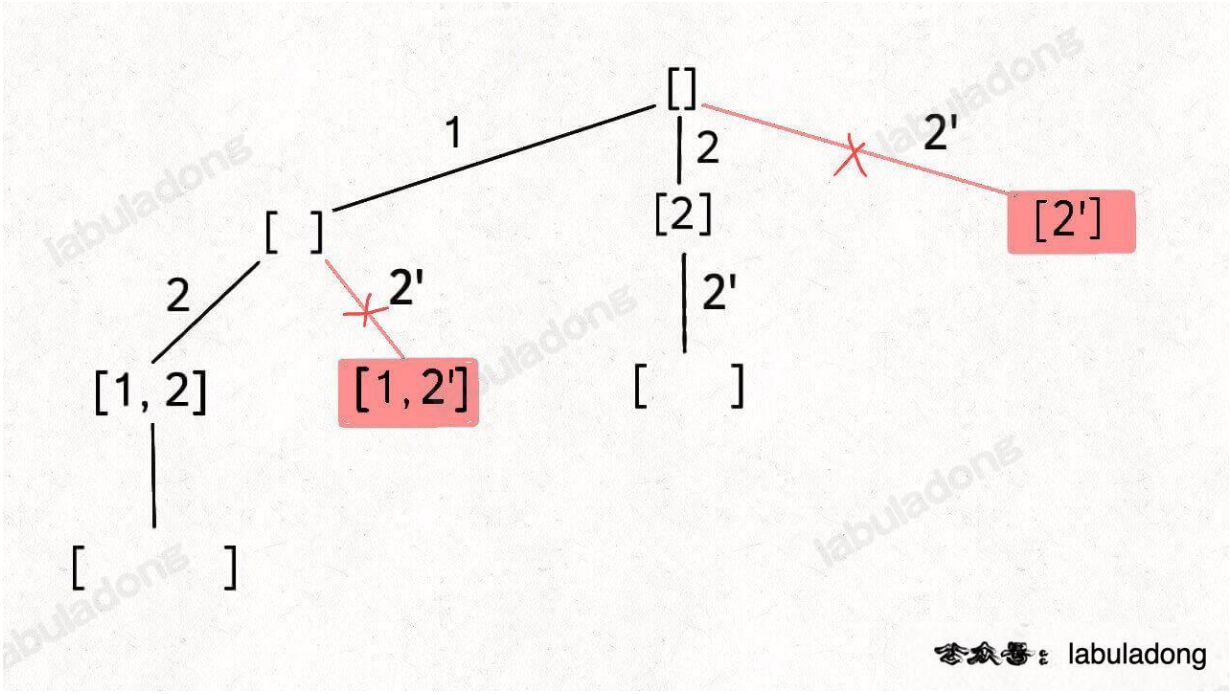
就以 `nums = [1,2,2]` 为例，为了区别两个 2 是不同元素，后面我们写作 `nums = [1,2,2']`。

按照之前的思路画出子集的树形结构，显然，两条值相同的相邻树枝会产生重复：




```
[
    [],
    [1],[2],[2'],
    [1,2],[1,2'],[2,2'],
    [1,2,2']
]
```

你可以看到，`[2]` 和 `[1,2]` 这两个结果出现了重复，所以我们需要进行剪枝，如果一个节点有多条值相同的树枝相邻，则只遍历第一条，剩下的都剪掉，不要去遍历：



体现在代码上，需要先进行排序，让相同的元素靠在一起，如果发现 `nums[i] == nums[i-1]`，则跳过：

```
class Solution {

    List<List<Integer>> res = new LinkedList<>();
    LinkedList<Integer> track = new LinkedList<>();

    public List<List<Integer>> subsetsWithDup(int[] nums) {
        // 先排序，让相同的元素靠在一起
        Arrays.sort(nums);
        backtrack(nums, 0);
        return res;
    }

    void backtrack(int[] nums, int start) {
        // 前序位置，每个节点的值都是一个子集
        res.add(new LinkedList<>(track));

        for (int i = start; i < nums.length; i++) {
            // 剪枝逻辑，值相同的相邻树枝，只遍历第一条
            if (i > start && nums[i] == nums[i - 1]) {
                continue;
            }
            track.addLast(nums[i]);
            backtrack(nums, i + 1);
            track.removeLast();
        }
    }
}
```

▶ 🍭 代码可视化动画🍭

这段代码和之前标准的子集问题的代码几乎相同，就是添加了排序和剪枝的逻辑。

至于为什么要这样剪枝，结合前面的图应该也很容易理解，这样带重复元素的子集问题也解决了。

我们说了组合问题和子集问题是等价的，所以我们直接看一道组合的题目吧，这是力扣第 40 题「组合总和 II」：

给你输入 `candidates` 和一个目标和 `target`，从 `candidates` 中找出中所有和为 `target` 的组合。

`candidates` 可能存在重复元素，且其中的每个数字最多只能使用一次。

说这是一个组合问题，其实换个问法就变成子集问题了：请你计算 `candidates` 中所有和为 `target` 的子集。

所以这题怎么做呢？

对比子集问题的解法，只要额外用一个 `trackSum` 变量记录回溯路径上的元素和，然后将 base case 改一改即可解决这道题：

```
class Solution {

    List<List<Integer>> res = new LinkedList<>();
    // 记录回溯的路径
    LinkedList<Integer> track = new LinkedList<>();
    // 记录 track 中的元素之和
    int trackSum = 0;

    public List<List<Integer>> combinationSum2(int[] candidates, int
target) {
        if (candidates.length == 0) {
            return res;
        }
        // 先排序，让相同的元素靠在一起
        Arrays.sort(candidates);
        backtrack(candidates, 0, target);
        return res;
    }

    // 回溯算法主函数
    void backtrack(int[] nums, int start, int target) {
        // base case，达到目标和，找到符合条件的组合
        if (trackSum == target) {
            res.add(new LinkedList<>(track));
            return;
        }
        // base case，超过目标和，直接结束
        if (trackSum > target) {
            return;
        }

        // 回溯算法标准框架
        for (int i = start; i < nums.length; i++) {
            // 剪枝逻辑，值相同的树枝，只遍历第一条
```

```
            if (i > start && nums[i] == nums[i - 1]) {
                continue;
            }
            // 做选择
            track.add(nums[i]);
            trackSum += nums[i];
            // 递归遍历下一层回溯树
            backtrack(nums, i + 1, target);
            // 撤销选择
            track.removeLast();
            trackSum -= nums[i];
        }
    }
}
```

▶ 🌈 代码可视化动画🌈

排列（元素可重不可复选）

排列问题的输入如果存在重复，比子集/组合问题稍微复杂一点，我们看看力扣第 47 题「全排列 II」：

给你输入一个可包含重复数字的序列 nums，请你写一个算法，返回所有可能的全排列，函数签名如下：

```
List<List<Integer>> permuteUnique(int[] nums)
```

比如输入 nums = [1,2,2]，函数返回：

```
[ [1,2,2],[2,1,2],[2,2,1] ]
```

先看解法代码：

```
class Solution {

    List<List<Integer>> res = new LinkedList<>();
    LinkedList<Integer> track = new LinkedList<>();
    boolean[] used;

    public List<List<Integer>> permuteUnique(int[] nums) {
        // 先排序，让相同的元素靠在一起
        Arrays.sort(nums);
        used = new boolean[nums.length];
        backtrack(nums);
        return res;
    }

    void backtrack(int[] nums) {
```

```
        if (track.size() == nums.length) {
            res.add(new LinkedList(track));
            return;
        }

        for (int i = 0; i < nums.length; i++) {
            if (used[i]) {
                continue;
            }
            // 新添加的剪枝逻辑，固定相同的元素在排列中的相对位置
            if (i > 0 && nums[i] == nums[i - 1] && !used[i - 1]) {
                continue;
            }
            track.add(nums[i]);
            used[i] = true;
            backtrack(nums);
            track.removeLast();
            used[i] = false;
        }
    }
}
```

▶ 👾 代码可视化动画👾

你对比一下之前的标准全排列解法代码，这段解法代码只有两处不同：

1、对 `nums` 进行了排序。

2、添加了一句额外的剪枝逻辑。

类比输入包含重复元素的子集/组合问题，你大概应该理解这么做是为了防止出现重复结果。

但是注意排列问题的剪枝逻辑，和子集/组合问题的剪枝逻辑略有不同：新增了 `!used[i - 1]` 的逻辑判断。

这个地方理解起来就需要一些技巧性了，且听我慢慢到来。为了方便研究，依然把相同的元素用上标 `'` 以示区别。

假设输入为 `nums = [1,2,2']`，标准的全排列算法会得出如下答案：

```
[
    [1,2,2'],[1,2',2],
    [2,1,2'],[2,2',1],
    [2',1,2],[2',2,1]
]
```

显然，这个结果存在重复，比如 `[1,2,2']` 和 `[1,2',2]` 应该只被算作同一个排列，但被算作了两个不同的排列。

所以现在的关键在于，如何设计剪枝逻辑，把这种重复去除掉？

答案是，保证相同元素在排列中的相对位置保持不变。

比如说 `nums = [1,2,2']` 这个例子，我保持排列中 `2` 一直在 `2'` 前面。

这样的话，你从上面 6 个排列中只能挑出 3 个排列符合这个条件：

```
[ [1,2,2'],[2,1,2'],[2,2',1] ]
```

这也就是正确答案。

进一步，如果 `nums = [1,2,2',2'']`，我只要保证重复元素 `2` 的相对位置固定，比如说 `2 -> 2' -> 2''`，也可以得到无重复的全排列结果。

仔细思考，应该很容易明白其中的原理：

标准全排列算法之所以出现重复，是因为把相同元素形成的排列序列视为不同的序列，但实际上它们应该是相同的；而如果固定相同元素形成的序列顺序，当然就避免了重复。

那么反映到代码上，你注意看这个剪枝逻辑：

```
// 新添加的剪枝逻辑，固定相同的元素在排列中的相对位置
if (i > 0 && nums[i] == nums[i - 1] && !used[i - 1]) {
    // 如果前面的相邻相等元素没有用过，则跳过
    continue;
}
// 选择 nums[i]
```

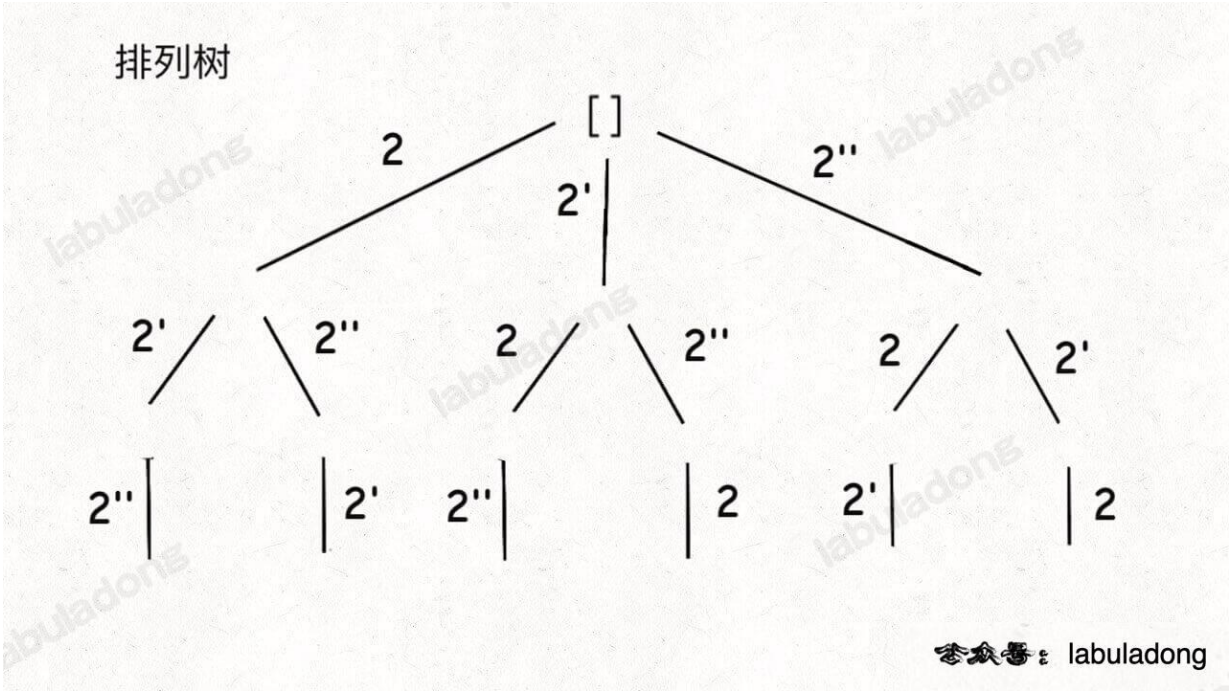
当出现重复元素时，比如输入 `nums = [1,2,2',2'']`，`2'` 只有在 `2` 已经被使用的情况下才会被选择，同理，`2''` 只有在 `2'` 已经被使用的情况下才会被选择，这就保证了相同元素在排列中的相对位置保证固定。

这里拓展一下，如果你把上述剪枝逻辑中的 `!used[i - 1]` 改成 `used[i - 1]`，其实也可以通过所有测试用例，但效率会有所下降，这是为什么呢？

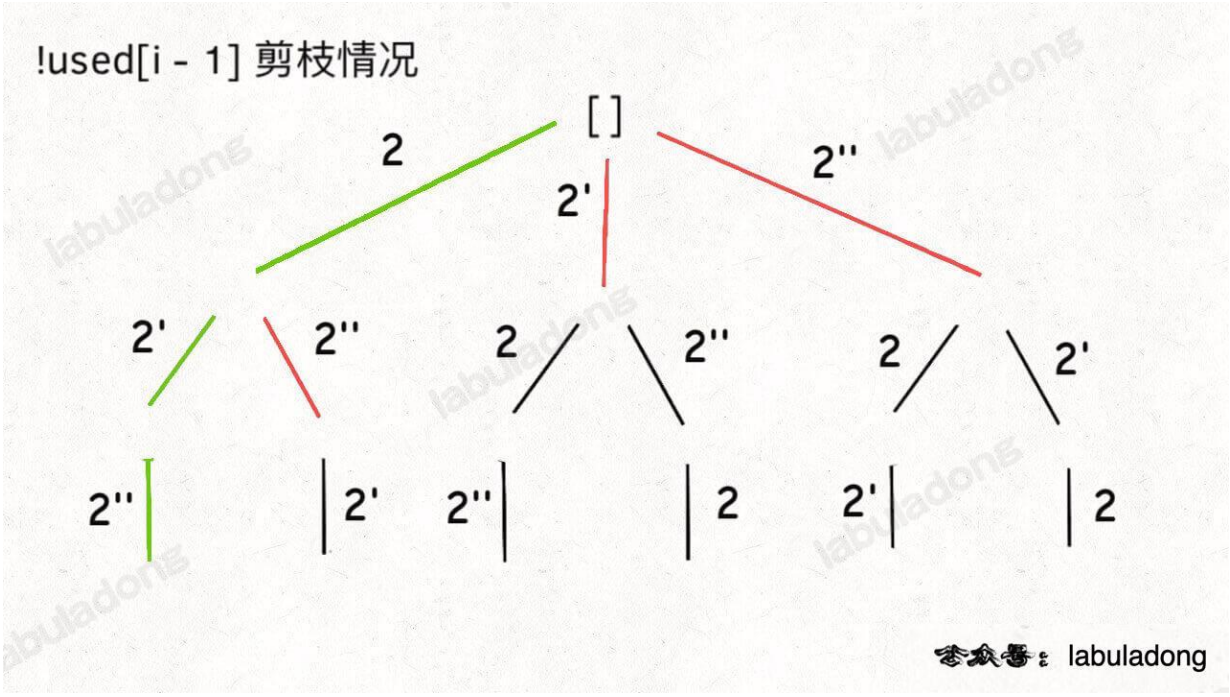
之所以这样修改不会产生错误，是因为这种写法相当于维护了 `2'' -> 2' -> 2` 的相对顺序，最终也可以实现去重的效果。

但为什么这样写效率会下降呢？因为这个写法剪掉的树枝不够多。

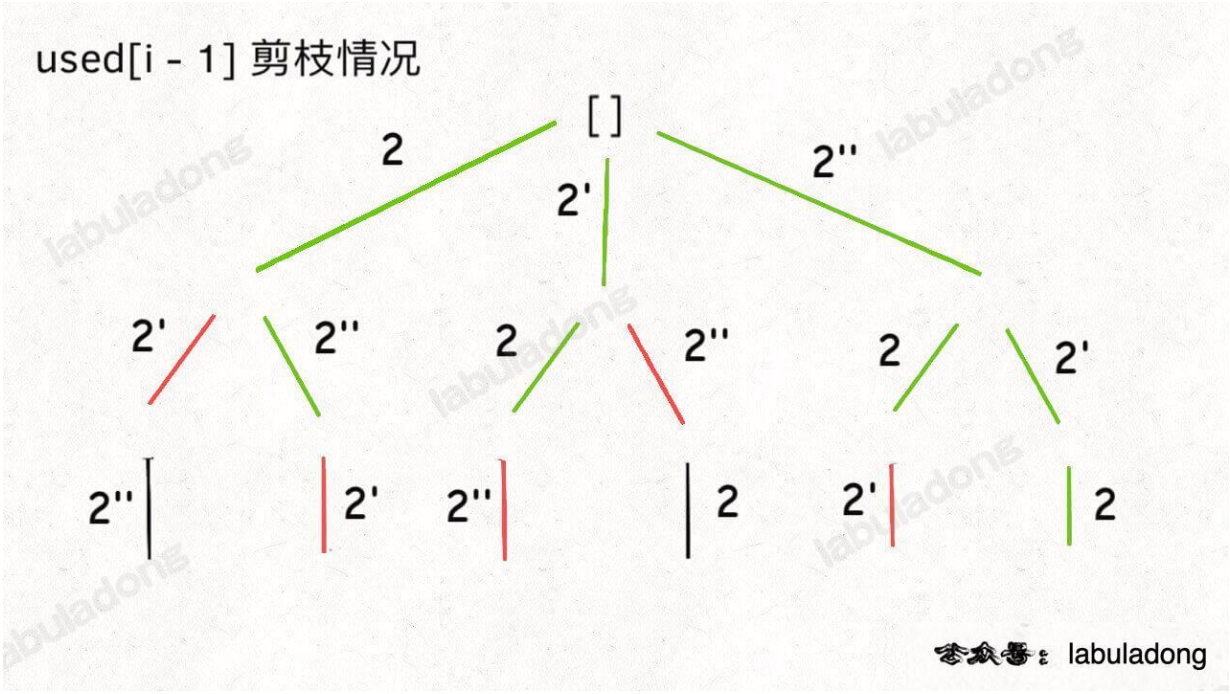
比如输入 `nums = [2,2',2'']`，产生的回溯树如下：



如果用绿色树枝代表 `backtrack` 函数遍历过的路径，红色树枝代表剪枝逻辑的触发，那么 `!used[i - 1]` 这种剪枝逻辑得到的回溯树长这样：



而 `used[i - 1]` 这种剪枝逻辑得到的回溯树如下：



可以看到，`!used[i - 1]` 这种剪枝逻辑剪得干净利落，而 `used[i - 1]` 这种剪枝逻辑虽然也能得到无重结果，但它剪掉的树枝较少，存在的无效计算较多，所以效率会差一些。

你可以使用可视化面板的「编辑」按钮自行修改代码验证一下，看看两种写法产生的回溯树有何差别：

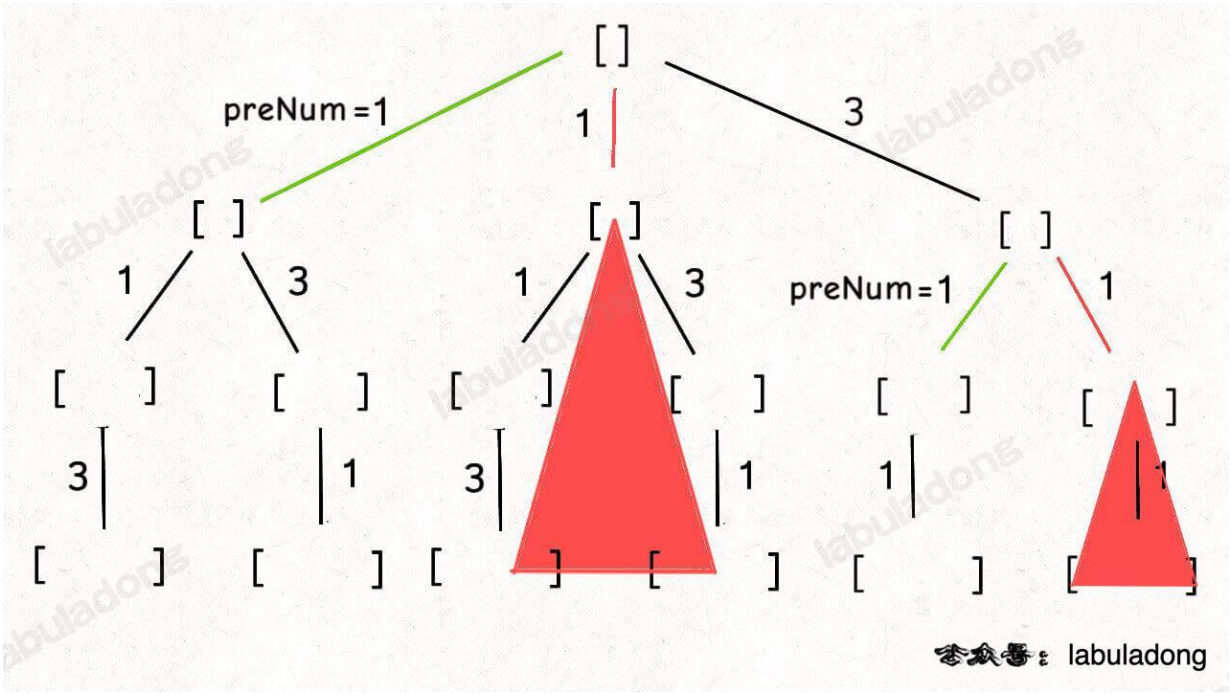
▶ 🌈 代码可视化动画🌈

当然，关于排列去重，也有读者提出别的剪枝思路：

```
void backtrack(int[] nums, LinkedList<Integer> track) {
    if (track.size() == nums.length) {
        res.add(new LinkedList(track));
        return;
    }

    // 记录之前树枝上元素的值
    // 题目说 -10 <= nums[i] <= 10，所以初始化为特殊值
    int prevNum = -666;
    for (int i = 0; i < nums.length; i++) {
        // 排除不合法的选择
        if (used[i]) {
            continue;
        }
        if (nums[i] == prevNum) {
            continue;
        }

        track.add(nums[i]);
        used[i] = true;
        // 记录这条树枝上的值
        prevNum = nums[i];
```

```
            backtrack(nums, track);

            track.removeLast();
            used[i] = false;
        }
    }
```

这个思路也是对的，设想一个节点出现了相同的树枝：


[]
preNum=1
1
3
[ ]
1
3
[ ]
[ ]
3
1
[ ]
[ ]
[ ]

```
[ [1,1,1],[1,2],[3] ]
```

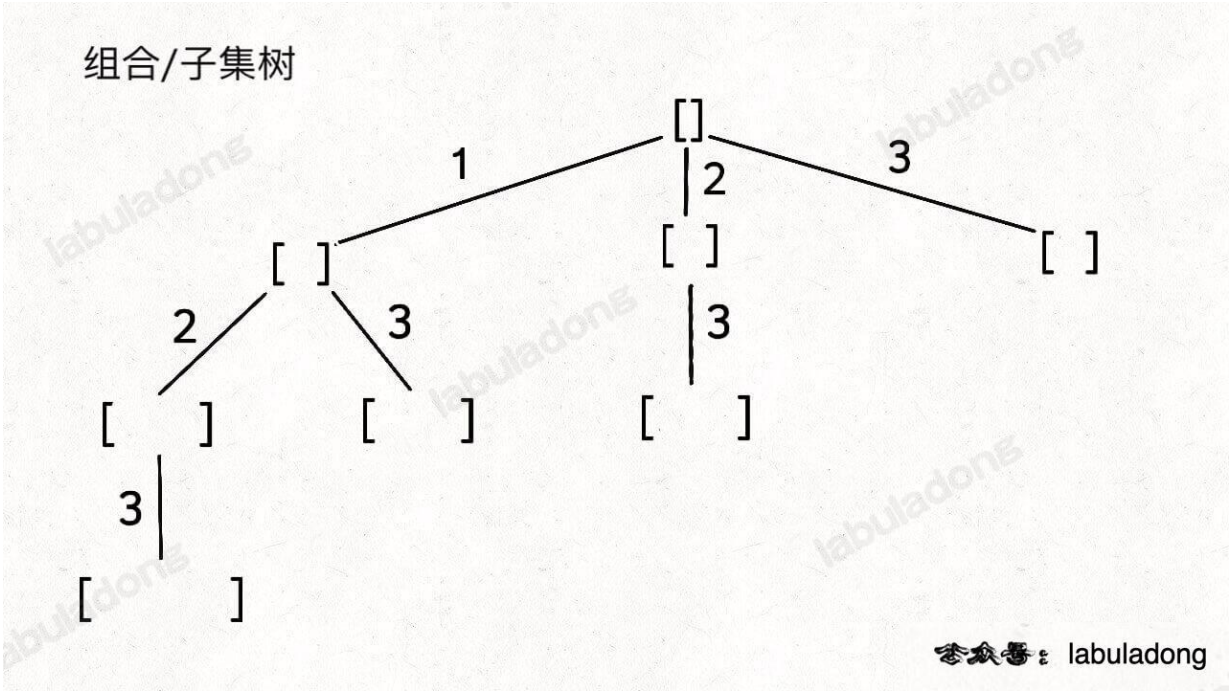
这道题说是组合问题，实际上也是子集问题：`candidates` 的哪些子集的和为 `target`？

想解决这种类型的问题，也得回到回溯树上，**我们不妨先思考思考，标准的子集/组合问题是如何保证不重复使用元素的**？

答案在于 `backtrack` 递归时输入的参数 `start`：

```
// 无重组合的回溯算法框架
void backtrack(int[] nums, int start) {
    for (int i = start; i < nums.length; i++) {
        // ...
        // 递归遍历下一层回溯树，注意参数
        backtrack(nums, i + 1);
        // ...
    }
}
```

这个 `i` 从 `start` 开始，那么下一层回溯树就是从 `start + 1` 开始，从而保证 `nums[start]` 这个元素不会被重复使用：

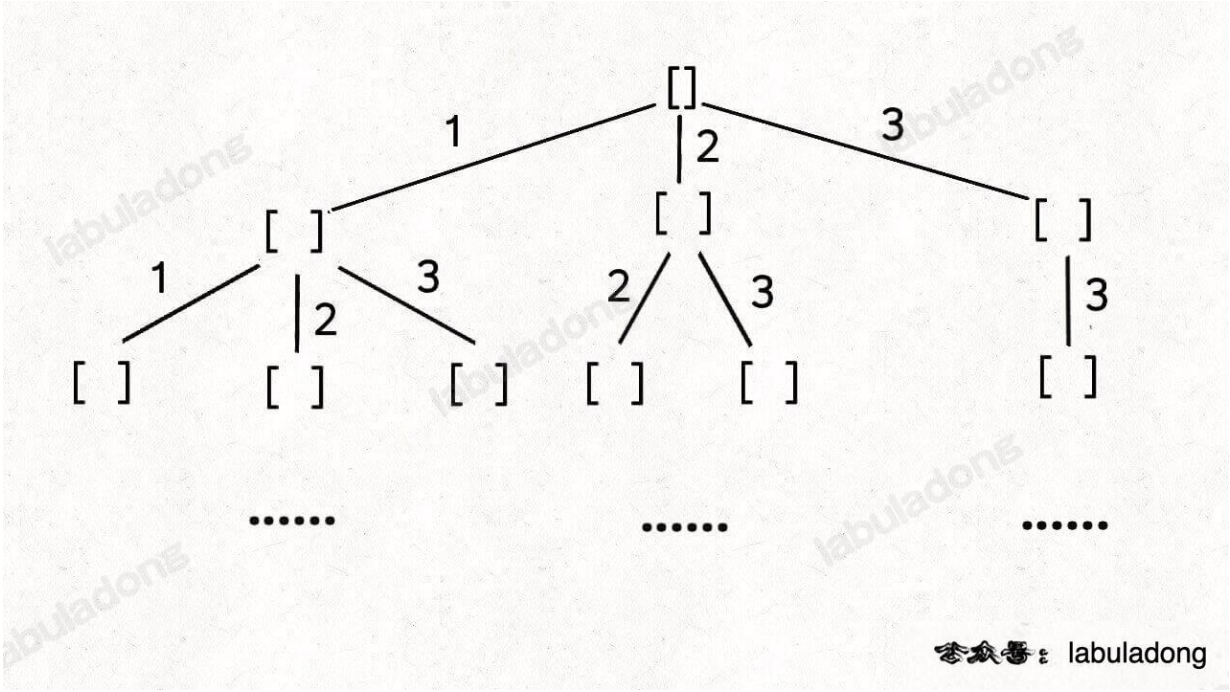


那么反过来，如果我想让每个元素被重复使用，我只要把 `i + 1` 改成 `i` 即可：

```
// 可重组合的回溯算法框架
void backtrack(int[] nums, int start) {
    for (int i = start; i < nums.length; i++) {
        // ...
        // 递归遍历下一层回溯树，注意参数
```

```
            backtrack(nums, i);
            // ...
        }
    }
```

这相当于给之前的回溯树添加了一条树枝，在遍历这棵树的过程中，一个元素可以被无限次使用：



当然，这样这棵回溯树会永远生长下去，所以我们的递归函数需要设置合适的 base case 以结束算法，即路径和大于 `target` 时就没必要再遍历下去了。

这道题的解法代码如下：

```
class Solution {

    List<List<Integer>> res = new LinkedList<>();
    // 记录回溯的路径
    LinkedList<Integer> track = new LinkedList<>();
    // 记录 track 中的路径和
    int trackSum = 0;

    public List<List<Integer>> combinationSum(int[] candidates, int
target) {
        if (candidates.length == 0) {
            return res;
        }
        backtrack(candidates, 0, target);
        return res;
    }

    // 回溯算法主函数
    void backtrack(int[] nums, int start, int target) {
        // base case，找到目标和，记录结果
```

```
        if (trackSum == target) {
            res.add(new LinkedList<>(track));
            return;
        }
        // base case，超过目标和，停止向下遍历
        if (trackSum > target) {
            return;
        }

        // 回溯算法标准框架
        for (int i = start; i < nums.length; i++) {
            // 选择 nums[i]
            trackSum += nums[i];
            track.add(nums[i]);
            // 递归遍历下一层回溯树
            // 同一元素可重复使用，注意参数
            backtrack(nums, i, target);
            // 撤销选择 nums[i]
            trackSum -= nums[i];
            track.removeLast();
        }
    }
}
```

▶ 🍭 代码可视化动画🍭

排列（元素无重可复选）

力扣上没有类似的题目，我们不妨先想一下，`nums` 数组中的元素无重复且可复选的情况下，会有哪些排列？

比如输入 `nums = [1,2,3]`，那么这种条件下的全排列共有 3^3 = 27 种：

```
[
  [1,1,1],[1,1,2],[1,1,3],[1,2,1],[1,2,2],[1,2,3],[1,3,1],[1,3,2],[1,3,3],
  [2,1,1],[2,1,2],[2,1,3],[2,2,1],[2,2,2],[2,2,3],[2,3,1],[2,3,2],[2,3,3],
  [3,1,1],[3,1,2],[3,1,3],[3,2,1],[3,2,2],[3,2,3],[3,3,1],[3,3,2],[3,3,3]
]
```

标准的全排列算法利用 `used` 数组进行剪枝，避免重复使用同一个元素。如果允许重复使用元素的话，直接放飞自我，去除所有 `used` 数组的剪枝逻辑就行了。

那这个问题就简单了，代码如下：

```
class Solution {

    List<List<Integer>> res = new LinkedList<>();
    LinkedList<Integer> track = new LinkedList<>();
```

```
    public List<List<Integer>> permuteRepeat(int[] nums) {
        backtrack(nums);
        return res;
    }

    // 回溯算法核心函数
    void backtrack(int[] nums) {
        // base case，到达叶子节点
        if (track.size() == nums.length) {
            // 收集叶子节点上的值
            res.add(new LinkedList(track));
            return;
        }

        // 回溯算法标准框架
        for (int i = 0; i < nums.length; i++) {
            // 做选择
            track.add(nums[i]);
            // 进入下一层回溯树
            backtrack(nums);
            // 取消选择
            track.removeLast();
        }
    }
}
```

至此，排列/组合/子集问题的九种变化就都讲完了。

最后总结

来回顾一下排列/组合/子集问题的三种形式在代码上的区别。

由于子集问题和组合问题本质上是一样的，无非就是 base case 有一些区别，所以把这两个问题放在一起看。

形式一、元素无重不可复选，即 `nums` 中的元素都是唯一的，每个元素最多只能被使用一次，`backtrack` 核心代码如下：

```
/* 组合/子集问题回溯算法框架 */
void backtrack(int[] nums, int start) {
    // 回溯算法标准框架
    for (int i = start; i < nums.length; i++) {
        // 做选择
        track.addLast(nums[i]);
        // 注意参数
        backtrack(nums, i + 1);
        // 撤销选择
        track.removeLast();
    }
}
```

```
/* 排列问题回溯算法框架 */
void backtrack(int[] nums) {
    for (int i = 0; i < nums.length; i++) {
        // 剪枝逻辑
        if (used[i]) {
            continue;
        }
        // 做选择
        used[i] = true;
        track.addLast(nums[i]);

        backtrack(nums);
        // 撤销选择
        track.removeLast();
        used[i] = false;
    }
}
```

形式二、元素可重不可复选，即 nums 中的元素可以存在重复，每个元素最多只能被使用一次，其关键在于排序和剪枝，backtrack 核心代码如下：

```
Arrays.sort(nums);
/* 组合/子集问题回溯算法框架 */
void backtrack(int[] nums, int start) {
    // 回溯算法标准框架
    for (int i = start; i < nums.length; i++) {
        // 剪枝逻辑，跳过值相同的相邻树枝
        if (i > start && nums[i] == nums[i - 1]) {
            continue;
        }
        // 做选择
        track.addLast(nums[i]);
        // 注意参数
        backtrack(nums, i + 1);
        // 撤销选择
        track.removeLast();
    }
}


Arrays.sort(nums);
/* 排列问题回溯算法框架 */
void backtrack(int[] nums) {
    for (int i = 0; i < nums.length; i++) {
        // 剪枝逻辑
        if (used[i]) {
            continue;
        }
        // 剪枝逻辑，固定相同的元素在排列中的相对位置
        if (i > 0 && nums[i] == nums[i - 1] && !used[i - 1]) {
            continue;
```

```
            }
            // 做选择
            used[i] = true;
            track.addLast(nums[i]);

            backtrack(nums);
            // 撤销选择
            track.removeLast();
            used[i] = false;
        }
    }
```

形式三、元素无重可复选，即 `nums` 中的元素都是唯一的，每个元素可以被使用若干次，只要删掉去重逻辑即可，`backtrack` 核心代码如下：

```
/* 组合/子集问题回溯算法框架 */
void backtrack(int[] nums, int start) {
    // 回溯算法标准框架
    for (int i = start; i < nums.length; i++) {
        // 做选择
        track.addLast(nums[i]);
        // 注意参数
        backtrack(nums, i);
        // 撤销选择
        track.removeLast();
    }
}


/* 排列问题回溯算法框架 */
void backtrack(int[] nums) {
    for (int i = 0; i < nums.length; i++) {
        // 做选择
        track.addLast(nums[i]);
        backtrack(nums);
        // 撤销选择
        track.removeLast();
    }
}
```

只要从树的角度思考，这些问题看似复杂多变，实则改改 base case 就能解决，这也是为什么我在 学习算法和数据结构的框架思维 和 手把手刷二叉树（纲领篇） 中强调树类型题目重要性的原因。

如果你能够看到这里，真得给你鼓掌，相信你以后遇到各种乱七八糟的算法题，也能一眼看透它们的本质，以不变应万变。另外，考虑到篇幅，本文并没有对这些算法进行复杂度的分析，你可以使用我在 算法时空复杂度分析实用指南 讲到的复杂度分析方法尝试自己分析它们的复杂度。

如果你有高质量的问题，可以 点击这里 进入本文的讨论区。

▶ 引用本文的题目

安装 我的 Chrome 刷题插件 点开下列题目可直接查看解题思路：

LeetCode	力扣
131. Palindrome Partitioning	131. 分割回文串
17. Letter Combinations of a Phone Number	17. 电话号码的字母组合
254. Factor Combinations🔒	254. 因子的组合🔒
267. Palindrome Permutation II🔒	267. 回文排列 II🔒
368. Largest Divisible Subset	368. 最大整除子集
491. Non-decreasing Subsequences	491. 递增子序列
638. Shopping Offers	638. 大礼包
-	剑指 Offer 38. 字符串的排列
-	剑指 Offer II 079. 所有子集
-	剑指 Offer II 080. 含有 k 个元素的组合
-	剑指 Offer II 081. 允许重复选择元素的组合
-	剑指 Offer II 083. 没有重复元素集合的全排列

▶ 引用本文的文章

- 东哥带你刷二叉树（纲领篇）
- 分治算法详解：运算优先级
- 动态规划和回溯算法的思维转换
- 回溯算法解题套路框架
- 我的刷题心得：算法的本质
- 球盒模型：回溯算法穷举的两种视角
- 算法时空复杂度分析实用指南

————————————————

更多精品课程可查看 我的网站；扫码查看更多配套学习套件：

算法学习网站：https://labuladong.gitee.io/algo/ 或 https://labuladong.github.io/algo/

二维码太多，长按识别不到？放大图片 -> 让对应二维码充满屏幕 -> 长按识别该二维码

球盒模型：回溯算法的两种穷举视角

Stars 123k 精品课程 查看 知乎 @labuladong B站 @labuladong

学算法认准 labuladong，致力于把算法讲清楚！网页版 点这里。

读完本文，你不仅学会了算法套路，还可以顺便解决如下题目：

LeetCode	力扣	难度
698. Partition to K Equal Sum Subsets	698. 划分为k个相等的子集	🟠

> 阅读本文之前，请确保你阅读过 球盒模型：回溯算法的两种穷举视角。这道题可以进一步说明，以球和盒的不同视角所写出的代码效率是不同的，我们需要择优选择。

我之前说过回溯算法是笔试中最好用的算法，只要你没什么思路，就用回溯算法暴力求解，即便不能通过所有测试用例，多少能过一点。回溯算法的技巧也不算难，就是穷举一棵决策树的过程，只要在递归之前「做选择」，在递归之后「撤销选择」就行了。

但是，就算暴力穷举，不同的思路也有优劣之分。本文就来看一道非常经典的回溯算法问题，力扣第 698 题「划分为k个相等的子集」。这道题可以帮你更深刻理解回溯算法的思维，得心应手地写出回溯函数。

题目非常简单：

给你输入一个数组 `nums` 和一个正整数 `k`，请你判断 `nums` 是否能够被平分为元素和相同的 `k` 个子集。

函数签名如下：

```
boolean canPartitionKSubsets(int[] nums, int k);
```

> 我们之前 背包问题之子集划分 写过一次子集划分问题，不过那道题只需要我们把集合划分成两个相等的集合，可以转化成背包问题用动态规划技巧解决。
>
> 为什么划分成两个相等的子集可以转化成背包问题用动态规划思路解决，而划分成 `k` 个相等的子集就不可以转化成背包问题，只能用回溯算法暴力穷举？请先尝试自己思考，我会在文末给出答案。

题目思路

回到正题，这道算法题让我们求子集划分，子集问题和排列组合问题有所区别，但我们可以借鉴「球盒模型」的抽象，用两种不同的视角来解决这道子集划分问题。

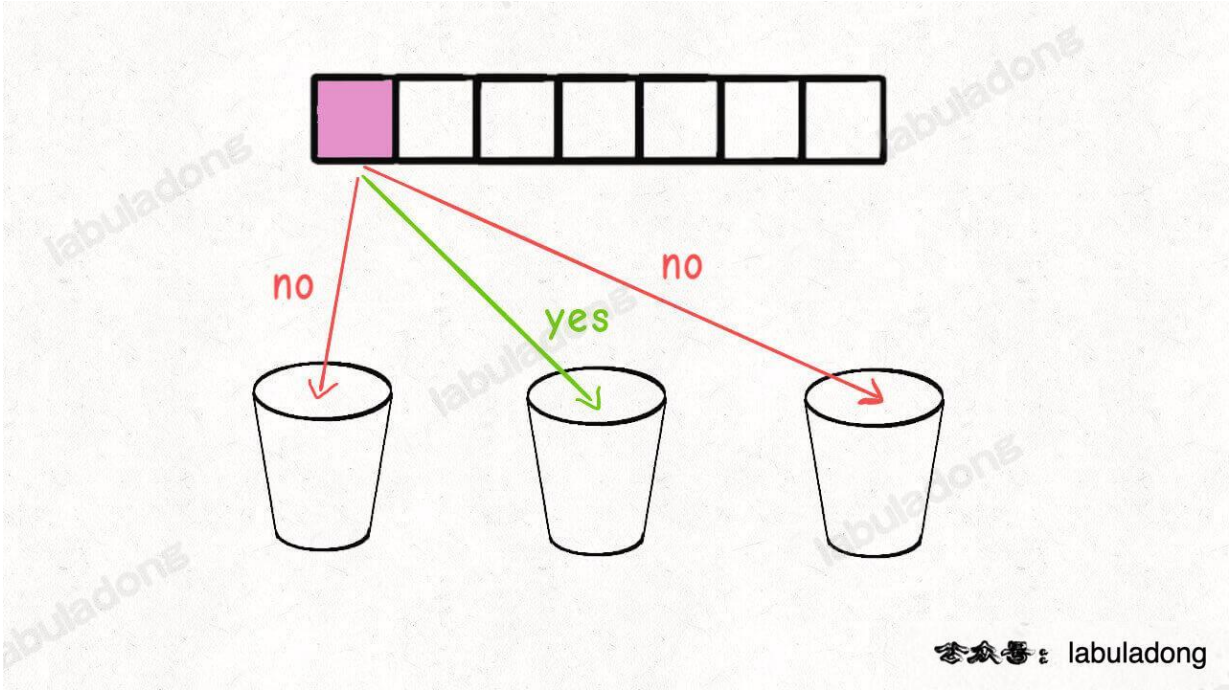
把装有 n 个数字的数组 nums 分成 k 个和相同的集合，你可以想象将 n 个数字分配到 k 个「桶」里，最后这 k 个「桶」里的数字之和要相同。

前文 回溯算法框架套路 说过，回溯算法的关键在哪里？

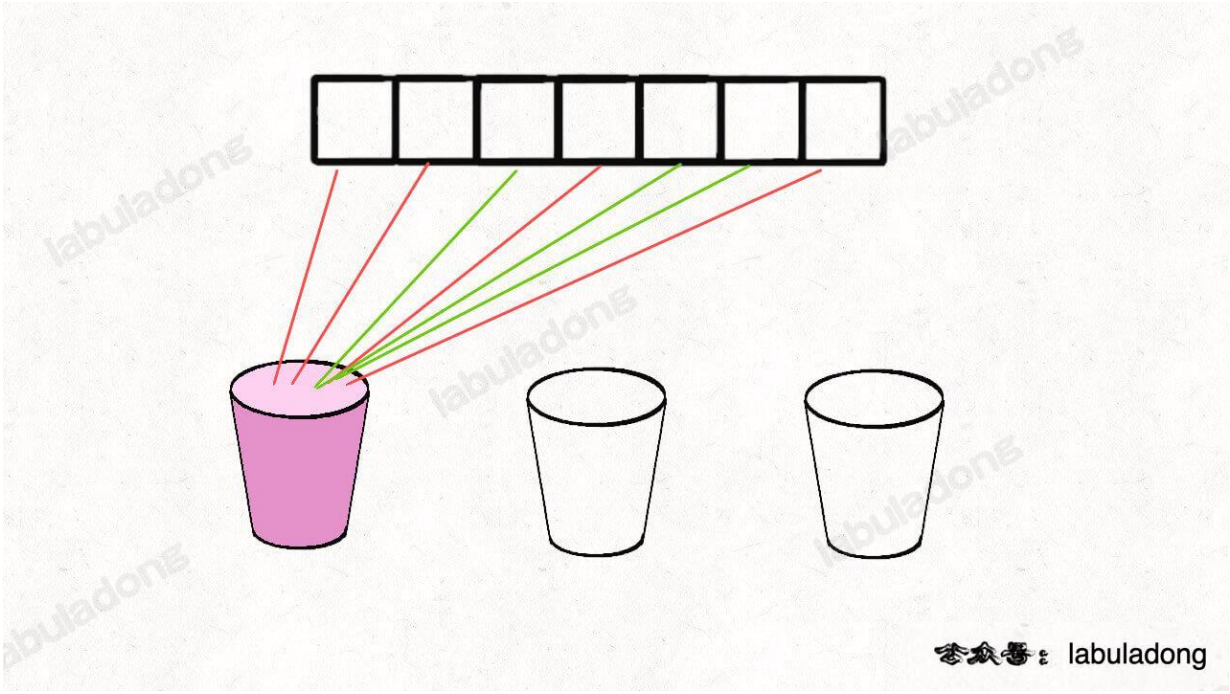
关键是要知道怎么「做选择」，这样才能利用递归函数进行穷举。

那么模仿排列公式的推导思路，将 n 个数字分配到 k 个桶里，我们也可以有两种视角：

视角一，如果我们切换到这 n 个数字的视角，每个数字都要选择进入到 k 个桶中的某一个。



视角二，如果我们切换到这 k 个桶的视角，对于每个桶，都要遍历 nums 中的 n 个数字，然后选择是否将当前遍历到的数字装进自己这个桶里。



你可能问，这两种视角有什么不同？

和前面讲的排列子集类似，用不同的视角进行穷举，虽然结果相同，但是解法代码的逻辑不同，具体的代码实现也不同，可能产生不同的时间、空间复杂度。我们需要选择复杂度更低的解法。

以数字的视角

用 for 循环迭代遍历 `nums` 数组大家肯定都会：

```
for (int index = 0; index < nums.length; index++) {
    System.out.println(nums[index]);
}
```

递归遍历数组你会不会？其实也很简单：

```
void traverse(int[] nums, int index) {
    if (index == nums.length) {
        return;
    }
    System.out.println(nums[index]);
    traverse(nums, index + 1);
}
```

只要调用 `traverse(nums, 0)`，和 for 循环的效果是完全一样的。

那么回到这道题，以数字的视角，选择 `k` 个桶，用 for 循环写出来是下面这样：

```
// k 个桶（集合），记录每个桶装的数字之和
int[] bucket = new int[k];
```

```
// 穷举 nums 中的每个数字
for (int index = 0; index < nums.length; index++) {
    // 穷举每个桶
    for (int i = 0; i < k; i++) {
        // nums[index] 选择是否要进入第 i 个桶
        // ...
    }
}
```

如果改成递归的形式，就是下面这段代码逻辑：

```
// k 个桶（集合），记录每个桶装的数字之和
int[] bucket = new int[k];

// 穷举 nums 中的每个数字
void backtrack(int[] nums, int index) {
    // base case
    if (index == nums.length) {
        return;
    }
    // 穷举每个桶
    for (int i = 0; i < bucket.length; i++) {
        // 选择装进第 i 个桶
        bucket[i] += nums[index];
        // 递归穷举下一个数字的选择
        backtrack(nums, index + 1);
        // 撤销选择
        bucket[i] -= nums[index];
    }
}
```

虽然上述代码仅仅是穷举逻辑，还不能解决我们的问题，但是只要略加完善即可：

```
// 主函数
boolean canPartitionKSubsets(int[] nums, int k) {
    // 排除一些基本情况
    if (k > nums.length) return false;
    int sum = 0;
    for (int v : nums) sum += v;
    if (sum % k != 0) return false;

    // k 个桶（集合），记录每个桶装的数字之和
    int[] bucket = new int[k];
    // 理论上每个桶（集合）中数字的和
    int target = sum / k;
    // 穷举，看看 nums 是否能划分成 k 个和为 target 的子集
    return backtrack(nums, 0, bucket, target);
}
```

```
// 递归穷举 nums 中的每个数字
boolean backtrack(
    int[] nums, int index, int[] bucket, int target) {

    if (index == nums.length) {
        // 检查所有桶的数字之和是否都是 target
        for (int i = 0; i < bucket.length; i++) {
            if (bucket[i] != target) {
                return false;
            }
        }
        // nums 成功平分成 k 个子集
        return true;
    }

    // 穷举 nums[index] 可能装入的桶
    for (int i = 0; i < bucket.length; i++) {
        // 剪枝，桶装装满了
        if (bucket[i] + nums[index] > target) {
            continue;
        }
        // 将 nums[index] 装入 bucket[i]
        bucket[i] += nums[index];
        // 递归穷举下一个数字的选择
        if (backtrack(nums, index + 1, bucket, target)) {
            return true;
        }
        // 撤销选择
        bucket[i] -= nums[index];
    }

    // nums[index] 装入哪个桶都不行
    return false;
}
```

有之前的铺垫，相信这段代码是比较容易理解的，其实我们可以再做一个优化。

主要看 `backtrack` 函数的递归部分：

```
for (int i = 0; i < bucket.length; i++) {
    // 剪枝
    if (bucket[i] + nums[index] > target) {
        continue;
    }

    if (backtrack(nums, index + 1, bucket, target)) {
        return true;
    }
}
```

如果我们让尽可能多的情况命中剪枝的那个 if 分支，就可以减少递归调用的次数，一定程度上减少时间复杂度。

如何尽可能多的命中这个 if 分支呢？要知道我们的 `index` 参数是从 0 开始递增的，也就是递归地从 0 开始遍历 `nums` 数组。

如果我们提前对 `nums` 数组排序，把大的数字排在前面，那么大的数字会先被分配到 `bucket` 中，对于之后的数字，`bucket[i] + nums[index]` 会更大，更容易触发剪枝的 if 条件。

所以可以在之前的代码中再添加一些代码：

```
boolean canPartitionKSubsets(int[] nums, int k) {
    // 其他代码不变
    // ...
    /* 降序排序 nums 数组 */
    Arrays.sort(nums);
    for (i = 0, j = nums.length - 1; i < j; i++, j--) {
        // 交换 nums[i] 和 nums[j]
        int temp = nums[i];
        nums[i] = nums[j];
        nums[j] = temp;
    }
    /********************/
    return backtrack(nums, 0, bucket, target);
}
```

由于 Java 的语言特性，这段代码通过先升序排序再反转，达到降序排列的目的。

这个解法可以得到正确答案，但耗时比较多，已经无法通过所有测试用例了，接下来看看另一种视角的解法。

以桶的视角

文章开头说了，**以桶的视角进行穷举，每个桶需要遍历 `nums` 中的所有数字，决定是否把当前数字装进桶中；当装满一个桶之后，还要装下一个桶，直到所有桶都装满为止**。

这个思路可以用下面这段代码表示出来：

```
// 装满所有桶为止
while (k > 0) {
    // 记录当前桶中的数字之和
    int bucket = 0;
    for (int i = 0; i < nums.length; i++) {
        // 决定是否将 nums[i] 放入当前桶中
        if (canAdd(bucket, num[i])) {
            bucket += nums[i];
        }
        if (bucket == target) {
            // 装满了一个桶，装下一个桶
            k--;
```

```
                break;
            }
        }
    }
```

那么我们也可以把这个 while 循环改写成递归函数，不过比刚才略微复杂一些，首先写一个 backtrack 递归函数出来：

```
boolean backtrack(int k, int bucket,
    int[] nums, int start, boolean[] used, int target);
```

不要被这么多参数吓到，我会一个个解释这些参数。**如果你能够透彻理解本文，也能得心应手地写出这样的回溯函数**。

这个 backtrack 函数的参数可以这样解释：

现在 k 号桶正在思考是否应该把 nums[start] 这个元素装进来；目前 k 号桶里面已经装的数字之和为 bucket；used 标志某一个元素是否已经被装到桶中；target 是每个桶需要达成的目标和。

根据这个函数定义，可以这样调用 backtrack 函数：

```
boolean canPartitionKSubsets(int[] nums, int k) {
    // 排除一些基本情况
    if (k > nums.length) return false;
    int sum = 0;
    for (int v : nums) sum += v;
    if (sum % k != 0) return false;

    boolean[] used = new boolean[nums.length];
    int target = sum / k;
    // k 号桶初始什么都没装，从 nums[0] 开始做选择
    return backtrack(k, 0, nums, 0, used, target);
}
```

实现 backtrack 函数的逻辑之前，再重复一遍，从桶的视角：

1、需要遍历 nums 中所有数字，决定哪些数字需要装到当前桶中。

2、如果当前桶装满了（桶内数字和达到 target），则让下一个桶开始执行第 1 步。

下面的代码就实现了这个逻辑：

```
boolean backtrack(int k, int bucket,
    int[] nums, int start, boolean[] used, int target) {
    // base case
    if (k == 0) {
        // 所有桶都被装满了，而且 nums 一定全部用完了
```

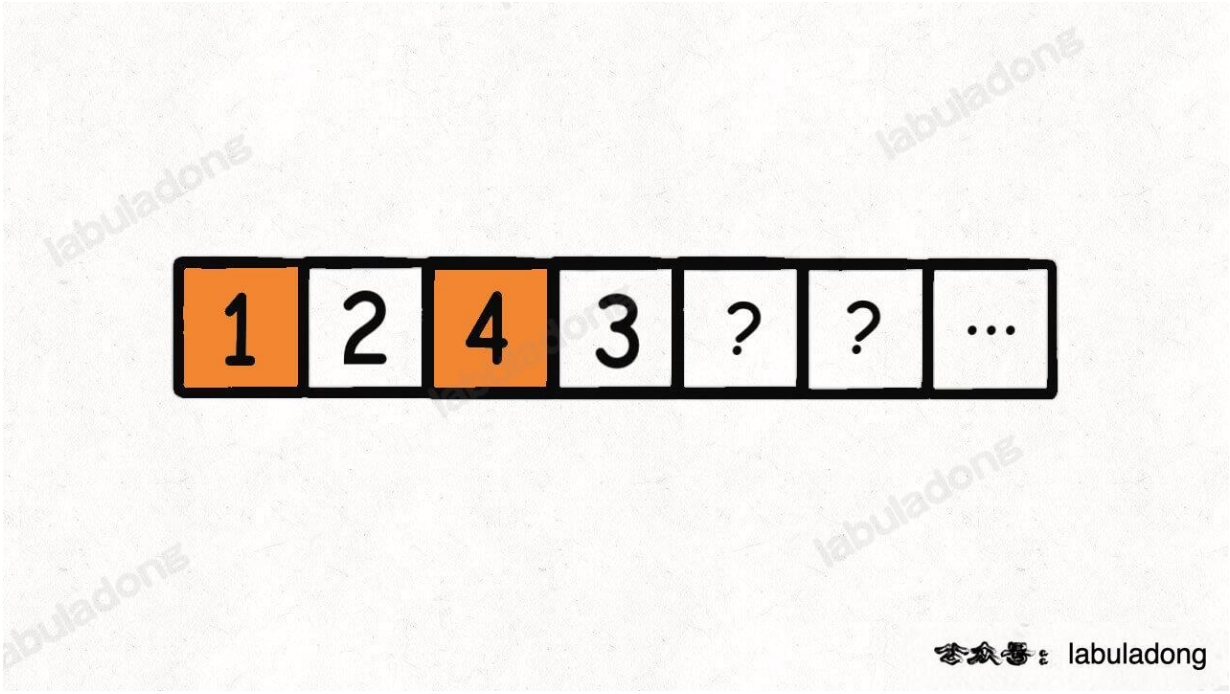
```
            // 因为 target == sum / k
            return true;
        }
        if (bucket == target) {
            // 装满了当前桶，递归穷举下一个桶的选择
            // 让下一个桶从 nums[0] 开始选数字
            return backtrack(k - 1, 0 ,nums, 0, used, target);
        }

        // 从 start 开始向后探查有效的 nums[i] 装入当前桶
        for (int i = start; i < nums.length; i++) {
            // 剪枝
            if (used[i]) {
                // nums[i] 已经被装入别的桶中
                continue;
            }
            if (nums[i] + bucket > target) {
                // 当前桶装不下 nums[i]
                continue;
            }
            // 做选择，将 nums[i] 装入当前桶中
            used[i] = true;
            bucket += nums[i];
            // 递归穷举下一个数字是否装入当前桶
            if (backtrack(k, bucket, nums, i + 1, used, target)) {
                return true;
            }
            // 撤销选择
            used[i] = false;
            bucket -= nums[i];
        }
        // 穷举了所有数字，都无法装满当前桶
        return false;
    }
```

这段代码是可以得出正确答案的，但是效率很低，我们可以思考一下是否还有优化的空间。

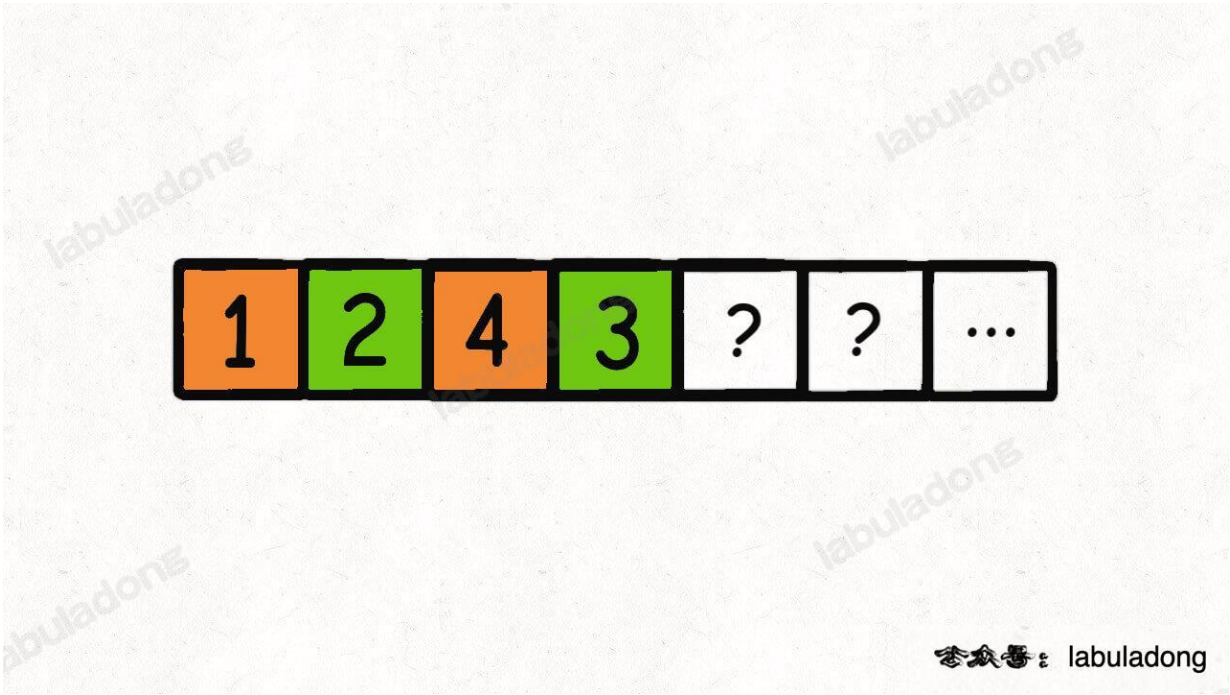
首先，在这个解法中每个桶都可以认为是没有差异的，但是我们的回溯算法却会对它们区别对待，这里就会出现重复计算的情况。

什么意思呢？我们的回溯算法，说到底就是穷举所有可能的组合，然后看是否能找出和为 `target` 的 `k` 个桶（子集）。

那么，比如下面这种情况，`target = 5`，算法会在第一个桶里面装 `1, 4`：



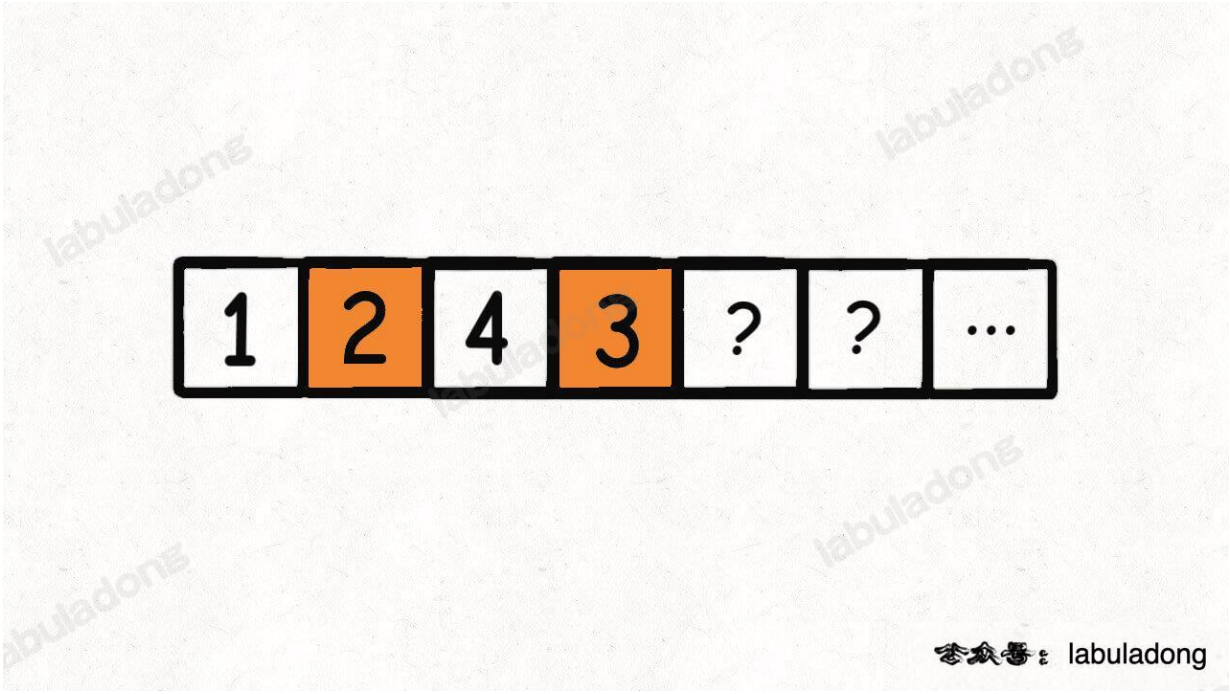
现在第一个桶装满了，就开始装第二个桶，算法会装入 `2, 3`：



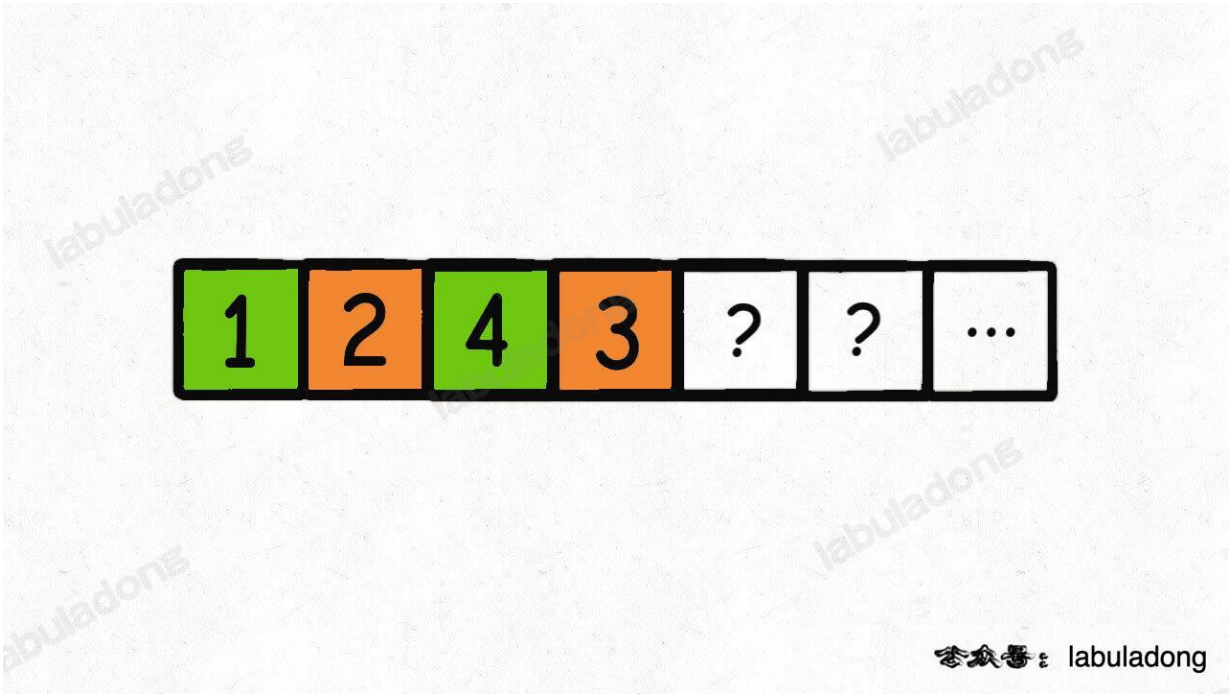
然后以此类推，对后面的元素进行穷举，凑出若干个和为 5 的桶（子集）。

但问题是，如果最后发现无法凑出和为 `target` 的 `k` 个子集，算法会怎么做？

回溯算法会回溯到第一个桶，重新开始穷举，现在它知道第一个桶里装 `1, 4` 是不可行的，它会尝试把 `2, 3` 装到第一个桶里：



现在第一个桶装满了，就开始装第二个桶，算法会装入 `1, 4`：



好，到这里你应该看出来问题了，这种情况其实和之前的那种情况是一样的。也就是说，到这里你其实已经知道不需要再穷举了，必然凑不出来和为 `target` 的 `k` 个子集。

但我们的算法还是会傻乎乎地继续穷举，因为在她看来，第一个桶和第二个桶里面装的元素不一样，那这就是两种不一样的情况呀。

那么我们怎么让算法的智商提高，识别出这种情况，避免冗余计算呢？

你注意这两种情况的 `used` 数组肯定长得一样，所以 `used` 数组可以认为是回溯过程中的「状态」。

所以，我们可以用一个 `memo` 备忘录，在装满一个桶时记录当前 `used` 的状态，如果当前 `used` 的状态是曾经出现过的，那就不用再继续穷举，从而起到剪枝避免冗余计算的作用。

有读者肯定会问，used 是一个布尔数组，怎么作为键进行存储呢？这其实是小问题，比如我们可以把数组转化成字符串，这样就可以作为哈希表的键进行存储了。

看下代码实现，只要稍微改一下 backtrack 函数即可：

```
// 备忘录，存储 used 数组的状态
HashMap<String, Boolean> memo = new HashMap<>();

boolean backtrack(int k, int bucket, int[] nums, int start, boolean[]
used, int target) {
    // base case
    if (k == 0) {
        return true;
    }
    // 将 used 的状态转化成形如 [true, false, ...] 的字符串
    // 便于存入 HashMap
    String state = Arrays.toString(used);

    if (bucket == target) {
        // 装满了当前桶，递归穷举下一个桶的选择
        boolean res = backtrack(k - 1, 0, nums, 0, used, target);
        // 将当前状态和结果存入备忘录
        memo.put(state, res);
        return res;
    }

    if (memo.containsKey(state)) {
        // 如果当前状态曾今计算过，就直接返回，不要再递归穷举了
        return memo.get(state);
    }

    // 其他逻辑不变...
}
```

这样提交解法，发现执行效率依然比较低，这次不是因为算法逻辑上的冗余计算，而是代码实现上的问题。

因为每次递归都要把 used 数组转化成字符串，这对于编程语言来说也是一个不小的消耗，所以我们还可以进一步优化。

注意题目给的数据规模 nums.length <= 16，也就是说 used 数组最多也不会超过 16，那么我们完全可以用「位图」的技巧，用一个 int 类型的 used 变量来替代 used 数组。

具体来说，我们可以用整数 used 的第 i 位（(used >> i) & 1）的 1/0 来表示 used[i] 的 true/false。

这样一来，不仅节约了空间，而且整数 used 也可以直接作为键存入 HashMap，省去数组转字符串的消耗。

看下最终的解法代码：

```
class Solution {
    public boolean canPartitionKSubsets(int[] nums, int k) {
        // 排除一些基本情况
```

```
        if (k > nums.length) return false;
        int sum = 0;
        for (int v : nums) sum += v;
        if (sum % k != 0) return false;

        int used = 0; // 使用位图技巧
        int target = sum / k;
        // k 号桶初始什么都没装，从 nums[0] 开始做选择
        return backtrack(k, 0, nums, 0, used, target);
    }

    HashMap<Integer, Boolean> memo = new HashMap<>();

    boolean backtrack(int k, int bucket,
                      int[] nums, int start, int used, int target) {
        // base case
        if (k == 0) {
            // 所有桶都被装满了，而且 nums 一定全部用完了
            return true;
        }
        if (bucket == target) {
            // 装满了当前桶，递归穷举下一个桶的选择
            // 让下一个桶从 nums[0] 开始选数字
            boolean res = backtrack(k - 1, 0, nums, 0, used, target);
            // 缓存结果
            memo.put(used, res);
            return res;
        }

        if (memo.containsKey(used)) {
            // 避免冗余计算
            return memo.get(used);
        }

        for (int i = start; i < nums.length; i++) {
            // 剪枝
            if (((used >> i) & 1) == 1) { // 判断第 i 位是否是 1
                // nums[i] 已经被装入别的桶中
                continue;
            }
            if (nums[i] + bucket > target) {
                continue;
            }
            // 做选择
            used |= 1 << i; // 将第 i 位置为 1
            bucket += nums[i];
            // 递归穷举下一个数字是否装入当前桶
            if (backtrack(k, bucket, nums, i + 1, used, target)) {
                return true;
            }
            // 撤销选择
            used ^= 1 << i; // 使用异或运算将第 i 位恢复 0
            bucket -= nums[i];
        }
```

```
            return false;
        }
    }
```

▶ 🥰 代码可视化动画🥰

至此，这道题的第二种思路也完成了。

最后总结

本文写的这两种思路都可以算出正确答案，不过第一种解法即便经过了排序优化，也明显比第二种解法慢很多，这是为什么呢？

我们来分析一下这两个算法的时间复杂度，假设 `nums` 中的元素个数为 `n`。

先说第一个解法，也就是从数字的角度进行穷举，`n` 个数字，每个数字有 `k` 个桶可供选择，所以组合出的结果个数为 `k^n`，时间复杂度也就是 `O(k^n)`。

第二个解法，每个桶要遍历 `n` 个数字，对每个数字有「装入」或「不装入」两种选择，所以组合的结果有 `2^n` 种；而我们有 `k` 个桶，所以总的时间复杂度为 `O(k*2^n)`。

当然，这是对最坏复杂度上界的粗略估算，实际的复杂度肯定要好很多，毕竟我们添加了这么多剪枝逻辑。不过，从复杂度的上界已经可以看出第一种思路要慢很多了。

所以，谁说回溯算法没有技巧性的？虽然回溯算法就是暴力穷举，但穷举也分聪明的穷举方式和低效的穷举方式，关键看你以谁的「视角」进行穷举。

通俗来说，我们应该尽量「少量多次」，就是说宁可多做几次选择（乘法关系），也不要给太大的选择空间（指数关系）；做 `n` 次「`k` 选一」仅重复一次（`O(k^n)`），比 `n` 次「二选一」重复 `k` 次（`O(k*2^n)`）效率低很多。

好了，这道题我们从两种视角进行穷举，虽然代码量看起来多，但核心逻辑都是类似的，相信你通过本文能够更深刻地理解回溯算法。

> 为什么划分两个相等的子集可以转化成背包问题？
>
> 0-1 背包问题 的场景中，有一个背包和若干物品，每个物品有**两个选择**，分别是「装进背包」和「不装进背包」。把原集合 `S` 划分成两个相等子集 `S_1, S_2` 的场景下，`S` 中的每个元素也有**两个选择**，分别是「装进 `S_1`」和「不装进 `S_1`（装进 `S_2`）」，这时候的穷举思路其实和背包问题相同。
>
> 但如果你想把 `S` 划分成 `k` 个相等的子集，相当于 `S` 中的每个元素有 `k` **个选择**，这和标准背包问题的场景有本质区别，是无法套用背包问题的解题思路的。

如果你有高质量的问题，可以 点击这里 进入本文的讨论区。

▶ 引用本文的文章

- 动态规划穷举的两种视角
- 回溯算法秒杀所有排列/组合/子集问题
- 回溯算法解题套路框架
- 谁能想到，斗地主也能玩出算法

——————————————

更多精品课程可查看 我的网站；扫码查看更多配套学习套件：

DFS 算法秒杀所有岛屿题目

Stars 123k 精品课程 查看 知乎 @labuladong B站 @labuladong

微信搜一搜 labuladong公众号

学算法认准 labuladong，致力于把算法讲清楚！网页版 点这里。

读完本文，你不仅学会了算法套路，还可以顺便解决如下题目：

LeetCode	力扣	难度
1020. Number of Enclaves	1020. 飞地的数量	🟠
1254. Number of Closed Islands	1254. 统计封闭岛屿的数目	🟠
1905. Count Sub Islands	1905. 统计子岛屿	🟠
200. Number of Islands	200. 岛屿数量	🟠
694. Number of Distinct Islands🔒	694. 不同岛屿的数量🔒	🟠
695. Max Area of Island	695. 岛屿的最大面积	🟠
-	剑指 Offer II 105. 岛屿的最大面积	🟠

岛屿系列算法问题是经典的面试高频题，虽然基本的问题并不难，但是这类问题有一些有意思的扩展，比如求子岛屿数量，求形状不同的岛屿数量等等，本文就来把这些问题一网打尽。

岛屿系列题目的核心考点就是用 DFS/BFS 算法遍历二维数组。

本文主要来讲解如何用 DFS 算法来秒杀岛屿系列题目，不过用 BFS 算法的核心思路是完全一样的，无非就是把 DFS 改写成 BFS 而已。

那么如何在二维矩阵中使用 DFS 搜索呢？如果你把二维矩阵中的每一个位置看做一个节点，这个节点的上下左右四个位置就是相邻节点，那么整个矩阵就可以抽象成一幅网状的「图」结构。

根据 学习数据结构和算法的框架思维，完全可以根据二叉树的遍历框架改写出二维矩阵的 DFS 代码框架：

```
// 二叉树遍历框架
void traverse(TreeNode root) {
    traverse(root.left);
    traverse(root.right);
}

// 二维矩阵遍历框架
void dfs(int[][] grid, int i, int j, boolean[][] visited) {
```

```
    int m = grid.length, n = grid[0].length;
    if (i < 0 || j < 0 || i >= m || j >= n) {
        // 超出索引边界
        return;
    }
    if (visited[i][j]) {
        // 已遍历过 (i, j)
        return;
    }
    // 进入节点 (i, j)
    visited[i][j] = true;
    dfs(grid, i - 1, j, visited); // 上
    dfs(grid, i + 1, j, visited); // 下
    dfs(grid, i, j - 1, visited); // 左
    dfs(grid, i, j + 1, visited); // 右
}
```

因为二维矩阵本质上是一幅「图」，所以遍历的过程中需要一个 `visited` 布尔数组防止走回头路，如果你能理解上面这段代码，那么搞定所有岛屿系列题目都很简单。

这里额外说一个处理二维数组的常用小技巧，你有时会看到使用「方向数组」来处理上下左右的遍历，和前文 union-find 算法详解 的代码很类似：

```
// 方向数组，分别代表上、下、左、右
int[][] dirs = new int[][]{{-1,0}, {1,0}, {0,-1}, {0,1}};

void dfs(int[][] grid, int i, int j, boolean[][] visited) {
    int m = grid.length, n = grid[0].length;
    if (i < 0 || j < 0 || i >= m || j >= n) {
        // 超出索引边界
        return;
    }
    if (visited[i][j]) {
        // 已遍历过 (i, j)
        return;
    }

    // 进入节点 (i, j)
    visited[i][j] = true;
    // 递归遍历上下左右的节点
    for (int[] d : dirs) {
        int next_i = i + d[0];
        int next_j = j + d[1];
        dfs(grid, next_i, next_j, visited);
    }
    // 离开节点 (i, j)
}
```

这种写法无非就是用 for 循环处理上下左右的遍历罢了，你可以按照个人喜好选择写法。

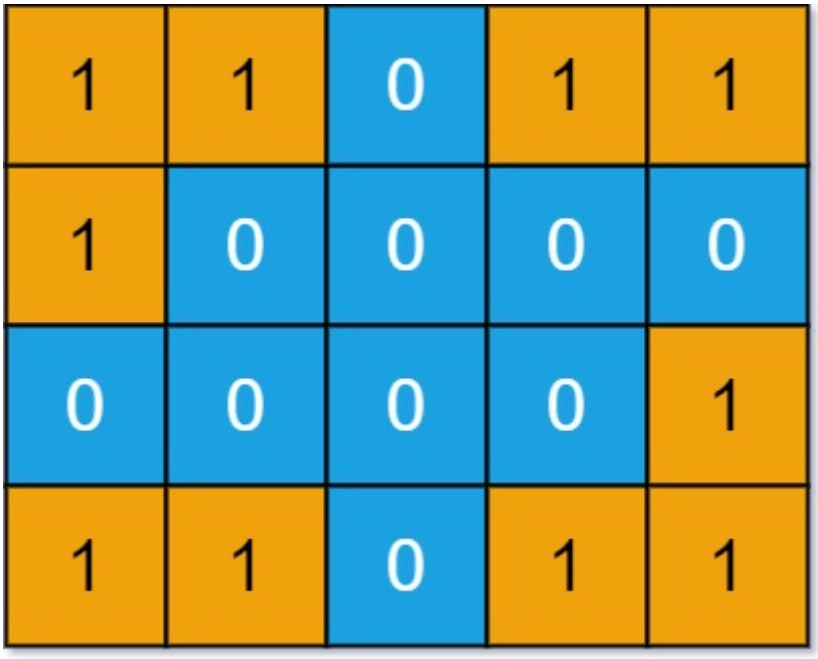
岛屿数量

这是力扣第 200 题「岛屿数量」，最简单也是最经典的一道问题，题目会输入一个二维数组 `grid`，其中只包含 `0` 或者 `1`，`0` 代表海水，`1` 代表陆地，且假设该矩阵四周都是被海水包围着的。

我们说连成片的陆地形成岛屿，那么请你写一个算法，计算这个矩阵 `grid` 中岛屿的个数，函数签名如下：

```
int numIslands(char[][] grid);
```

比如说题目给你输入下面这个 `grid` 有四片岛屿，算法应该返回 4：



思路很简单，关键在于如何寻找并标记「岛屿」，这就要 DFS 算法发挥作用了，我们直接看解法代码：

```
class Solution {
    // 主函数，计算岛屿数量
    int numIslands(char[][] grid) {
        int res = 0;
        int m = grid.length, n = grid[0].length;
        // 遍历 grid
        for (int i = 0; i < m; i++) {
            for (int j = 0; j < n; j++) {
                if (grid[i][j] == '1') {
                    // 每发现一个岛屿，岛屿数量加一
                    res++;
                    // 然后使用 DFS 将岛屿淹了
                    dfs(grid, i, j);
                }
            }
        }
        return res;
    }
```

```
    // 从 (i, j) 开始，将与之相邻的陆地都变成海水
    void dfs(char[][] grid, int i, int j) {
        int m = grid.length, n = grid[0].length;
        if (i < 0 || j < 0 || i >= m || j >= n) {
            // 超出索引边界
            return;
        }
        if (grid[i][j] == '0') {
            // 已经是海水了
            return;
        }
        // 将 (i, j) 变成海水
        grid[i][j] = '0';
        // 淹没上下左右的陆地
        dfs(grid, i + 1, j);
        dfs(grid, i, j + 1);
        dfs(grid, i - 1, j);
        dfs(grid, i, j - 1);
    }
}
```

▶ 🌈 代码可视化动画🌈

为什么每次遇到岛屿，都要用 DFS 算法把岛屿「淹了」呢？主要是为了省事，避免维护 `visited` 数组。

因为 `dfs` 函数遍历到值为 `0` 的位置会直接返回，所以只要把经过的位置都设置为 `0`，就可以起到不走回头路的作用。

> 这类 DFS 算法还有个别名叫做 FloodFill 算法，现在有没有觉得 FloodFill 这个名字还挺贴切的~

这个最最基本的算法问题就说到这，我们来看看后面的题目有什么花样。

封闭岛屿的数量

上一题说二维矩阵四周可以认为也是被海水包围的，所以靠边的陆地也算作岛屿。

力扣第 1254 题「统计封闭岛屿的数目」和上一题有两点不同：

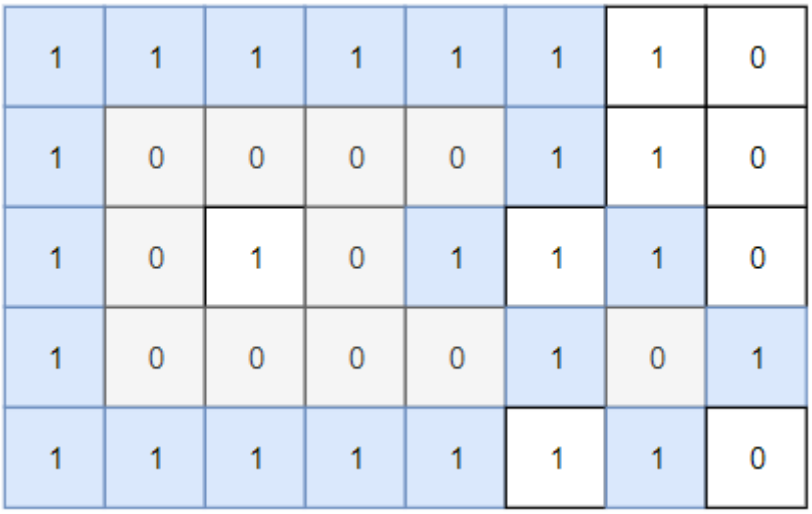
1、用 `0` 表示陆地，用 `1` 表示海水。

2、让你计算「封闭岛屿」的数目。所谓「封闭岛屿」就是上下左右全部被 `1` 包围的 `0`，也就是说**靠边的陆地不算作「封闭岛屿」**。

函数签名如下：

```
int closedIsland(int[][] grid)
```

比如题目给你输入如下这个二维矩阵：



1	1	1	1	1	1	1	0
1	0	0	0	0	1	1	0
1	0	1	0	1	1	1	0
1	0	0	0	0	1	0	1
1	1	1	1	1	1	1	0

算法返回 2，只有图中灰色部分的 0 是四周全都被海水包围着的「封闭岛屿」。

那么如何判断「封闭岛屿」呢？其实很简单，把上一题中那些靠边的岛屿排除掉，剩下的不就是「封闭岛屿」了吗？

有了这个思路，就可以直接看代码了，注意这题规定 0 表示陆地，用 1 表示海水：

```
class Solution {
    // 主函数：计算封闭岛屿的数量
    int closedIsland(int[][] grid) {
        int m = grid.length, n = grid[0].length;
        for (int j = 0; j < n; j++) {
            // 把靠上边的岛屿淹掉
            dfs(grid, 0, j);
            // 把靠下边的岛屿淹掉
            dfs(grid, m - 1, j);
        }
        for (int i = 0; i < m; i++) {
            // 把靠左边的岛屿淹掉
            dfs(grid, i, 0);
            // 把靠右边的岛屿淹掉
            dfs(grid, i, n - 1);
        }
        // 遍历 grid，剩下的岛屿都是封闭岛屿
        int res = 0;
        for (int i = 0; i < m; i++) {
            for (int j = 0; j < n; j++) {
                if (grid[i][j] == 0) {
                    res++;
                    dfs(grid, i, j);
                }
            }
        }
        return res;
    }
```

```
    // 从 (i, j) 开始，将与之相邻的陆地都变成海水
    void dfs(int[][] grid, int i, int j) {
        int m = grid.length, n = grid[0].length;
        if (i < 0 || j < 0 || i >= m || j >= n) {
            return;
        }
        if (grid[i][j] == 1) {
            // 已经是海水了
            return;
        }
        // 将 (i, j) 变成海水
        grid[i][j] = 1;
        // 淹没上下左右的陆地
        dfs(grid, i + 1, j);
        dfs(grid, i, j + 1);
        dfs(grid, i - 1, j);
        dfs(grid, i, j - 1);
    }
}
```

▶ 🌟 代码可视化动画🌟

只要提前把靠边的陆地都淹掉，然后算出来的就是封闭岛屿了。

> 处理这类岛屿题目除了 DFS/BFS 算法之外，Union Find 并查集算法也是一种可选的方法，前文 Union Find 算法运用 就用 Union Find 算法解决了一道类似的问题。

这道岛屿题目的解法稍微改改就可以解决力扣第 1020 题「飞地的数量」，这题不让你求封闭岛屿的数量，而是求封闭岛屿的面积总和。

其实思路都是一样的，先把靠边的陆地淹掉，然后去数剩下的陆地数量就行了，注意第 1020 题中 `1` 代表陆地，`0` 代表海水：

```
class Solution {
    int numEnclaves(int[][] grid) {
        int m = grid.length, n = grid[0].length;
        // 淹掉靠边的陆地
        for (int i = 0; i < m; i++) {
            dfs(grid, i, 0);
            dfs(grid, i, n - 1);
        }
        for (int j = 0; j < n; j++) {
            dfs(grid, 0, j);
            dfs(grid, m - 1, j);
        }

        // 数一数剩下的陆地
        int res = 0;
```

```
        for (int i = 0; i < m; i++) {
            for (int j = 0; j < n; j++) {
                if (grid[i][j] == 1) {
                    res += 1;
                }
            }
        }

        return res;
    }

    // 和之前的实现类似
    void dfs(int[][] grid, int i, int j) {
        // ...
    }
}
```

▶ 🐏 代码可视化动画🐏

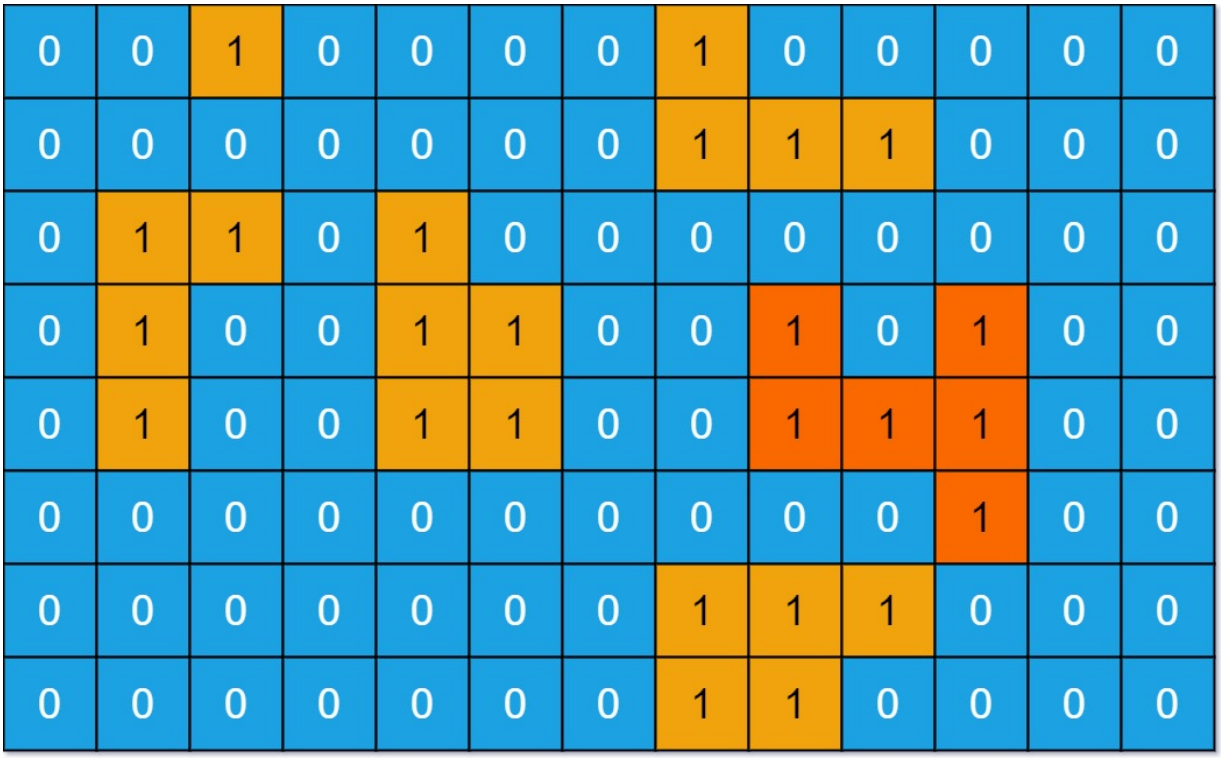
篇幅所限，具体代码我就不写了，我们继续看其他的岛屿题目。

岛屿的最大面积

这是力扣第 695 题「岛屿的最大面积」，0 表示海水，1 表示陆地，现在不让你计算岛屿的个数了，而是让你计算最大的那个岛屿的面积，函数签名如下：

```
int maxAreaOfIsland(int[][] grid)
```

比如题目给你输入如下一个二维矩阵：



其中面积最大的是橘红色的岛屿，算法返回它的面积 6。

这题的大体思路和之前完全一样，只不过 `dfs` 函数淹没岛屿的同时，还应该想办法记录这个岛屿的面积。

我们可以给 `dfs` 函数设置返回值，记录每次淹没的陆地的个数，直接看解法吧：

```
class Solution {
    int maxAreaOfIsland(int[][] grid) {
        // 记录岛屿的最大面积
        int res = 0;
        int m = grid.length, n = grid[0].length;
        for (int i = 0; i < m; i++) {
            for (int j = 0; j < n; j++) {
                if (grid[i][j] == 1) {
                    // 淹没岛屿，并更新最大岛屿面积
                    res = Math.max(res, dfs(grid, i, j));
                }
            }
        }
        return res;
    }

    // 淹没与 (i, j) 相邻的陆地，并返回淹没的陆地面积
    int dfs(int[][] grid, int i, int j) {
        int m = grid.length, n = grid[0].length;
        if (i < 0 || j < 0 || i >= m || j >= n) {
            // 超出索引边界
            return 0;
        }
        if (grid[i][j] == 0) {
            // 已经是海水了
            return 0;
```

```
        }
        // 将 (i, j) 变成海水
        grid[i][j] = 0;

        return dfs(grid, i + 1, j)
            + dfs(grid, i, j + 1)
            + dfs(grid, i - 1, j)
            + dfs(grid, i, j - 1) + 1;
    }
}
```

▶ 🌟 代码可视化动画🌟

解法和之前相比差不多，我也不多说了，接下来的两道岛屿题目是比较有技巧性的，我们重点来看一下。

子岛屿数量

如果说前面的题目都是模板题，那么力扣第 1905 题「统计子岛屿」可能得动动脑子了：

1905. 统计子岛屿

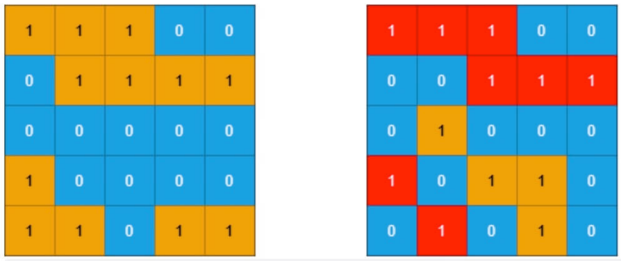
难度 中等 22 收藏 分享 切换为英文 接收动态 反馈

给你两个 `m x n` 的二进制矩阵 `grid1` 和 `grid2` ，它们只包含 `0` （表示水域）和 `1` （表示陆地）。一个 **岛屿** 是由 **四个方向** （水平或者竖直）上相邻的 `1` 组成的区域。任何矩阵以外的区域都视为水域。

如果 `grid2` 的一个岛屿，被 `grid1` 的一个岛屿 **完全** 包含，也就是说 `grid2` 中该岛屿的每一个格子都被 `grid1` 中 **同一个** 岛屿完全包含，那么我们称 `grid2` 中的这个岛屿为 **子岛屿** 。

请你返回 `grid2` 中 **子岛屿** 的数目 。

示例 1：



输入： grid1 = [[1,1,1,0,0],[0,1,1,1,1],[0,0,0,0,0],[1,0,0,0,0],[1,1,0,1,1]], grid2 = [[1,1,1,0,0],[0,0,1,1,1],[0,1,0,0,0],[1,0,1,1,0],[0,1,0,1,0]]
输出： 3
解释： 如上图所示，左边为 grid1 ，右边为 grid2 。
grid2 中标红的 1 区域是子岛屿，总共有 3 个子岛屿。

这道题的关键在于，如何快速判断子岛屿？肯定可以借助 Union Find 并查集算法 来判断，不过本文重点在 DFS 算法，就不展开并查集算法了。

什么情况下 `grid2` 中的一个岛屿 `B` 是 `grid1` 中的一个岛屿 `A` 的子岛？

当岛屿 `B` 中所有陆地在岛屿 `A` 中也是陆地的时候，岛屿 `B` 是岛屿 `A` 的子岛。

反过来说，如果岛屿 `B` 中存在一片陆地，在岛屿 `A` 的对应位置是海水，那么岛屿 `B` 就不是岛屿 `A` 的子岛。

那么，我们只要遍历 `grid2` 中的所有岛屿，把那些不可能是子岛的岛屿排除掉，剩下的就是子岛。

依据这个思路，可以直接写出下面的代码：

```
class Solution {
    int countSubIslands(int[][] grid1, int[][] grid2) {
        int m = grid1.length, n = grid1[0].length;
        for (int i = 0; i < m; i++) {
            for (int j = 0; j < n; j++) {
                if (grid1[i][j] == 0 && grid2[i][j] == 1) {
                    // 这个岛屿肯定不是子岛，淹掉
                    dfs(grid2, i, j);
                }
            }
        }
        // 现在 grid2 中剩下的岛屿都是子岛，计算岛屿数量
        int res = 0;
        for (int i = 0; i < m; i++) {
            for (int j = 0; j < n; j++) {
                if (grid2[i][j] == 1) {
                    res++;
                    dfs(grid2, i, j);
                }
            }
        }
        return res;
    }

    // 从 (i, j) 开始，将与之相邻的陆地都变成海水
    void dfs(int[][] grid, int i, int j) {
        int m = grid.length, n = grid[0].length;
        if (i < 0 || j < 0 || i >= m || j >= n) {
            return;
        }
        if (grid[i][j] == 0) {
            return;
        }

        grid[i][j] = 0;
        dfs(grid, i + 1, j);
        dfs(grid, i, j + 1);
        dfs(grid, i - 1, j);
        dfs(grid, i, j - 1);
    }
}
```

▶ 👾 代码可视化动画👾

这道题的思路和计算「封闭岛屿」数量的思路有些类似，只不过后者排除那些靠边的岛屿，前者排除那些不可能是子岛的岛屿。

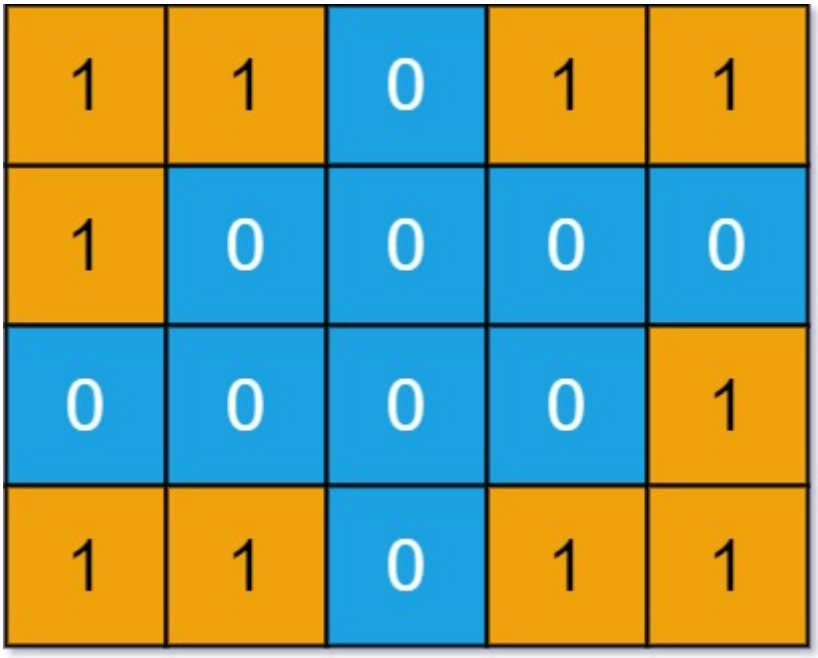
不同的岛屿数量

这是本文的最后一道岛屿题目，作为压轴题，当然是最有意思的。

力扣第 694 题「不同的岛屿数量」，题目还是输入一个二维矩阵，`0` 表示海水，`1` 表示陆地，这次让你计算 **不同的 (distinct)** 岛屿数量，函数签名如下：

```
int numDistinctIslands(int[][] grid)
```

比如题目输入下面这个二维矩阵：



其中有四个岛屿，但是左下角和右上角的岛屿形状相同，所以不同的岛屿共有三个，算法返回 3。

很显然我们得想办法把二维矩阵中的「岛屿」进行转化，变成比如字符串这样的类型，然后利用 HashSet 这样的数据结构去重，最终得到不同的岛屿的个数。

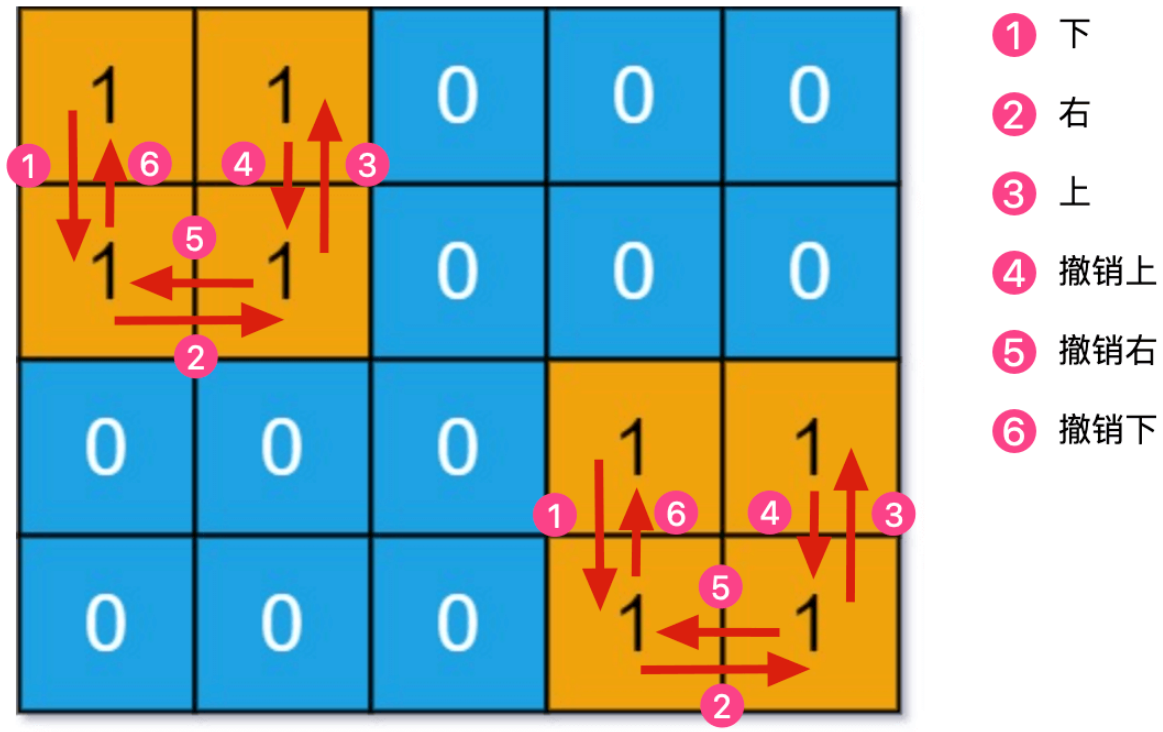
如果想把岛屿转化成字符串，说白了就是序列化，序列化说白了就是遍历嘛，前文 二叉树的序列化和反序列化 讲了二叉树和字符串互转，这里也是类似的。

首先，对于形状相同的岛屿，如果从同一起点出发，`dfs` 函数遍历的顺序肯定是一样的。

因为遍历顺序是写死在你的递归函数里面的，不会动态改变：

```
void dfs(int[][] grid, int i, int j) {
    // 递归顺序：
    dfs(grid, i - 1, j); // 上
    dfs(grid, i + 1, j); // 下
    dfs(grid, i, j - 1); // 左
    dfs(grid, i, j + 1); // 右
}
```

所以，遍历顺序从某种意义上说就可以用来描述岛屿的形状，比如下图这两个岛屿：



假设它们的遍历顺序是：

> 下，右，上，撤销上，撤销右，撤销下

如果我用分别用 `1, 2, 3, 4` 代表上下左右，用 `-1, -2, -3, -4` 代表上下左右的撤销，那么可以这样表示它们的遍历顺序：

> 2, 4, 1, -1, -4, -2

你看，这就相当于是岛屿序列化的结果，只要每次使用 `dfs` 遍历岛屿的时候生成这串数字进行比较，就可以计算到底有多少个不同的岛屿了。

> 细心的读者问到，为什么记录「撤销」操作才能唯一表示遍历顺序呢？不记录撤销操作好像也可以？实际上不是的。
>
> > 比方说「下，右，撤销右，撤销下」和「下，撤销下，右，撤销右」显然是两个不同的遍历顺序，但如果不记录撤销操作，那么它俩都是「下，右」，成了相同的遍历顺序，显然是不对的。

所以我们需要稍微改造 `dfs` 函数，添加一些函数参数以便记录遍历顺序：

```
void dfs(int[][] grid, int i, int j, StringBuilder sb, int dir) {
    int m = grid.length, n = grid[0].length;
    if (i < 0 || j < 0 || i >= m || j >= n
        || grid[i][j] == 0) {
        return;
    }
    // 前序遍历位置：进入 (i, j)
    grid[i][j] = 0;
    sb.append(dir).append(',');
```

```
        dfs(grid, i - 1, j, sb, 1); // 上
        dfs(grid, i + 1, j, sb, 2); // 下
        dfs(grid, i, j - 1, sb, 3); // 左
        dfs(grid, i, j + 1, sb, 4); // 右

        // 后序遍历位置：离开 (i, j)
        sb.append(-dir).append(',');
    }
```

> 仔细看这个代码，在递归前做选择，在递归后撤销选择，它像不像 回溯算法框架？实际上它就是回溯算法，因为它关注的是「树枝」（岛屿的遍历顺序），而不是「节点」（岛屿的每个格子）。

`dir` 记录方向，`dfs` 函数递归结束后，`sb` 记录着整个遍历顺序。有了这个 `dfs` 函数就好办了，我们可以直接写出最后的解法代码：

```
class Solution {
    public int numDistinctIslands(int[][] grid) {
        int m = grid.length, n = grid[0].length;
        // 记录所有岛屿的序列化结果
        HashSet<String> islands = new HashSet<>();
        for (int i = 0; i < m; i++) {
            for (int j = 0; j < n; j++) {
                if (grid[i][j] == 1) {
                    // 淹掉这个岛屿，同时存储岛屿的序列化结果
                    StringBuilder sb = new StringBuilder();
                    // 初始的方向可以随便写，不影响正确性
                    dfs(grid, i, j, sb, 666);
                    islands.add(sb.toString());
                }
            }
        }
        // 不相同的岛屿数量
        return islands.size();
    }
}
```

▶ 🥳 代码可视化动画🥳

这样，这道题就解决了，至于为什么初始调用 `dfs` 函数时的 `dir` 参数可以随意写，因为这个 `dfs` 函数实际上是回溯算法，它关注的是「树枝」而不是「节点」，前文 图算法基础 有写具体的区别，这里就不赘述了。

以上就是全部岛屿系列题目的解题思路，也许前面的题目大部分人会做，但是最后两题还是比较巧妙的，希望本文对你有帮助。

如果你有高质量的问题，可以 点击这里 进入本文的讨论区。

▶ 引用本文的题目

安装 我的 Chrome 刷题插件 点开下列题目可直接查看解题思路：

LeetCode	力扣
1219. Path with Maximum Gold	1219. 黄金矿工
79. Word Search	79. 单词搜索
-	剑指 Offer 13. 机器人的运动范围
-	剑指 Offer II 105. 岛屿的最大面积

▶ 引用本文的文章

- FloodFill算法详解及应用
- 东哥带你刷二叉树（纲领篇）
- 并查集（Union-Find）算法

———————————————

更多精品课程可查看 我的网站；扫码查看更多配套学习套件：

3.2 BFS 算法

BFS 算法起源于二叉树的层序遍历，其核心是利用队列这种数据结构。

且 BFS 算法常见于求最值的场景，因为 BFS 的算法逻辑保证了算法第一次到达目标时的代价是最小的。

名称	最新版本号	详情
PDF 教材	V5.2	下载
刷题打卡挑战	开放报名	报名
网站会员	V已上线	购买
Chrome 刷题插件	V4.4.3	使用手册
vscode 刷题插件	V1.5.4	使用手册
JetBrains IDE 刷题插件	V1.8.6	使用手册

BFS 算法解题套路框架

Stars 123k 精品课程 查看 知乎 @labuladong B站 @labuladong

学算法认准 labuladong，致力于把算法讲清楚！网页版 点这里。

读完本文，你不仅学会了算法套路，还可以顺便解决如下题目：

LeetCode	力扣	难度
111. Minimum Depth of Binary Tree	111. 二叉树的最小深度	🟢
752. Open the Lock	752. 打开转盘锁	🟠
-	剑指 Offer II 109. 开密码锁	🟠

> tip：本文有视频版：BFS 算法核心框架套路。建议关注我的 B 站账号，我会用视频领读的方式带大家学习那些稍有难度的算法技巧。

后台有很多人问起 BFS 和 DFS 的框架，今天就来说说吧。

首先，你要说我没写过 BFS 框架，这话没错，今天写个框架你背住就完事儿了。但要是说没写过 DFS 框架，那你还真是说错了，**其实 DFS 算法就是回溯算法**，我们前文 回溯算法框架套路详解 就写过了，而且写得不是一般得好，建议好好复习，嘿嘿嘿~

BFS 的核心思想应该不难理解的，就是把一些问题抽象成图，从一个点开始，向四周开始扩散。一般来说，我们写 BFS 算法都是用「队列」这种数据结构，每次将一个节点周围的所有节点加入队列。

BFS 相对 DFS 的最主要的区别是：**BFS 找到的路径一定是最短的，但代价就是空间复杂度可能比 DFS 大很多**，至于为什么，我们后面介绍了框架就很容易看出来了。

本文就由浅入深写两道 BFS 的典型题目，分别是「二叉树的最小高度」和「打开密码锁的最少步数」，手把手教你怎么写 BFS 算法。

一、算法框架

要说框架的话，我们先举例一下 BFS 出现的常见场景好吧，**问题的本质就是让你在一幅「图」中找到从起点 `start` 到终点 `target` 的最近距离，这个例子听起来很枯燥，但是 BFS 算法问题其实都是在干这个事儿**，把枯燥的本质搞清楚了，再去欣赏各种问题的包装才能胸有成竹嘛。

这个广义的描述可以有各种变体，比如走迷宫，有的格子是围墙不能走，从起点到终点的最短距离是多少？如果这个迷宫带「传送门」可以瞬间传送呢？

再比如说两个单词，要求你通过某些替换，把其中一个变成另一个，每次只能替换一个字符，最少要替换几次？

再比如说连连看游戏，两个方块消除的条件不仅仅是图案相同，还得保证两个方块之间的最短连线不能多于两个拐点。你玩连连看，点击两个坐标，游戏是如何判断它俩的最短连线有几个拐点的？

再比如……

净整些花里胡哨的，本质上看这些问题都没啥区别，就是一幅「图」，让你从一个起点，走到终点，问最短路径。这就是 BFS 的本质，框架搞清楚了直接默写就好。

记住下面这个框架就 OK 了：

```
// 计算从起点 start 到终点 target 的最近距离
int BFS(Node start, Node target) {
    Queue<Node> q; // 核心数据结构
    Set<Node> visited; // 避免走回头路

    q.offer(start); // 将起点加入队列
    visited.add(start);

    while (q not empty) {
        int sz = q.size();
        /* 将当前队列中的所有节点向四周扩散 */
        for (int i = 0; i < sz; i++) {
            Node cur = q.poll();
            /* 划重点：这里判断是否到达终点 */
            if (cur is target)
                return step;
            /* 将 cur 的相邻节点加入队列 */
            for (Node x : cur.adj()) {
                if (x not in visited) {
                    q.offer(x);
                    visited.add(x);
                }
            }
        }
    }
```

```
    // 如果走到这里，说明在图中没有找到目标节点
}
```

队列 `q` 就不说了，BFS 的核心数据结构；`cur.adj()` 泛指 `cur` 相邻的节点，比如说二维数组中，`cur` 上下左右四面的位置就是相邻节点；`visited` 的主要作用是防止走回头路，大部分时候都是必须的，但是像一般的二叉树结构，没有子节点到父节点的指针，不会走回头路就不需要 `visited`。

二、二叉树的最小高度

先来个简单的问题实践一下 BFS 框架吧，判断一棵二叉树的**最小**高度，这也是力扣第 111 题「二叉树的最小深度」：

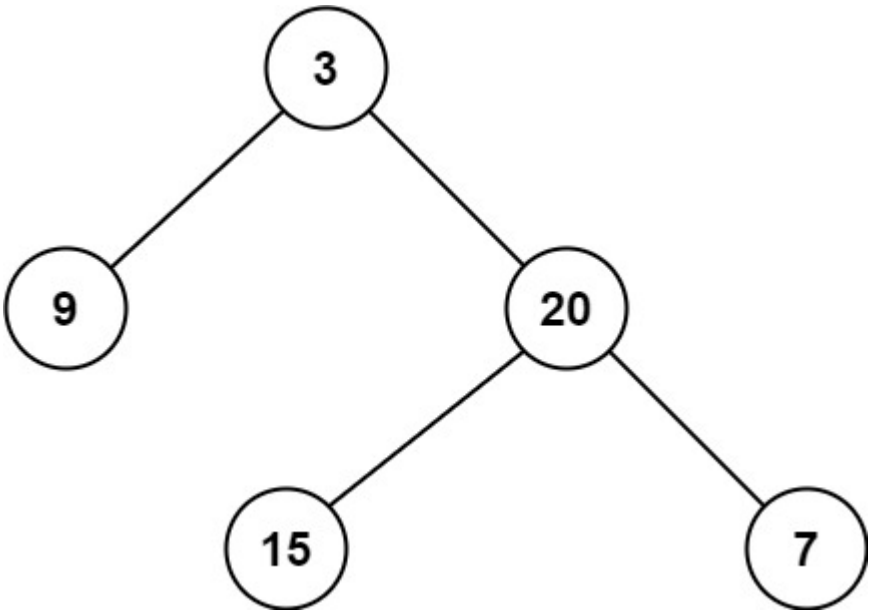
▼ 111. 二叉树的最小深度 Leetcode | 力扣

给定一个二叉树，找出其最小深度。

最小深度是从根节点到最近叶子节点的最短路径上的节点数量。

说明：叶子节点是指没有子节点的节点。

示例 1：




```
输入：root = [3,9,20,null,null,15,7]
输出：2
```

示例 2：

```
输入：root = [2,null,3,null,4,null,5,null,6]
输出：5
```

提示：

- 树中节点数的范围在 [0, 10^5] 内
- -1000 <= node.val <="1000</code">

怎么套到 BFS 的框架里呢？首先明确一下起点 start 和终点 target 是什么，怎么判断到达了终点？

显然起点就是 root 根节点，终点就是最靠近根节点的那个「叶子节点」嘛，叶子节点就是两个子节点都是 null 的节点：

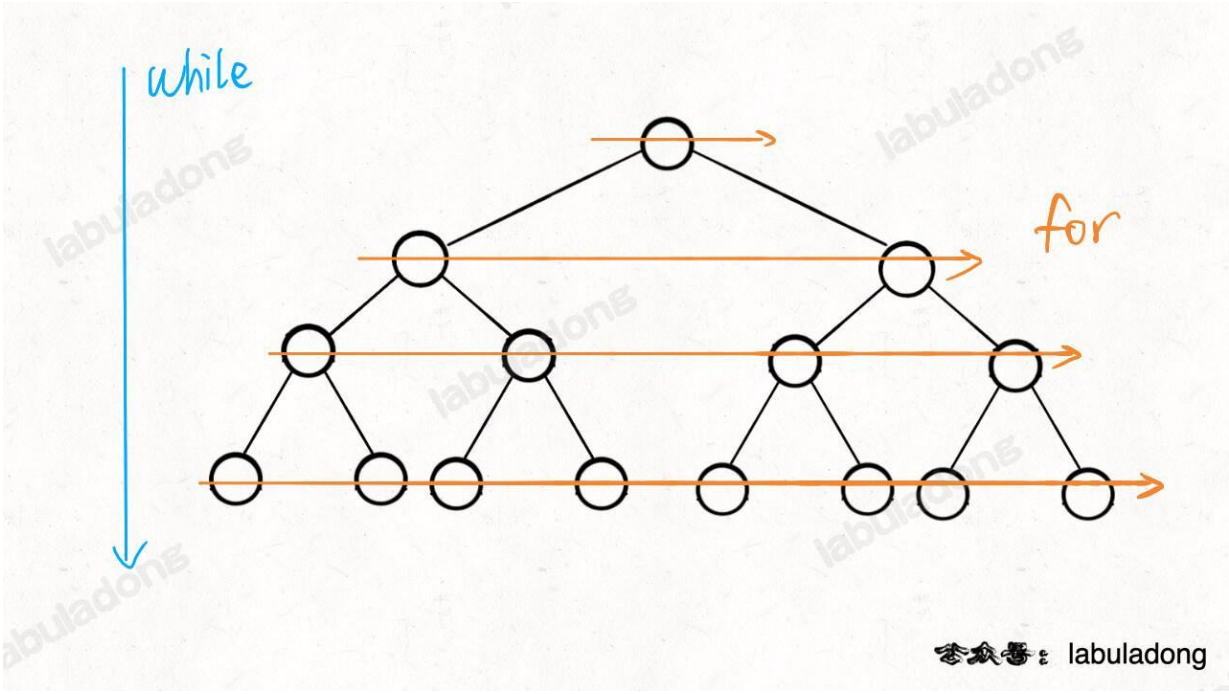
```
if (cur.left == null && cur.right == null)
    // 到达叶子节点
```

那么，按照我们上述的框架稍加改造来写解法即可：

```
int minDepth(TreeNode root) {
    if (root == null) return 0;
    Queue<TreeNode> q = new LinkedList<>();
    q.offer(root);
    // root 本身就是一层，depth 初始化为 1
    int depth = 1;

    while (!q.isEmpty()) {
        int sz = q.size();
        /* 将当前队列中的所有节点向四周扩散 */
        for (int i = 0; i < sz; i++) {
            TreeNode cur = q.poll();
            /* 判断是否到达终点 */
            if (cur.left == null && cur.right == null)
                return depth;
            /* 将 cur 的相邻节点加入队列 */
            if (cur.left != null)
                q.offer(cur.left);
            if (cur.right != null)
                q.offer(cur.right);
        }
        /* 这里增加步数 */
        depth++;
    }
    return depth;
}
```

▶ 🎃 代码可视化动画🎃

这里注意这个 while 循环和 for 循环的配合，**while 循环控制一层一层往下走，for 循环利用 sz 变量控制从左到右遍历每一层二叉树节点**：



这一点很重要，这个形式在普通 BFS 问题中都很常见，但是在 Dijkstra 算法模板框架 中我们修改了这种代码模式，读完并理解本文后你可以去看看 BFS 算法是如何演变成 Dijkstra 算法在加权图中寻找最短路径的。

话说回来，二叉树本身是很简单的数据结构，我想上述代码你应该可以理解的，其实其他复杂问题都是这个框架的变形，再探讨复杂问题之前，我们解答两个问题：

1、为什么 BFS 可以找到最短距离，DFS 不行吗？

首先，你看 BFS 的逻辑，`depth` 每增加一次，队列中的所有节点都向前迈一步，这保证了第一次到达终点的时候，走的步数是最少的。

DFS 不能找最短路径吗？其实也是可以的，但是时间复杂度相对高很多。你想啊，DFS 实际上是靠递归的堆栈记录走过的路径，你要找到最短路径，肯定得把二叉树中所有树权都探索完才能对比出最短的路径有多长对不对？而 BFS 借助队列做到一次一步「齐头并进」，是可以在不遍历完整棵树的条件下找到最短距离的。

形象点说，DFS 是线，BFS 是面；DFS 是单打独斗，BFS 是集体行动。这个应该比较容易理解吧。

2、既然 BFS 那么好，为啥 DFS 还要存在？

BFS 可以找到最短距离，但是空间复杂度高，而 DFS 的空间复杂度较低。

还是拿刚才我们处理二叉树问题的例子，假设给你的这个二叉树是满二叉树，节点数为 `N`，对于 DFS 算法来说，空间复杂度无非就是递归堆栈，最坏情况下顶多就是树的高度，也就是 `O(logN)`。

但是你想想 BFS 算法，队列中每次都会储存着二叉树一层的节点，这样的话最坏情况下空间复杂度应该是树的最底层节点的数量，也就是 `N/2`，用 Big O 表示的话也就是 `O(N)`。

由此观之，BFS 还是有代价的，一般来说在找最短路径的时候使用 BFS，其他时候还是 DFS 使用得多一些（主要是递归代码好写）。

好了，现在你对 BFS 了解得足够多了，下面来一道难一点的题目，深化一下框架的理解吧。

三、解开密码锁的最少次数

这是力扣第 752 题「打开转盘锁」，比较有意思：

▼ 752. 打开转盘锁 Leetcode | 力扣

你有一个带有四个圆形拨轮的转盘锁。每个拨轮都有10个数字： %%%%0%%%%, %%%%1%%%%, %%%%2%%%%, %%%%3%%%%, %%%%4%%%%, %%%%5%%%%, %%%%6%%%%, %%%%7%%%%, %%%%8%%%%, %%%%9%%%% 。每个拨轮可以自由旋转：例如把 %%%%9%%%% 变为 %%%%0%%%%, %%%%0%%%% 变为 %%%%9%%%% 。每次旋转都只能旋转一个拨轮的一位数字。

锁的初始数字为 %%%%0000%%%% ，一个代表四个拨轮的数字的字符串。

列表 deadends 包含了一组死亡数字，一旦拨轮的数字和列表里的任何一个元素相同，这个锁将会被永久锁定，无法再被旋转。

字符串 target 代表可以解锁的数字，你需要给出解锁需要的最小旋转次数，如果无论如何不能解锁，返回 -1 。

示例 1:

```
输入：deadends = ["0201","0101","0102","1212","2002"], target = "0202"
输出：6
解释：
可能的移动序列为 "0000" -> "1000" -> "1100" -> "1200" -> "1201" -> "1202" ->
"0202"。
注意 "0000" -> "0001" -> "0002" -> "0102" -> "0202" 这样的序列是不能解锁的，
因为当拨动到 "0102" 时这个锁就会被锁定。
```

示例 2:

```
输入：deadends = ["8888"], target = "0009"
输出：1
解释：把最后一位反向旋转一次即可 "0000" -> "0009"。
```

示例 3:

```
输入：deadends = ["8887","8889","8878","8898","8788","8988","7888","9888"],
target = "8888"
输出：-1
解释：无法旋转到目标数字且不被锁定。
```

提示：

- 1 <= deadends.length <= 500
- deadends[i].length == 4
- target.length == 4
- target 不在 deadends 之中

- target 和 deadends[i] 仅由若干位数字组成

函数签名如下：

```
int openLock(String[] deadends, String target)
```

题目中描述的就是我们生活中常见的那种密码锁，如果没有任何约束，最少的拨动次数很好算，就像我们平时开密码锁那样直奔密码拨就行了。

但现在的难点就在于，不能出现 deadends，应该如何计算出最少的转动次数呢？

第一步，我们不管所有的限制条件，不管 deadends 和 target 的限制，就思考一个问题：如果让你设计一个算法，穷举所有可能的密码组合，你怎么做？

穷举呗，再简单一点，如果你只转一下锁，有几种可能？总共有 4 个位置，每个位置可以向上转，也可以向下转，也就是有 8 种可能对吧。

比如说从 "0000" 开始，转一次，可以穷举出 "1000", "9000", "0100", "0900"... 共 8 种密码。然后，再以这 8 种密码作为基础，对每个密码再转一下，穷举出所有可能...

仔细想想，这就可以抽象成一幅图，每个节点有 8 个相邻的节点，又让你求最短距离，这不就是典型的 BFS 嘛，框架就可以派上用场了，先写出一个「简陋」的 BFS 框架代码再说别的：

```
// 将 s[j] 向上拨动一次
String plusOne(String s, int j) {
    char[] ch = s.toCharArray();
    if (ch[j] == '9')
        ch[j] = '0';
    else
        ch[j] += 1;
    return new String(ch);
}
// 将 s[i] 向下拨动一次
String minusOne(String s, int j) {
    char[] ch = s.toCharArray();
    if (ch[j] == '0')
        ch[j] = '9';
    else
        ch[j] -= 1;
    return new String(ch);
}

// BFS 框架，打印出所有可能的密码
void BFS(String target) {
    Queue<String> q = new LinkedList<>();
    q.offer("0000");

    while (!q.isEmpty()) {
        int sz = q.size();
        /* 将当前队列中的所有节点向周围扩散 */
```

```
            for (int i = 0; i < sz; i++) {
                String cur = q.poll();
                /* 判断是否到达终点 */
                System.out.println(cur);

                /* 将一个节点的相邻节点加入队列 */
                for (int j = 0; j < 4; j++) {
                    String up = plusOne(cur, j);
                    String down = minusOne(cur, j);
                    q.offer(up);
                    q.offer(down);
                }
            }
            /* 在这里增加步数 */
        }
        return;
    }
```

> 这段代码当然有很多问题，但是我们做算法题肯定不是一蹴而就的，而是从简陋到完美的。不要完美主义，咱要慢慢来，好不。

这段 BFS 代码已经能够穷举所有可能的密码组合了，但是显然不能完成题目，有如下问题需要解决：

1、会走回头路。比如说我们从 `"0000"` 拨到 `"1000"`，但是等从队列拿出 `"1000"` 时，还会拨出一个 `"0000"`，这样的话会产生死循环。

2、没有终止条件，按照题目要求，我们找到 `target` 就应该结束并返回拨动的次数。

3、没有对 `deadends` 的处理，按道理这些「死亡密码」是不能出现的，也就是说你遇到这些密码的时候需要跳过。

如果你能够看懂上面那段代码，真得给你鼓掌，只要按照 BFS 框架在对应的位置稍作修改即可修复这些问题：

```
int openLock(String[] deadends, String target) {
    // 记录需要跳过的死亡密码
    Set<String> deads = new HashSet<>();
    for (String s : deadends) deads.add(s);
    // 记录已经穷举过的密码，防止走回头路
    Set<String> visited = new HashSet<>();
    Queue<String> q = new LinkedList<>();
    // 从起点开始启动广度优先搜索
    int step = 0;
    q.offer("0000");
    visited.add("0000");

    while (!q.isEmpty()) {
        int sz = q.size();
        /* 将当前队列中的所有节点向周围扩散 */
```

```
            for (int i = 0; i < sz; i++) {
                String cur = q.poll();

                /* 判断是否到达终点 */
                if (deads.contains(cur))
                    continue;
                if (cur.equals(target))
                    return step;

                /* 将一个节点的未遍历相邻节点加入队列 */
                for (int j = 0; j < 4; j++) {
                    String up = plusOne(cur, j);
                    if (!visited.contains(up)) {
                        q.offer(up);
                        visited.add(up);
                    }
                    String down = minusOne(cur, j);
                    if (!visited.contains(down)) {
                        q.offer(down);
                        visited.add(down);
                    }
                }
            }
            /* 在这里增加步数 */
            step++;
        }
        // 如果穷举完都没找到目标密码，那就是找不到了
        return -1;
    }
```

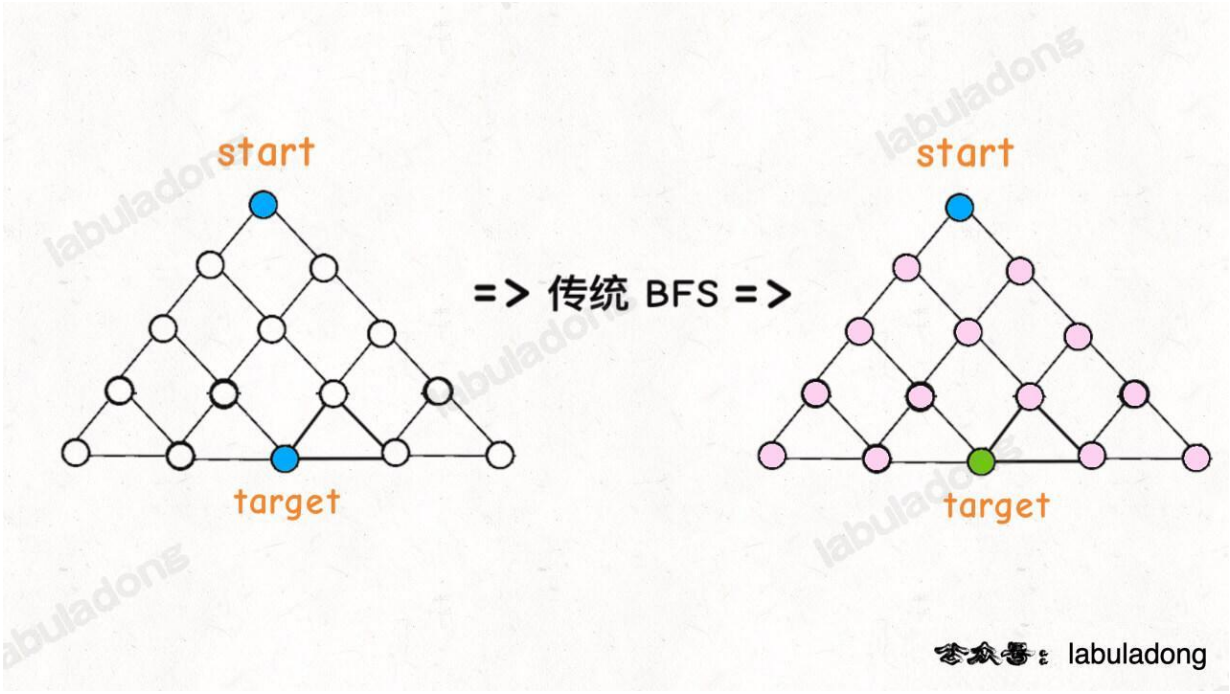
至此，我们就解决这道题目了。有一个比较小的优化：可以不需要 `dead` 这个哈希集合，可以直接将这些元素初始化到 `visited` 集合中，效果是一样的，可能更加优雅一些。

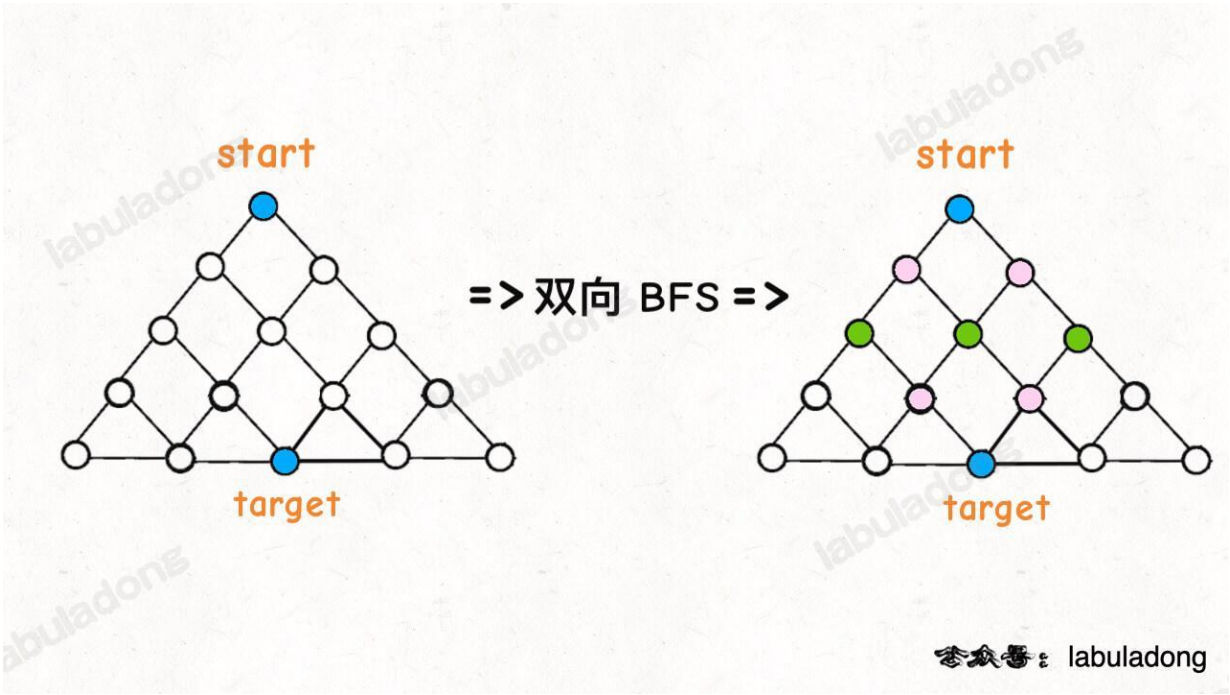
四、双向 BFS 优化

你以为到这里 BFS 算法就结束了？恰恰相反。BFS 算法还有一种稍微高级一点的优化思路：**双向 BFS**，可以进一步提高算法的效率。

篇幅所限，这里就提一下区别：**传统的 BFS 框架就是从起点开始向四周扩散，遇到终点时停止；而双向 BFS 则是从起点和终点同时开始扩散，当两边有交集的时候停止**。

为什么这样能够能够提升效率呢？其实从 Big O 表示法分析算法复杂度的话，它俩的最坏复杂度都是 `O(N)`，但是实际上双向 BFS 确实会快一些，我给你画两张图看一眼就明白了：





图示中的树形结构，如果终点在最底部，按照传统 BFS 算法的策略，会把整棵树的节点都搜索一遍，最后找到 `target`；而双向 BFS 其实只遍历了半棵树就出现了交集，也就是找到了最短距离。从这个例子可以直观地感受到，双向 BFS 是要比传统 BFS 高效的。

不过，双向 BFS 也有局限，因为你必须知道终点在哪里。比如我们刚才讨论的二叉树最小高度的问题，你一开始根本就不知道终点在哪里，也就无法使用双向 BFS；但是第二个密码锁的问题，是可以使用双向 BFS 算法来提高效率的，代码稍加修改即可：

```
int openLock(String[] deadends, String target) {
    Set<String> deads = new HashSet<>();
    for (String s : deadends) deads.add(s);
    // 用集合不用队列，可以快速判断元素是否存在
    Set<String> q1 = new HashSet<>();
    Set<String> q2 = new HashSet<>();
```

```
    Set<String> visited = new HashSet<>();

    int step = 0;
    q1.add("0000");
    q2.add(target);

    while (!q1.isEmpty() && !q2.isEmpty()) {
        // 哈希集合在遍历的过程中不能修改，用 temp 存储扩散结果
        Set<String> temp = new HashSet<>();

        /* 将 q1 中的所有节点向周围扩散 */
        for (String cur : q1) {
            /* 判断是否到达终点 */
            if (deads.contains(cur))
                continue;
            if (q2.contains(cur))
                return step;

            visited.add(cur);

            /* 将一个节点的未遍历相邻节点加入集合 */
            for (int j = 0; j < 4; j++) {
                String up = plusOne(cur, j);
                if (!visited.contains(up))
                    temp.add(up);
                String down = minusOne(cur, j);
                if (!visited.contains(down))
                    temp.add(down);
            }
        }
        /* 在这里增加步数 */
        step++;
        // temp 相当于 q1
        // 这里交换 q1 q2，下一轮 while 就是扩散 q2
        q1 = q2;
        q2 = temp;
    }
    return -1;
}
```

双向 BFS 还是遵循 BFS 算法框架的，只是**不再使用队列，而是使用 HashSet 方便快速判断两个集合是否有交集**。

另外的一个技巧点就是 **while 循环的最后交换 `q1` 和 `q2` 的内容**，所以只要默认扩散 `q1` 就相当于轮流扩散 `q1` 和 `q2`。

其实双向 BFS 还有一个优化，就是在 while 循环开始时做一个判断：

```
// ...
while (!q1.isEmpty() && !q2.isEmpty()) {
    if (q1.size() > q2.size()) {
```

```
        // 交换 q1 和 q2
        temp = q1;
        q1 = q2;
        q2 = temp;
    }
    // ...
```

为什么这是一个优化呢？

因为按照 BFS 的逻辑，队列（集合）中的元素越多，扩散之后新的队列（集合）中的元素就越多；在双向 BFS 算法中，如果我们每次都选择一个较小的集合进行扩散，那么占用的空间增长速度就会慢一些，效率就会高一些。

不过话说回来，**无论传统 BFS 还是双向 BFS，无论做不做优化，从 Big O 衡量标准来看，时间复杂度都是一样的**，只能说双向 BFS 是一种 trick，算法运行的速度会相对快一点，掌握不掌握其实都无所谓。最关键的是把 BFS 通用框架记下来，反正所有 BFS 算法都可以用它套出解法。

接下来可阅读：

- BFS 算法如何解决智力题

如果你有高质量的问题，可以 点击这里 进入本文的讨论区。

▶ **引用本文的题目**

安装 我的 Chrome 刷题插件 点开下列题目可直接查看解题思路：

LeetCode	力扣
102. Binary Tree Level Order Traversal	102. 二叉树的层序遍历
1091. Shortest Path in Binary Matrix	1091. 二进制矩阵中的最短路径
117. Populating Next Right Pointers in Each Node II	117. 填充每个节点的下一个右侧节点指针 II
1926. Nearest Exit from Entrance in Maze	1926. 迷宫中离入口最近的出口
286. Walls and Gates🔒	286. 墙与门🔒
310. Minimum Height Trees	310. 最小高度树
365. Water and Jug Problem	365. 水壶问题
431. Encode N-ary Tree to Binary Tree🔒	431. 将 N 叉树编码为二叉树🔒
490. The Maze🔒	490. 迷宫🔒
505. The Maze II🔒	505. 迷宫 II🔒
542. 01 Matrix	542. 01 矩阵
773. Sliding Puzzle	773. 滑动谜题
863. All Nodes Distance K in Binary Tree	863. 二叉树中所有距离为 K 的结点

LeetCode	力扣
-	剑指 Offer 32 - I. 从上到下打印二叉树
-	剑指 Offer 32 - II. 从上到下打印二叉树 II
-	剑指 Offer II 109. 开密码锁

▶ 引用本文的文章

- Dijkstra 算法模板及应用
- Prim 最小生成树算法
- 东哥带你刷二叉树（纲领篇）
- 二分图判定算法
- 二叉树的递归转迭代的代码框架
- 分治算法详解：运算优先级
- 如何用 BFS 算法秒杀各种智力题
- 我的刷题心得：算法的本质
- 旅游省钱大法：加权最短路径
- 本站简介
- 环检测及拓扑排序算法
- 用算法打败算法
- 算法学习和心流体验

————————————————

更多精品课程可查看 我的网站；扫码查看更多配套学习套件：

如何用 BFS 算法秒杀各种智力题

Stars 123k 精品课程 查看 知乎 @labuladong B站 @labuladong

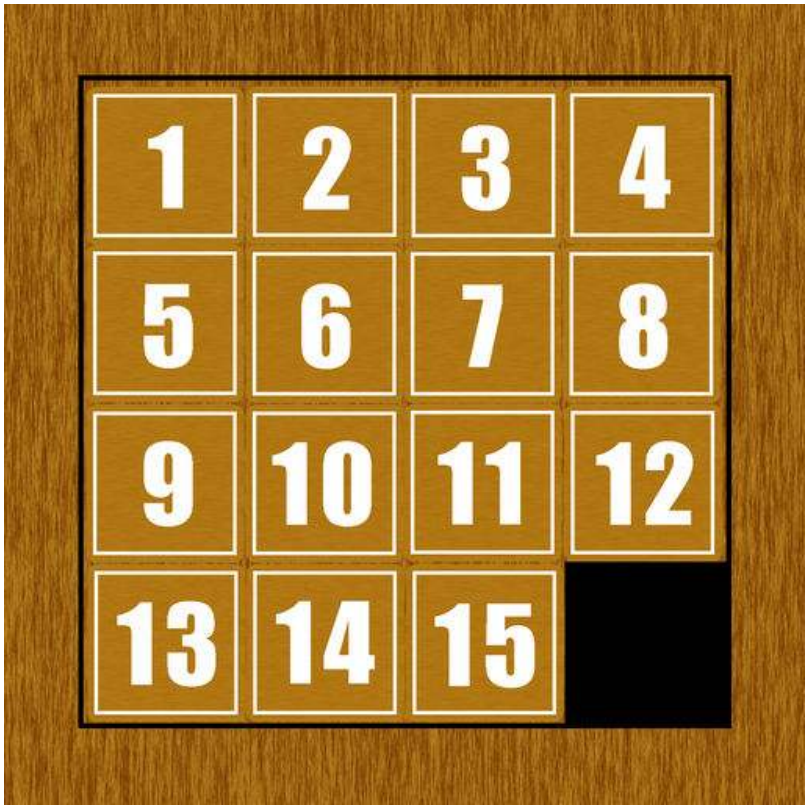
微信搜一搜 labuladong公众号

学算法认准 labuladong，致力于把算法讲清楚！网页版 点这里。

读完本文，你不仅学会了算法套路，还可以顺便解决如下题目：

LeetCode	力扣	难度
773. Sliding Puzzle	773. 滑动谜题	🔴

滑动拼图游戏大家应该都玩过，下图是一个 4x4 的滑动拼图：



拼图中有一个格子是空的，可以利用这个空着的格子移动其他数字。你需要通过移动这些数字，得到某个特定排列顺序，这样就算赢了。

我小时候还玩过一款叫做「华容道」的益智游戏，也和滑动拼图比较类似：

实际上，滑动拼图游戏也叫数字华容道，你看它俩挺相似的。

那么这种游戏怎么玩呢？我记得是有一些套路的，类似于魔方还原公式。但是我们今天不来研究让人头秃的技巧，**这些益智游戏通通可以用暴力搜索算法解决，所以今天我们就学以致用，用 BFS 算法框架来秒杀这些游戏**。

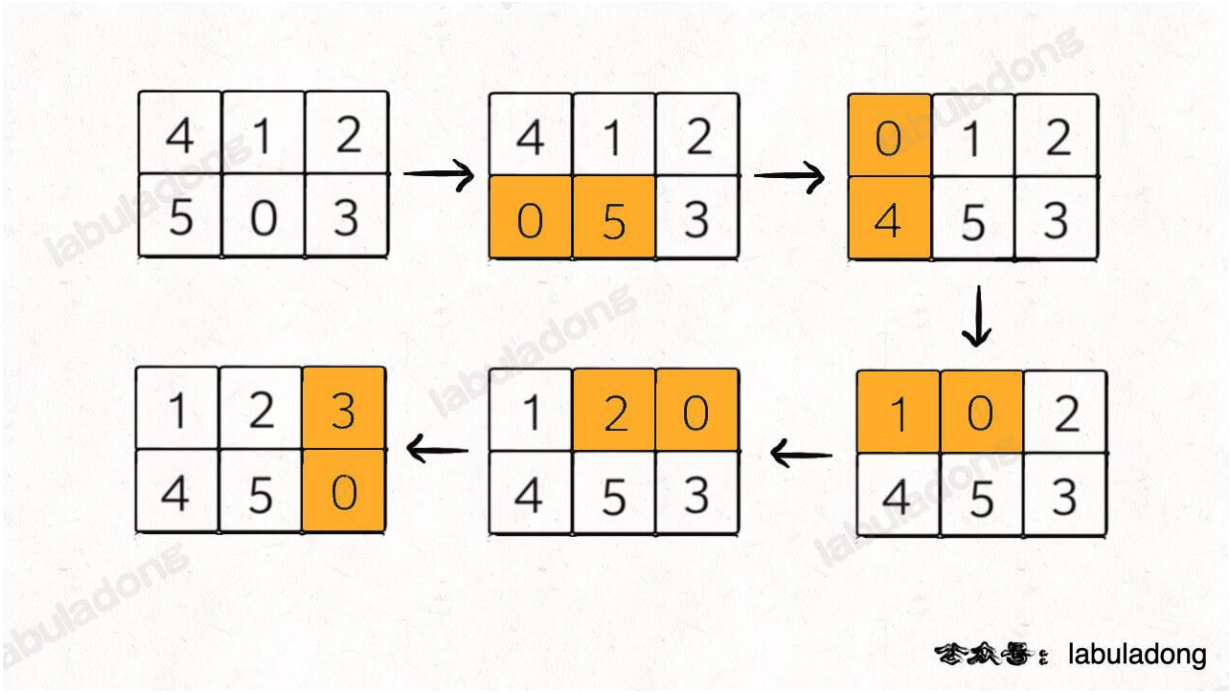
一、题目解析

力扣第 773 题「滑动谜题」就是这个问题，题目的要求如下：

给你一个 2x3 的滑动拼图，用一个 2x3 的数组 `board` 表示。拼图中有数字 0~5 六个数，其中**数字 0 就表示那个空着的格子**，你可以移动其中的数字，当 `board` 变为 `[[1,2,3],[4,5,0]]` 时，赢得游戏。

请你写一个算法，计算赢得游戏需要的最少移动次数，如果不能赢得游戏，返回 -1。

比如说输入的二维数组 `board = [[4,1,2],[5,0,3]]`，算法应该返回 5：



如果输入的是 `board = [[1,2,3],[5,4,0]]`，则算法返回 -1，因为这种局面下无论如何都不能赢得游戏。

二、思路分析

对于这种计算最小步数的问题，我们就要敏感地想到 BFS 算法。

这个题目转化成 BFS 问题是有一些技巧的，我们面临如下问题：

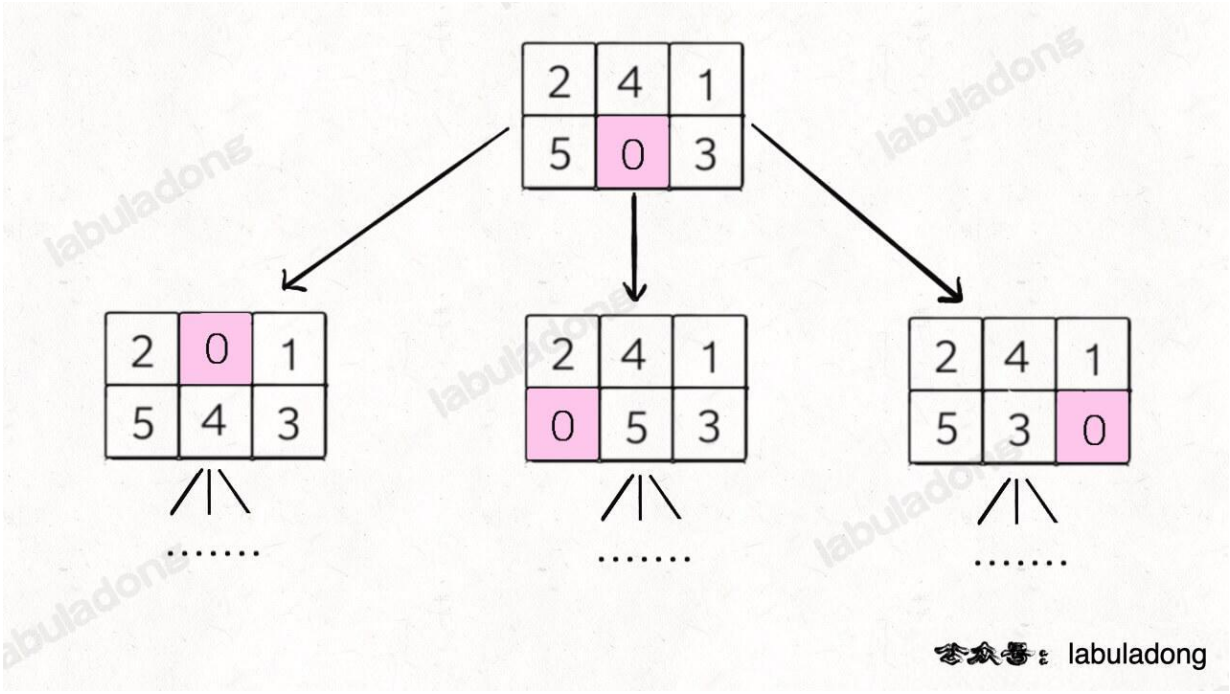
1、一般的 BFS 算法，是从一个起点 `start` 开始，向终点 `target` 进行寻路，但是拼图问题不是在寻路，而是在不断交换数字，这应该怎么转化成 BFS 算法问题呢？

2、即便这个问题能够转化成 BFS 问题，如何处理起点 `start` 和终点 `target`？它们都是数组哎，把数组放进队列，套 BFS 框架，想想就比较麻烦且低效。

首先回答第一个问题，**BFS 算法并不只是一个寻路算法，而是一种暴力搜索算法**，只要涉及暴力穷举的问题，BFS 就可以用，而且可以最快地找到答案。

你想想计算机怎么解决问题的？哪有什么特殊技巧，本质上就是把所有可行解暴力穷举出来，然后从中找到一个最优解罢了。

明白了这个道理，我们的问题就转化成了：**如何穷举出 `board` 当前局面下可能衍生出的所有局面**？这就简单了，看数字 0 的位置呗，和上下左右的数字进行交换就行了：



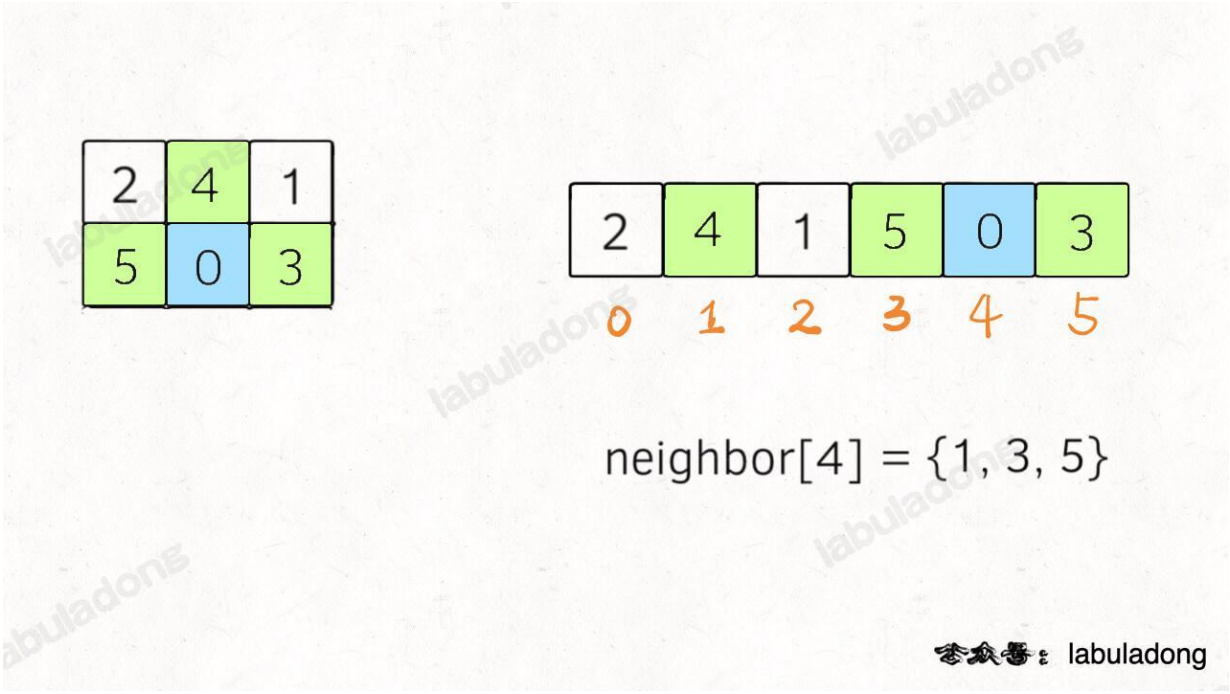
这样其实就是一个 BFS 问题，每次先找到数字 0，然后和周围的数字进行交换，形成新的局面加入队列……当第一次到达 `target` 时，就得到了赢得游戏的最少步数。

对于第二个问题，我们这里的 `board` 仅仅是 2x3 的二维数组，所以可以压缩成一个一维字符串。**其中比较有技巧性的点在于，二维数组有「上下左右」的概念，压缩成一维后，如何得到某一个索引上下左右的索引**？

对于这道题，题目说输入的数组大小都是 2 x 3，所以我们可以直接手动写出来这个映射：

```
// 记录一维字符串的相邻索引
int[][] neighbor = new int[][]{
        {1, 3},
        {0, 4, 2},
        {1, 5},
        {0, 4},
        {3, 1, 5},
        {4, 2}
};
```

这个含义就是，在一维字符串中，索引 `i` 在二维数组中的的相邻索引为 `neighbor[i]`：



那么对于一个 `m x n` 的二维数组，手写它的一维索引映射肯定不现实了，如何用代码生成它的一维索引映射呢？

观察上图就能发现，如果二维数组中的某个元素 `e` 在一维数组中的索引为 `i`，那么 `e` 的左右相邻元素在一维数组中的索引就是 `i - 1` 和 `i + 1`，而 `e` 的上下相邻元素在一维数组中的索引就是 `i - n` 和 `i + n`，其中 `n` 为二维数组的列数。

这样，对于 `m x n` 的二维数组，我们可以写一个函数来生成它的 `neighbor` 索引映射：

```
int[][] generateNeighborMapping(int m, int n) {
    int[][] neighbor = new int[m * n][];
    for (int i = 0; i < m * n; i++) {
        List<Integer> neighbors = new ArrayList<>();

        // 如果不是第一列，有左侧邻居
        if (i % n != 0) neighbors.add(i - 1);
        // 如果不是最后一列，有右侧邻居
        if (i % n != n - 1) neighbors.add(i + 1);
        // 如果不是第一行，有上方邻居
        if (i - n >= 0) neighbors.add(i - n);
        // 如果不是最后一行，有下方邻居
        if (i + n < m * n) neighbors.add(i + n);

        // Java 语言特性，将 List 类型转为 int[] 数组
        neighbor[i] =
neighbors.stream().mapToInt(Integer::intValue).toArray();
    }
    return neighbor;
}
```

至此，我们就把这个问题完全转化成标准的 BFS 问题了，借助前文 BFS 算法框架 的代码框架，直接就可以套出解法代码了：

```java
class Solution {
    public int slidingPuzzle(int[][] board) {
        int m = 2, n = 3;
        StringBuilder sb = new StringBuilder();
        String target = "123450";
        // 将 2x3 的数组转化成字符串作为 BFS 的起点
        for (int i = 0; i < m; i++) {
            for (int j = 0; j < n; j++) {
                sb.append(board[i][j]);
            }
        }
        String start = sb.toString();

        // 记录一维字符串的相邻索引
        int[][] neighbor = new int[][]{
                {1, 3},
                {0, 4, 2},
                {1, 5},
                {0, 4},
                {3, 1, 5},
                {4, 2}
        };

        /******* BFS 算法框架开始 *******/
        Queue<String> q = new LinkedList<>();
        HashSet<String> visited = new HashSet<>();
        // 从起点开始 BFS 搜索
        q.offer(start);
        visited.add(start);

        int step = 0;
        while (!q.isEmpty()) {
            int sz = q.size();
            for (int i = 0; i < sz; i++) {
                String cur = q.poll();
                // 判断是否达到目标局面
                if (target.equals(cur)) {
                    return step;
                }
                // 找到数字 0 的索引
                int idx = 0;
                for (; cur.charAt(idx) != '0'; idx++) ;
                // 将数字 0 和相邻的数字交换位置
                for (int adj : neighbor[idx]) {
                    String new_board = swap(cur.toCharArray(), adj, idx);
                    // 防止走回头路
                    if (!visited.contains(new_board)) {
                        q.offer(new_board);
                        visited.add(new_board);
                    }
                }
            }
```

```
            step++;
        }
        /******* BFS 算法框架结束 *******/
        return -1;
    }

    private String swap(char[] chars, int i, int j) {
        char temp = chars[i];
        chars[i] = chars[j];
        chars[j] = temp;
        return new String(chars);
    }
}
```

▶ 🎮 代码可视化动画🎮

至此，这道题目就解决了，其实框架完全没有变，套路都是一样的，我们只是花了比较多的时间将滑动拼图游戏转化成 BFS 算法。

很多益智游戏都是这样，虽然看起来特别巧妙，但都架不住暴力穷举，常用的算法就是回溯算法或者 BFS 算法。

如果你有高质量的问题，可以 点击这里 进入本文的讨论区。

▶ 引用本文的题目

安装 我的 Chrome 刷题插件 点开下列题目可直接查看解题思路：

LeetCode	力扣
365. Water and Jug Problem	365. 水壶问题

▶ 引用本文的文章

- BFS 算法解题套路框架

———————————————

更多精品课程可查看 我的网站；扫码查看更多配套学习套件：

算法学习网站：https://labuladong.gitee.io/algo/ 或 https://labuladong.github.io/algo/

二维码太多，长按识别不到？放大图片 -> 让对应二维码充满屏幕 -> 长按识别该二维码

悟剑篇、动态规划

动态规划的底层逻辑也是穷举，只不过动态规划问题具有一些特殊的性质，使得穷举的过程中存在可优化的空间。

这里先提醒你，学习动态规划问题要格外注意这几个词：「**状态**」，「**选择**」，「**dp 数组的定义**」。你把这几个词理解到位了，就理解了动态规划的核心。

当然，动态规划问题的题型非常广泛，我不能保证你理解了核心就能做出所有动态规划题目，但我保证你理解了核心原理之后可以很轻松地理解别人的正确解法。如果自己勤加练习和总结，解决大部分中上难度的动态规划问题应该是没什么问题的。

公众号标签：手把手刷动态规划

4.1 动态规划核心原理

关于这一章的重要性，我觉得不需要再强调了。

字越少，重要性越高，相信你会时常回来温习本章的内容。

名称	最新版本号	详情
PDF 教材	V5.2	下载
刷题打卡挑战	开放报名	报名
网站会员	V已上线	购买
Chrome 刷题插件	V4.4.3	使用手册
vscode 刷题插件	V1.5.4	使用手册
JetBrains IDE 刷题插件	V1.8.6	使用手册

动态规划解题核心框架

Stars 123k 精品课程 查看 知乎 @labuladong B站 @labuladong

微信搜一搜 labuladong公众号

学算法认准 labuladong，致力于把算法讲清楚！网页版 点这里。

读完本文，你不仅学会了算法套路，还可以顺便解决如下题目：

LeetCode	力扣	难度
322. Coin Change	322. 零钱兑换	🟠
509. Fibonacci Number	509. 斐波那契数	🟢
-	剑指 Offer II 103. 最少的硬币数目	🟠

> tip：本文有视频版：动态规划框架套路详解。建议关注我的 B 站账号，我会用视频领读的方式带大家学习那些稍有难度的算法技巧。

这篇文章是我们公众号半年前一篇 200 多赞赏的成名之作 动态规划详解 的进阶版。由于账号迁移的原因，旧文无法被搜索到，所以我润色了本文，并添加了更多干货内容，希望本文成为解决动态规划的一部「指导方针」。

动态规划问题（Dynamic Programming）应该是很多读者头疼的，不过这类问题也是最具有技巧性，最有意思的。本书使用了整整一个章节专门来写这个算法，动态规划的重要性也可见一斑。

本文解决几个问题：

动态规划是什么？解决动态规划问题有什么技巧？如何学习动态规划？

刷题刷多了就会发现，算法技巧就那几个套路，我们后续的动态规划系列章节，都在使用本文的解题框架思维，如果你心里有数，就会轻松很多。所以本文放在第一章，来扒一扒动态规划的裤子，形成一套解决这类问题的思维框架，希望能够成为解决动态规划问题的一部指导方针。本文就来讲解该算法的基本套路框架，下面上干货。

首先，**动态规划问题的一般形式就是求最值**。动态规划其实是运筹学的一种最优化方法，只不过在计算机问题上应用比较多，比如说让你求最长递增子序列呀，最小编辑距离呀等等。

既然是要求最值，核心问题是什么呢？**求解动态规划的核心问题是穷举**。因为要求最值，肯定要把所有可行的答案穷举出来，然后在其中找最值呗。

动态规划这么简单，就是穷举就完事了？我看到的动态规划问题都很难啊！

首先，虽然动态规划的核心思想就是穷举求最值，但是问题可以千变万化，穷举所有可行解其实并不是一件容易的事，需要你熟练掌握递归思维，只有列出**正确的「状态转移方程」**，才能正确地穷举。而且，你需要判断算法问题是否**具备「最优子结构」**，是否能够通过子问题的最值得到原问题的最值。另外，动态规划问题**存在「重叠子问题」**，如果暴力穷举的话效率会很低，所以需要你使用「备忘录」或者「DP table」来优化穷举过程，避免不必要的计算。

以上提到的重叠子问题、最优子结构、状态转移方程就是动态规划三要素。具体什么意思等会会举例详解，但是在实际的算法问题中，写出状态转移方程是最困难的，这也就是为什么很多朋友觉得动态规划问题困难的原因，我来提供我总结的一个思维框架，辅助你思考状态转移方程：

明确 base case -> 明确「状态」-> 明确「选择」 -> 定义 dp 数组/函数的含义。

按上面的套路走，最后的解法代码就会是如下的框架：

```
# 自顶向下递归的动态规划
def dp(状态1, 状态2, ...):
    for 选择 in 所有可能的选择:
        # 此时的状态已经因为做了选择而改变
        result = 求最值(result, dp(状态1, 状态2, ...))
    return result

# 自底向上迭代的动态规划
# 初始化 base case
dp[0][0][...] = base case
# 进行状态转移
for 状态1 in 状态1的所有取值:
    for 状态2 in 状态2的所有取值:
        for ...
            dp[状态1][状态2][...] = 求最值(选择1, 选择2...)
```

下面通过斐波那契数列问题和凑零钱问题来详解动态规划的基本原理。前者主要是让你明白什么是重叠子问题（斐波那契数列没有求最值，所以严格来说不是动态规划问题），后者主要举集中于如何列出状态转移方程。

一、斐波那契数列

力扣第 509 题「斐波那契数」就是这个问题，请读者不要嫌弃这个例子简单，**只有简单的例子才能让你把精力充分集中在算法背后的通用思想和技巧上，而不会被那些隐晦的细节问题搞的莫名其妙**。想要困难的例子，接下来的动态规划系列里有的是。

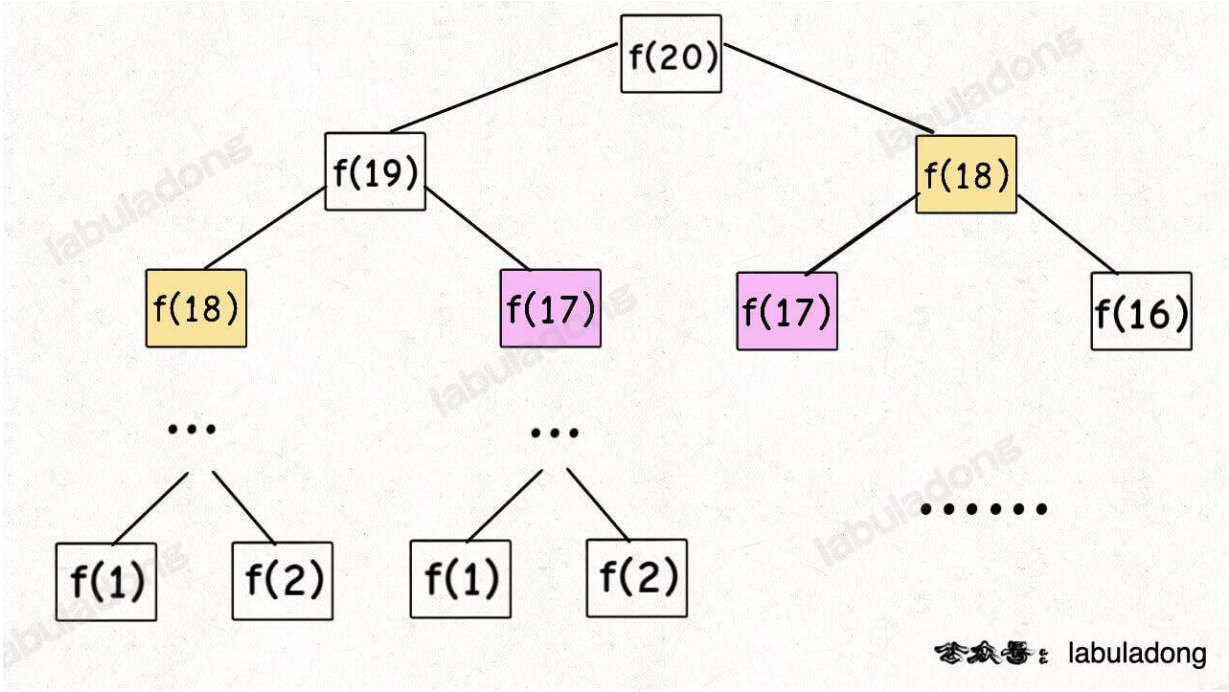
1、暴力递归

斐波那契数列的数学形式就是递归的，写成代码就是这样：

```
int fib(int N) {
    if (N == 1 || N == 2) return 1;
    return fib(N - 1) + fib(N - 2);
}
```

▶ 🌟 代码可视化动画🌟

这个不用多说了，学校老师讲递归的时候似乎都是拿这个举例。我们也知道这样写代码虽然简洁易懂，但是十分低效，低效在哪里？假设 n = 20，请画出递归树：



> 但凡遇到需要递归的问题，最好都画出递归树，这对你分析算法的复杂度，寻找算法低效的原因都有巨大帮助。

这个递归树怎么理解？就是说想要计算原问题 `f(20)`，我就得先计算出子问题 `f(19)` 和 `f(18)`，然后要计算 `f(19)`，我就要先算出子问题 `f(18)` 和 `f(17)`，以此类推。最后遇到 `f(1)` 或者 `f(2)` 的时候，结果已知，就能直接返回结果，递归树不再向下生长了。

递归算法的时间复杂度怎么计算？就是用子问题个数乘以解决一个子问题需要的时间。

首先计算子问题个数，即递归树中节点的总数。显然二叉树节点总数为指数级别，所以子问题个数为 O(2^n)。

然后计算解决一个子问题的时间，在本算法中，没有循环，只有 `f(n - 1) + f(n - 2)` 一个加法操作，时间为 O(1)。

所以，这个算法的时间复杂度为二者相乘，即 O(2^n)，指数级别，爆炸。

观察递归树，很明显发现了算法低效的原因：存在大量重复计算，比如 `f(18)` 被计算了两次，而且你可以看到，以 `f(18)` 为根的这个递归树体量巨大，多算一遍，会耗费巨大的时间。更何况，还不止 `f(18)` 这一个节点被重复计算，所以这个算法及其低效。

这就是动态规划问题的第一个性质：**重叠子问题**。下面，我们想办法解决这个问题。

2、带备忘录的递归解法

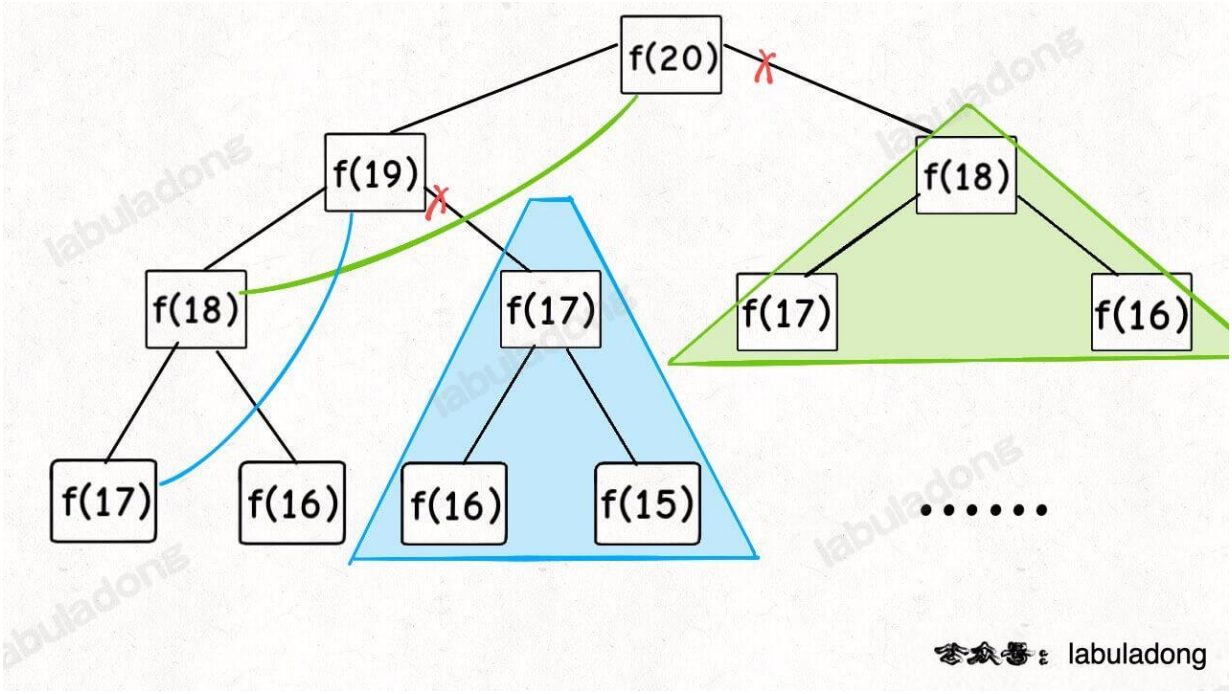
明确了问题，其实就已经把问题解决了一半。即然耗时的原因是重复计算，那么我们可以造一个「备忘录」，每次算出某个子问题的答案后别急着返回，先记到「备忘录」里再返回；每次遇到一个子问题先去「备忘录」里查一查，如果发现之前已经解决过这个问题了，直接把答案拿出来用，不要再耗时去计算了。

一般使用一个数组充当这个「备忘录」，当然你也可以使用哈希表（字典），思想都是一样的。

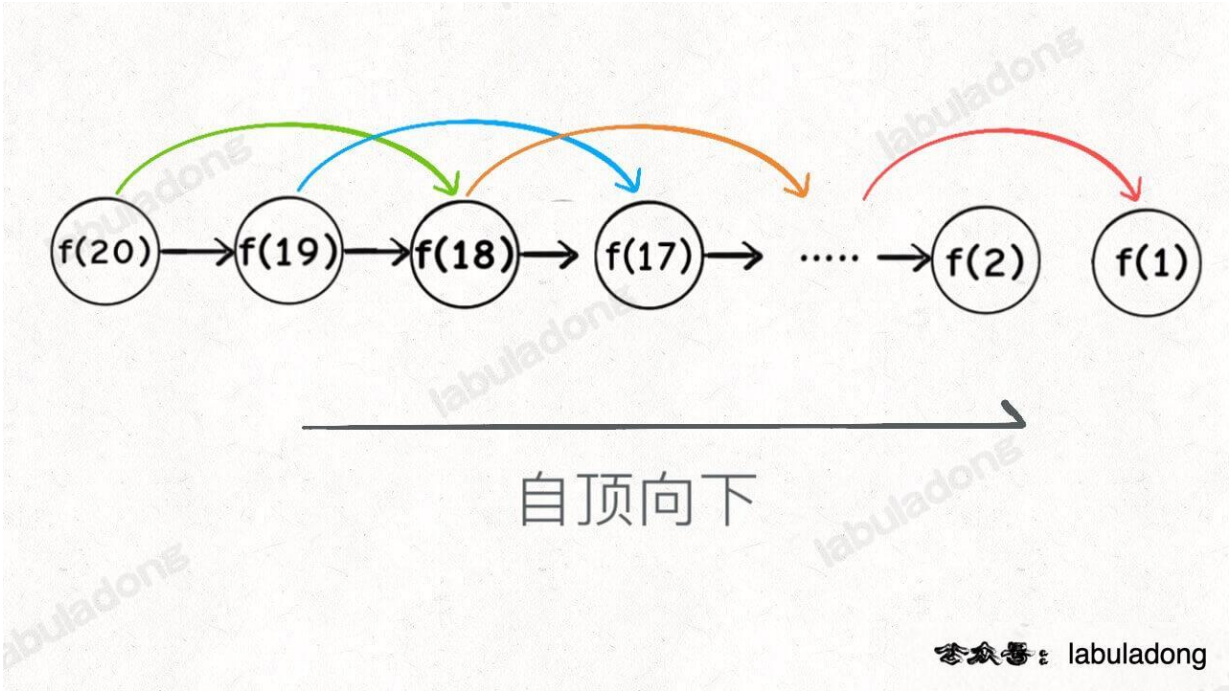
```
int fib(int N) {
    // 备忘录全初始化为 0
    int[] memo = new int[N + 1];
    // 进行带备忘录的递归
    return dp(memo, N);
}

// 带着备忘录进行递归
int dp(int[] memo, int n) {
    // base case
    if (n == 0 || n == 1) return n;
    // 已经计算过，不用再计算了
    if (memo[n] != 0) return memo[n];
    memo[n] = dp(memo, n - 1) + dp(memo, n - 2);
    return memo[n];
}
```

▶ 🎃 代码可视化动画🎃

现在，画出递归树，你就知道「备忘录」到底做了什么。



实际上，带「备忘录」的递归算法，把一棵存在巨量冗余的递归树通过「剪枝」，改造成了一幅不存在冗余的递归图，极大减少了子问题（即递归图中节点）的个数。



递归算法的时间复杂度怎么计算？就是用子问题个数乘以解决一个子问题需要的时间。

子问题个数，即图中节点的总数，由于本算法不存在冗余计算，子问题就是 `f(1)`, `f(2)`, `f(3)` ... `f(20)`，数量和输入规模 n = 20 成正比，所以子问题个数为 O(n)。

解决一个子问题的时间，同上，没有什么循环，时间为 O(1)。

所以，本算法的时间复杂度是 O(n)，比起暴力算法，是降维打击。

至此，带备忘录的递归解法的效率已经和迭代的动态规划解法一样了。实际上，这种解法和常见的动态规划解法已经差不多了，只不过这种解法是「自顶向下」进行「递归」求解，我们更常见的动态规划代码是「自底向上」进行「递推」求解。

啥叫「自顶向下」？注意我们刚才画的递归树（或者说图），是从上向下延伸，都是从一个规模较大的原问题比如说 `f(20)`，向下逐渐分解规模，直到 `f(1)` 和 `f(2)` 这两个 base case，然后逐层返回答案，这就叫「自顶向下」。

啥叫「自底向上」？反过来，我们直接从最底下、最简单、问题规模最小、已知结果的 `f(1)` 和 `f(2)`（base case）开始往上推，直到推到我们想要的答案 `f(20)`。这就是「递推」的思路，这也是动态规划一般都脱离了递归，而是由循环迭代完成计算的原因。

3、dp 数组的迭代（递推）解法

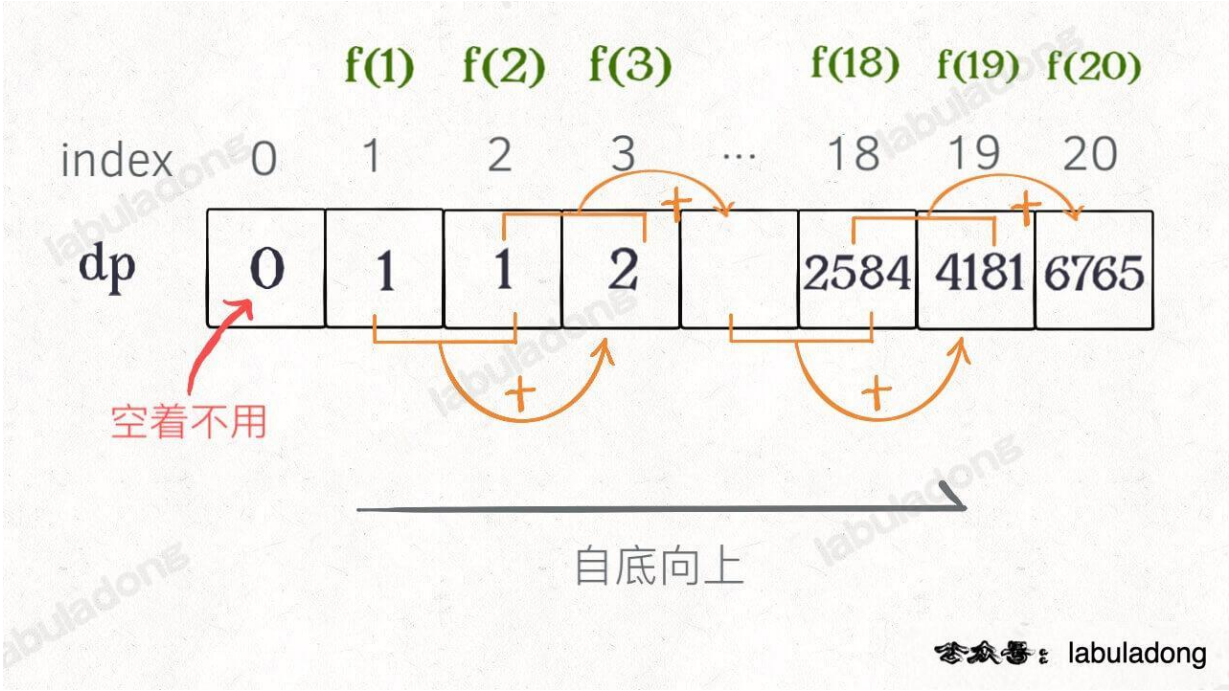
有了上一步「备忘录」的启发，我们可以把这个「备忘录」独立出来成为一张表，通常叫做 DP table，在这张表上完成「自底向上」的推算岂不美哉！

```
int fib(int N) {
    if (N == 0) return 0;
    int[] dp = new int[N + 1];
    // base case
    dp[0] = 0; dp[1] = 1;
    // 状态转移
    for (int i = 2; i <= N; i++) {
```

```
            dp[i] = dp[i - 1] + dp[i - 2];
        }

        return dp[N];
    }
```

▶ 🌟 代码可视化动画🌟

画个图就很好理解了，而且你发现这个 DP table 特别像之前那个「剪枝」后的结果，只是反过来算而已：



实际上，带备忘录的递归解法中的那个「备忘录」memo 数组，最终完成后就是这个解法中的 dp 数组，你对比一下可视化面板中两个算法执行的过程可以更直观地看出它俩的联系。

所以说自顶向下、自底向上两种解法本质其实是差不多的，大部分情况下，效率也基本相同。

这里，引出「状态转移方程」这个名词，实际上就是描述问题结构的数学形式：

$$f(n) = \begin{cases} 1, n = 1, 2 \\ f(n-1) + f(n-2), n > 2 \end{cases}$$

为啥叫「状态转移方程」？其实就是为了听起来高端。

f(n) 的函数参数会不断变化，所以你把参数 n 想做一个状态，这个状态 n 是由状态 n - 1 和状态 n - 2 转移（相加）而来，这就叫状态转移，仅此而已。

你会发现，上面的几种解法中的所有操作，例如 return f(n - 1) + f(n - 2)，dp[i] = dp[i - 1] + dp[i - 2]，以及对备忘录或 DP table 的初始化操作，都是围绕这个方程式的不同表现形式。

可见列出「状态转移方程」的重要性，它是解决问题的核心，而且很容易发现，其实状态转移方程直接代表着暴力解法。

千万不要看不起暴力解，动态规划问题最困难的就是写出这个暴力解，即状态转移方程。

只要写出暴力解，优化方法无非是用备忘录或者 DP table，再无奥妙可言。

这个例子的最后，讲一个细节优化。

细心的读者会发现，根据斐波那契数列的状态转移方程，当前状态 n 只和之前的 n-1, n-2 两个状态有关，其实并不需要那么长的一个 DP table 来存储所有的状态，只要想办法存储之前的两个状态就行了。

所以，可以进一步优化，把空间复杂度降为 O(1)。这也就是我们最常见的计算斐波那契数的算法：

```
int fib(int n) {
    if (n == 0 || n == 1) {
        // base case
        return n;
    }
    // 分别代表 dp[i - 1] 和 dp[i - 2]
    int dp_i_1 = 1, dp_i_2 = 0;
    for (int i = 2; i <= n; i++) {
        // dp[i] = dp[i - 1] + dp[i - 2];
        int dp_i = dp_i_1 + dp_i_2;
        // 滚动更新
        dp_i_2 = dp_i_1;
        dp_i_1 = dp_i;
    }
    return dp_i_1;
}
```

▶ 🎃 代码可视化动画🎃

这一般是动态规划问题的最后一步优化，如果我们发现每次状态转移只需要 DP table 中的一部分，那么可以尝试缩小 DP table 的大小，只记录必要的数据，从而降低空间复杂度。

上述例子就相当于把 DP table 的大小从 n 缩小到 2。我会在后文 对动态规划发动降维打击 进一步讲解这个压缩空间复杂度的技巧，一般来说用来把一个二维的 DP table 压缩成一维，即把空间复杂度从 O(n^2) 压缩到 O(n)。

有人会问，动态规划的另一个重要特性「最优子结构」，怎么没有涉及？下面会涉及。斐波那契数列的例子严格来说不算动态规划，因为没有涉及求最值，以上旨在说明重叠子问题的消除方法，演示得到最优解法逐步求精的过程。下面，看第二个例子，凑零钱问题。

二、凑零钱问题

这是力扣第 322 题「零钱兑换」：

给你 k 种面值的硬币，面值分别为 c1, c2 ... ck，每种硬币的数量无限，再给一个总金额 amount，问你**最少**需要几枚硬币凑出这个金额，如果不可能凑出，算法返回 -1 。算法的函数签名如下：

```
// coins 中是可选硬币面值，amount 是目标金额
int coinChange(int[] coins, int amount);
```

比如说 k = 3，面值分别为 1，2，5，总金额 amount = 11。那么最少需要 3 枚硬币凑出，即 11 = 5 + 5 + 1。

你认为计算机应该如何解决这个问题？显然，就是把所有可能的凑硬币方法都穷举出来，然后找找看最少需要多少枚硬币。

1、暴力递归

首先，这个问题是动态规划问题，因为它具有「最优子结构」的。**要符合「最优子结构」，子问题间必须互相独立**。啥叫相互独立？你肯定不想看数学证明，我用一个直观的例子来讲解。

比如说，假设你考试，每门科目的成绩都是互相独立的。你的原问题是考出最高的总成绩，那么你的子问题就是要把语文考到最高，数学考到最高……为了每门课考到最高，你要把每门课相应的选择题分数拿到最高，填空题分数拿到最高……当然，最终就是你每门课都是满分，这就是最高的总成绩。

得到了正确的结果：最高的总成绩就是总分。因为这个过程符合最优子结构，「每门科目考到最高」这些子问题是互相独立，互不干扰的。

但是，如果加一个条件：你的语文成绩和数学成绩会互相制约，不能同时达到满分，数学分数高，语文分数就会降低，反之亦然。

这样的话，显然你能考到的最高总成绩就达不到总分了，按刚才那个思路就会得到错误的结果。因为「每门科目考到最高」的子问题并不独立，语文数学成绩户互相影响，无法同时最优，所以最优子结构被破坏。

回到凑零钱问题，为什么说它符合最优子结构呢？假设你有面值为 1, 2, 5 的硬币，你想求 amount = 11 时的最少硬币数（原问题），如果你知道凑出 amount = 10, 9, 6 的最少硬币数（子问题），你只需要把子问题的答案加一（再选一枚面值为 1, 2, 5 的硬币），求个最小值，就是原问题的答案。因为硬币的数量是没有限制的，所以子问题之间没有相互制，是互相独立的。

> 关于最优子结构的问题，后文 动态规划答疑篇 还会再举例探讨。

那么，既然知道了这是个动态规划问题，就要思考如何列出正确的状态转移方程？

1、确定 base case，这个很简单，显然目标金额 amount 为 0 时算法返回 0，因为不需要任何硬币就已经凑出目标金额了。

2、确定「状态」，也就是原问题和子问题中会变化的变量。由于硬币数量无限，硬币的面额也是题目给定的，只有目标金额会不断地向 base case 靠近，所以唯一的「状态」就是目标金额 amount。

3、确定「选择」，也就是导致「状态」产生变化的行为。目标金额为什么变化呢，因为你在选择硬币，你每选择一枚硬币，就相当于减少了目标金额。所以说所有硬币的面值，就是你的「选择」。

4、明确 dp 函数/数组的定义。我们这里讲的是自顶向下的解法，所以会有一个递归的 dp 函数，一般来说函数的参数就是状态转移中会变化的量，也就是上面说到的「状态」；函数的返回值就是题目要求我们计算的量。就本题来说，状态只有一个，即「目标金额」，题目要求我们计算凑出目标金额所需的最少硬币数量。

所以我们可以这样定义 dp 函数：dp(n) 表示，输入一个目标金额 n，返回凑出目标金额 n 所需的最少硬币数量。

搞清楚上面这几个关键点，解法的伪码就可以写出来了：

```
// 伪码框架
int coinChange(int[] coins, int amount) {
    // 题目要求的最终结果是 dp(amount)
    return dp(coins, amount)
}

// 定义：要凑出金额 n，至少要 dp(coins, n) 个硬币
int dp(int[] coins, int n) {
    // 做选择，选择需要硬币最少的那个结果
    for (int coin : coins) {
        res = min(res, 1 + dp(coins, n - coin))
    }
    return res
}
```

根据伪码，我们加上 base case 即可得到最终的答案。显然目标金额为 0 时，所需硬币数量为 0；当目标金额小于 0 时，无解，返回 -1：

```
int coinChange(int[] coins, int amount) {
    // 题目要求的最终结果是 dp(amount)
    return dp(coins, amount)
}

// 定义：要凑出金额 n，至少要 dp(coins, n) 个硬币
int dp(int[] coins, int amount) {
    // base case
    if (amount == 0) return 0;
    if (amount < 0) return -1;

    int res = Integer.MAX_VALUE;
    for (int coin : coins) {
        // 计算子问题的结果
        int subProblem = dp(coins, amount - coin);
        // 子问题无解则跳过
        if (subProblem == -1) continue;
        // 在子问题中选择最优解，然后加一
        res = Math.min(res, subProblem + 1);
    }

    return res == Integer.MAX_VALUE ? -1 : res;
}
```

> 这里 coinChange 和 dp 函数的签名完全一样，所以理论上不需要额外写一个 dp 函数。但为了后文讲解方便，这里还是另写一个 dp 函数来实现主要逻辑。

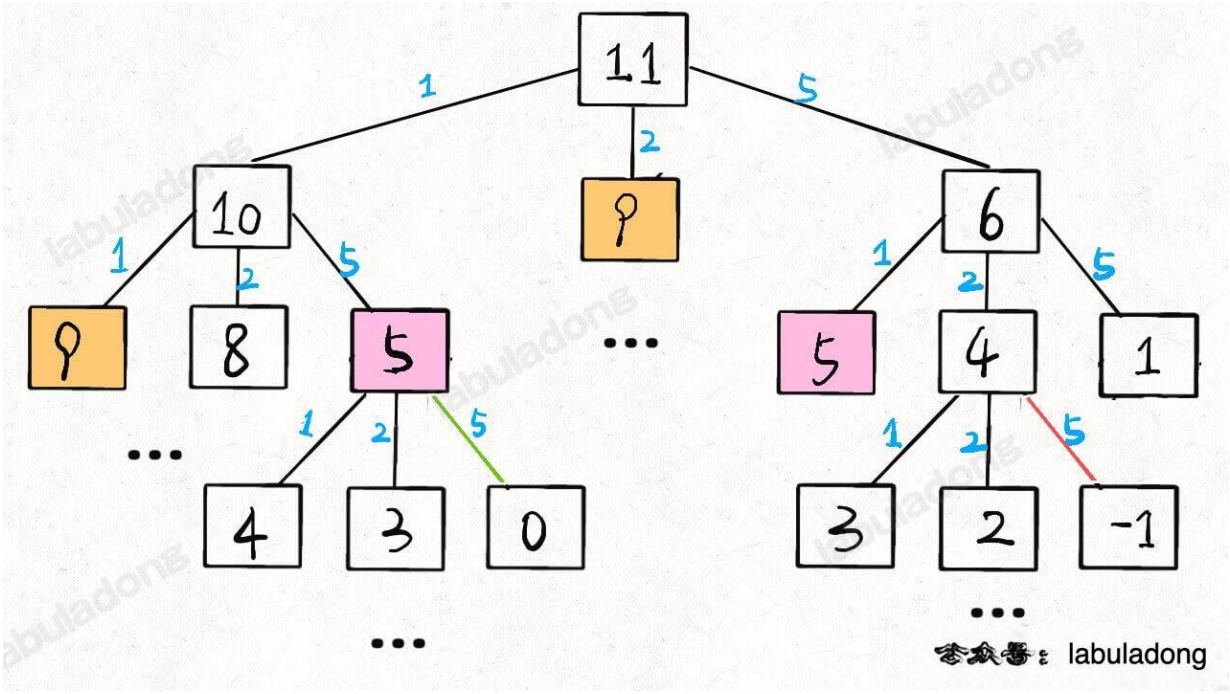
> 另外，我经常看到有人问，子问题的结果为什么要加 1（subProblem + 1），而不是加硬币金额之类的。我这里统一提示一下，动态规划问题的关键是 dp 函数/数组的定义，你这个函数的返回值代表什么？你回过头去搞清楚这一点，然后就知道为什么要给子问题的返回值加 1 了。

▶ 🌟 代码可视化动画🌟

至此，状态转移方程其实已经完成了，以上算法已经是暴力解法了，以上代码的数学形式就是状态转移方程：

$$dp(n) = \begin{cases} 0, n = 0 \\ -1, n < 0 \\ min\{dp(n - coin) + 1 | coin \in coins\}, n > 0 \end{cases}$$

至此，这个问题其实就解决了，只不过需要消除一下重叠子问题，比如 amount = 11, coins = {1,2,5} 时画出递归树看看：



递归算法的时间复杂度分析：子问题总数 x 解决每个子问题所需的时间。

子问题总数为递归树的节点个数，但算法会进行剪枝，剪枝的时机和题目给定的具体硬币面额有关，所以可以想象，这棵树生长的并不规则，确切算出树上有多少节点是比较困难的。对于这种情况，我们一般的做法是按照最坏的情况估算一个时间复杂度的上界。

假设目标金额为 n，给定的硬币个数为 k，那么递归树最坏情况下高度为 n（全用面额为 1 的硬币），然后再假设这是一棵满 k 叉树，则节点的总数在 k^n 这个数量级。

接下来看每个子问题的复杂度，由于每次递归包含一个 for 循环，复杂度为 O(k)，相乘得到总时间复杂度为 O(k^n)，指数级别。

2、带备忘录的递归

类似之前斐波那契数列的例子，只需要稍加修改，就可以通过备忘录消除子问题：

```
class Solution {
    int[] memo;

    int coinChange(int[] coins, int amount) {
        memo = new int[amount + 1];
        // 备忘录初始化为一个不会被取到的特殊值，代表还未被计算
        Arrays.fill(memo, -666);

        return dp(coins, amount);
    }

    int dp(int[] coins, int amount) {
        if (amount == 0) return 0;
        if (amount < 0) return -1;
        // 查备忘录，防止重复计算
        if (memo[amount] != -666)
            return memo[amount];

        int res = Integer.MAX_VALUE;
        for (int coin : coins) {
            // 计算子问题的结果
            int subProblem = dp(coins, amount - coin);
            // 子问题无解则跳过
            if (subProblem == -1) continue;
            // 在子问题中选择最优解，然后加一
            res = Math.min(res, subProblem + 1);
        }
        // 把计算结果存入备忘录
        memo[amount] = (res == Integer.MAX_VALUE) ? -1 : res;
        return memo[amount];
    }
}
```

▶ 👾 代码可视化动画👾

不画图了，很显然「备忘录」大大减小了子问题数目，完全消除了子问题的冗余，所以子问题总数不会超过金额数 n，即子问题数目为 O(n)。处理一个子问题的时间不变，仍是 O(k)，所以总的时间复杂度是 O(kn)。

3、dp 数组的迭代解法

当然，我们也可以自底向上使用 dp table 来消除重叠子问题，关于「状态」「选择」和 base case 与之前没有区别，dp 数组的定义和刚才 dp 函数类似，也是把「状态」，也就是目标金额作为变量。不过 dp 函数体

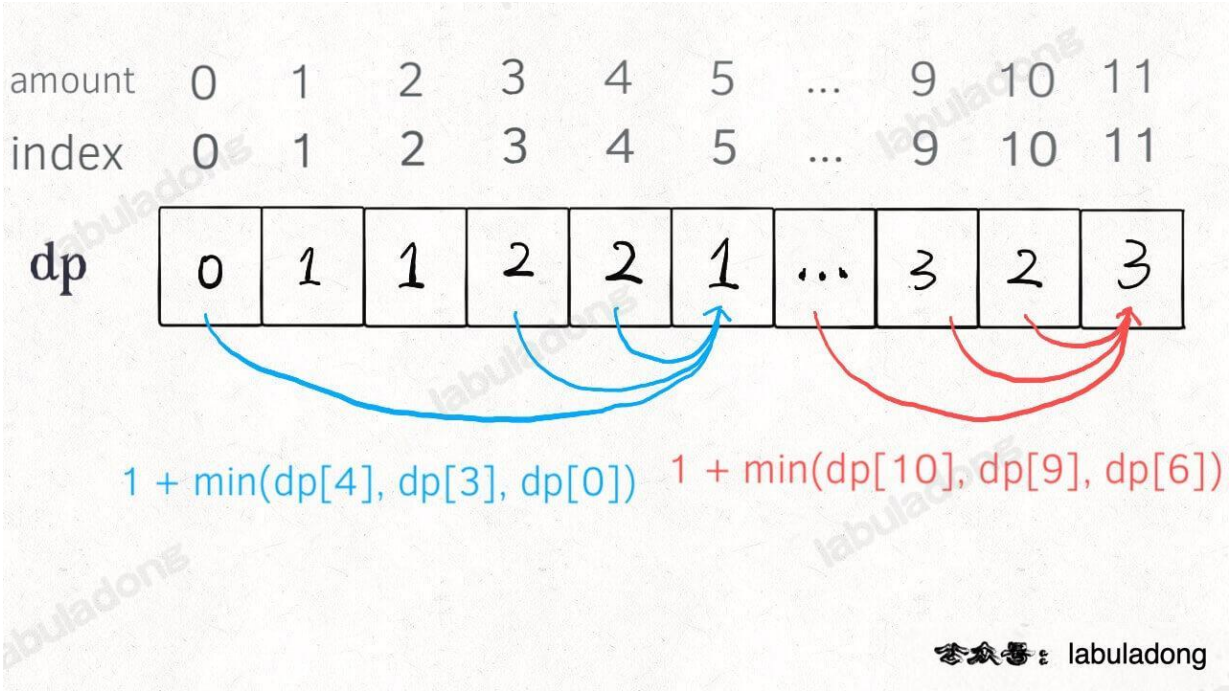
现在函数参数，而 dp 数组体现在数组索引：

dp 数组的定义：当目标金额为 i 时，至少需要 dp[i] 枚硬币凑出。

根据我们文章开头给出的动态规划代码框架可以写出如下解法：

```
int coinChange(int[] coins, int amount) {
    int[] dp = new int[amount + 1];
    // 数组大小为 amount + 1，初始值也为 amount + 1
    Arrays.fill(dp, amount + 1);

    // base case
    dp[0] = 0;
    // 外层 for 循环在遍历所有状态的所有取值
    for (int i = 0; i < dp.length; i++) {
        // 内层 for 循环在求所有选择的最小值
        for (int coin : coins) {
            // 子问题无解，跳过
            if (i - coin < 0) {
                continue;
            }
            dp[i] = Math.min(dp[i], 1 + dp[i - coin]);
        }
    }
    return (dp[amount] == amount + 1) ? -1 : dp[amount];
}
```

> 为啥 dp 数组中的值都初始化为 amount + 1 呢，因为凑成 amount 金额的硬币数最多只可能等于 amount（全用 1 元面值的硬币），所以初始化为 amount + 1 就相当于初始化为正无穷，便于后续取最小值。为啥不直接初始化为 int 型的最大值 Integer.MAX_VALUE 呢？因为后面有 dp[i - coin] + 1，这就会导致整型溢出。



三、最后总结

第一个斐波那契数列的问题，解释了如何通过「备忘录」或者「dp table」的方法来优化递归树，并且明确了这两种方法本质上是一样的，只是自顶向下和自底向上的不同而已。

第二个凑零钱的问题，展示了如何流程化确定「状态转移方程」，只要通过状态转移方程写出暴力递归解，剩下的也就是优化递归树，消除重叠子问题而已。

如果你不太了解动态规划，还能看到这里，真得给你鼓掌，相信你已经掌握了这个算法的设计技巧。

计算机解决问题其实没有任何特殊的技巧，它唯一的解决办法就是穷举，穷举所有可能性。算法设计无非就是先思考“如何穷举”，然后再追求“如何聪明地穷举”。

列出状态转移方程，就是在解决“如何穷举”的问题。之所以说它难，一是因为很多穷举需要递归实现，二是因为有的问题本身的解空间复杂，不那么容易穷举完整。

备忘录、DP table 就是在追求“如何聪明地穷举”。用空间换时间的思路，是降低时间复杂度的不二法门，除此之外，试问，还能玩出啥花活？

之后我们会有一章专门讲解动态规划问题，如果有任何问题都可以随时回来重读本文，希望读者在阅读每个题目和解法时，多往「状态」和「选择」上靠，才能对这套框架产生自己的理解，运用自如。

接下来可阅读：

- 动态规划设计：最长递增子序列

如果你有高质量的问题，可以 点击这里 进入本文的讨论区。

▶ **引用本文的题目**

安装 我的 Chrome 刷题插件 点开下列题目可直接查看解题思路：

LeetCode	力扣

LeetCode	力扣
111. Minimum Depth of Binary Tree	111. 二叉树的最小深度
112. Path Sum	112. 路径总和
115. Distinct Subsequences	115. 不同的子序列
139. Word Break	139. 单词拆分
1696. Jump Game VI	1696. 跳跃游戏 VI
221. Maximal Square	221. 最大正方形
240. Search a 2D Matrix II	240. 搜索二维矩阵 II
256. Paint House🔒	256. 粉刷房子🔒
279. Perfect Squares	279. 完全平方数
343. Integer Break	343. 整数拆分
365. Water and Jug Problem	365. 水壶问题
542. 01 Matrix	542. 01 矩阵
576. Out of Boundary Paths	576. 出界的路径数
62. Unique Paths	62. 不同路径
63. Unique Paths II	63. 不同路径 II
70. Climbing Stairs	70. 爬楼梯
91. Decode Ways	91. 解码方法
-	剑指 Offer 04. 二维数组中的查找
-	剑指 Offer 10- I. 斐波那契数列
-	剑指 Offer 10- II. 青蛙跳台阶问题
-	剑指 Offer 14- I. 剪绳子
-	剑指 Offer 46. 把数字翻译成字符串
-	剑指 Offer II 091. 粉刷房子
-	剑指 Offer II 097. 子序列的数目
-	剑指 Offer II 098. 路径的数目
-	剑指 Offer II 103. 最少的硬币数目

▶ **引用本文的文章**

- Dijkstra 算法模板及应用
- base case 和备忘录的初始值怎么定?
- 一个方法团灭 LeetCode 打家劫舍问题

- 一个方法团灭 LeetCode 股票买卖问题
- 东哥带你刷二叉树（纲领篇）
- 分治算法详解：运算优先级
- 动态规划和回溯算法的思维转换
- 动态规划帮我通关了《辐射4》
- 动态规划帮我通关了《魔塔》
- 动态规划穷举的两种视角
- 动态规划设计：最长递增子序列
- 如何运用贪心思想玩跳跃游戏
- 学习算法和刷题的框架思维
- 对动态规划进行降维打击
- 归并排序详解及应用
- 我的刷题心得：算法的本质
- 旅游省钱大法：加权最短路径
- 最优子结构原理和 dp 数组遍历方向
- 算法可视化面板简介（必读）
- 算法学习和心流体验
- 算法时空复杂度分析实用指南
- 算法笔试「骗分」套路
- 经典动态规划：0-1 背包问题
- 经典动态规划：博弈问题
- 经典动态规划：完全背包问题
- 经典动态规划：戳气球
- 经典动态规划：最长公共子序列
- 经典动态规划：编辑距离
- 老司机加油算法

——————————————————

更多精品课程可查看 我的网站；扫码查看更多配套学习套件：

算法学习网站：https://labuladong.gitee.io/algo/ 或 https://labuladong.github.io/algo/

二维码太多，长按识别不到？放大图片 -> 让对应二维码充满屏幕 -> 长按识别该二维码

base case 和备忘录的初始值怎么定?

Stars 123k 精品课程 查看 知乎 @labuladong B站 @labuladong

学算法认准 labuladong，致力于把算法讲清楚！网页版 点这里。

读完本文，你不仅学会了算法套路，还可以顺便解决如下题目：

LeetCode	力扣	难度
931. Minimum Falling Path Sum	931. 下降路径最小和	🟠

很多读者对动态规划问题的 base case、备忘录初始值等问题存在疑问，本文就专门讲一讲这类问题，顺便聊一聊怎么通过题目的蛛丝马迹揣测出题人的小心思，辅助我们解题。

看下力扣第 931 题「下降路径最小和」，输入为一个 `n * n` 的二维数组 `matrix`，请你计算从第一行落到最后一行，经过的路径和最小为多少。

函数签名如下：

```
int minFallingPathSum(int[][] matrix);
```

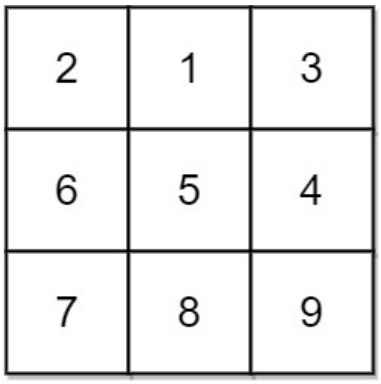
就是说你可以站在 `matrix` 的第一行的任意一个元素，需要下降到最后一行。

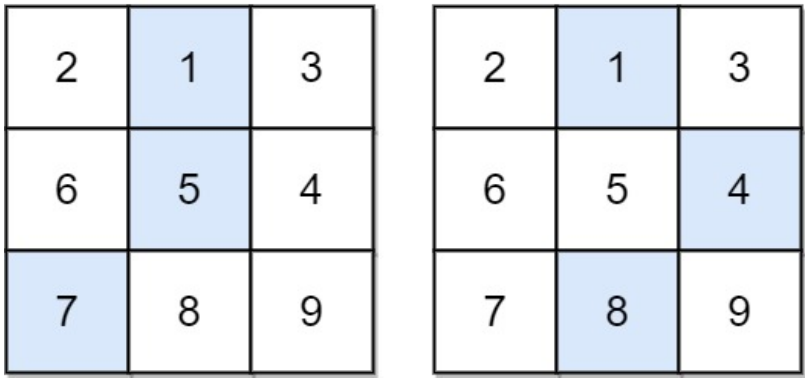
每次下降，可以向下、向左下、向右下三个方向移动一格。也就是说，可以从 `matrix[i][j]` 降到 `matrix[i+1][j]` 或 `matrix[i+1][j-1]` 或 `matrix[i+1][j+1]` 三个位置。

请你计算下降的「最小路径和」，比如说题目给了一个例子：

```
输入：matrix = [[2,1,3],[6,5,4],[7,8,9]]
输出：13
```

最小的路径和为 13，具体是如下几种路径：





我们前文写过两道「路径和」相关的文章：动态规划之最小路径和 和 用动态规划算法通关魔塔。

今天这道题也是类似的，不算是困难的题目，所以**我们借这道题来讲讲 base case 的返回值、备忘录的初始值、索引越界情况的返回值如何确定**。

不过还是要通过 动态规划的标准套路 介绍一下这道题的解题思路，首先我们可以定义一个 `dp` 数组：

```
int dp(int[][] matrix, int i, int j);
```

这个 `dp` 函数的含义如下：

从第一行（`matrix[0][..]`）向下落，落到位置 `matrix[i][j]` 的最小路径和为 `dp(matrix, i, j)`。

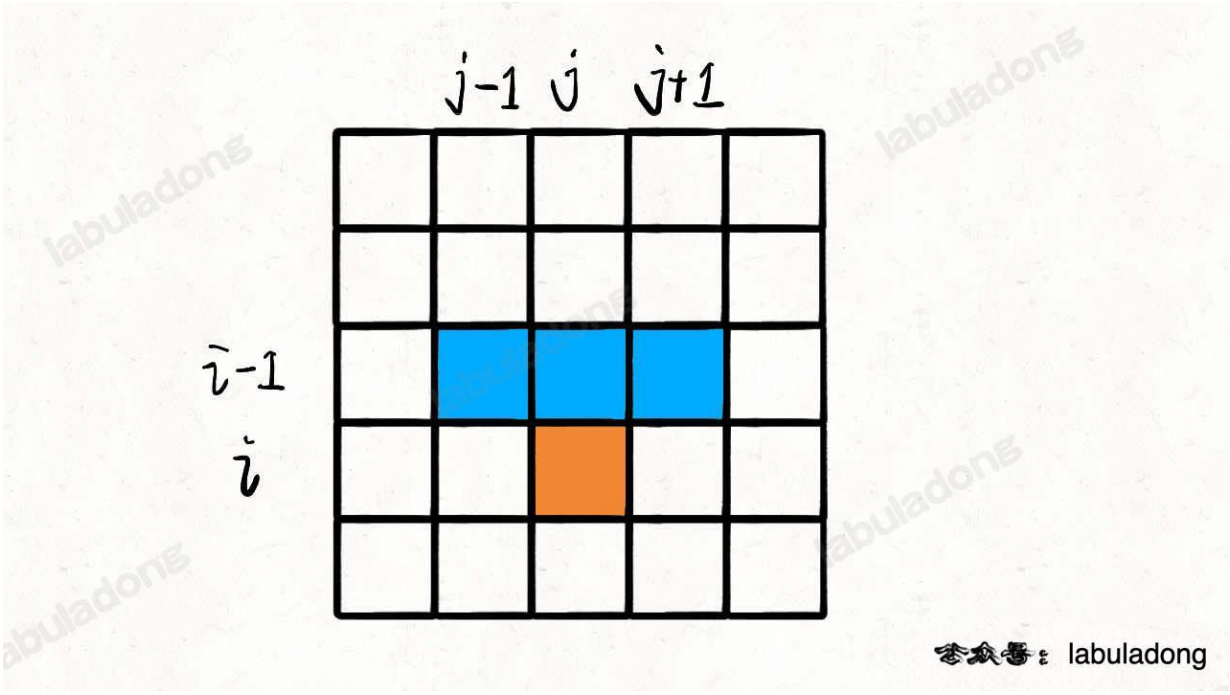
根据这个定义，我们可以把主函数的逻辑写出来：

```
int minFallingPathSum(int[][] matrix) {
    int n = matrix.length;
    int res = Integer.MAX_VALUE;

    // 终点可能在最后一行的任意一列
    for (int j = 0; j < n; j++) {
        res = Math.min(res, dp(matrix, n - 1, j));
    }

    return res;
}
```

因为我们可能落到最后一行的任意一列，所以要穷举一下，看看落到哪一列才能得到最小的路径和。

接下来看看 dp 函数如何实现。

对于 matrix[i][j]，只有可能从 matrix[i-1][j], matrix[i-1][j-1], matrix[i-1][j+1] 这三个位置转移过来。



那么，只要知道到达 (i-1, j), (i-1, j-1), (i-1, j+1) 这三个位置的最小路径和，加上 matrix[i][j] 的值，就能够计算出来到达位置 (i, j) 的最小路径和：

```
int dp(int[][] matrix, int i, int j) {
    // 非法索引检查
    if (i < 0 || j < 0 ||
        i >= matrix.length ||
        j >= matrix[0].length) {
        // 返回一个特殊值
        return 99999;
    }
    // base case
    if (i == 0) {
        return matrix[i][j];
    }
    // 状态转移
    return matrix[i][j] + min(
            dp(matrix, i - 1, j),
            dp(matrix, i - 1, j - 1),
            dp(matrix, i - 1, j + 1)
        );
}

int min(int a, int b, int c) {
    return Math.min(a, Math.min(b, c));
}
```

当然，上述代码是暴力穷举解法，我们可以用备忘录的方法消除重叠子问题，完整代码如下：

```
class Solution {
    int minFallingPathSum(int[][] matrix) {
        int n = matrix.length;
        int res = Integer.MAX_VALUE;
        // 备忘录里的值初始化为 66666
        memo = new int[n][n];
        for (int i = 0; i < n; i++) {
            Arrays.fill(memo[i], 66666);
        }
        // 终点可能在 matrix[n-1] 的任意一列
        for (int j = 0; j < n; j++) {
            res = Math.min(res, dp(matrix, n - 1, j));
        }
        return res;
    }

    // 备忘录
    int[][] memo;

    int dp(int[][] matrix, int i, int j) {
        // 1、索引合法性检查
        if (i < 0 || j < 0 ||
            i >= matrix.length ||
            j >= matrix[0].length) {

            return 99999;
        }
        // 2、base case
        if (i == 0) {
            return matrix[0][j];
        }
        // 3、查找备忘录，防止重复计算
        if (memo[i][j] != 66666) {
            return memo[i][j];
        }
        // 进行状态转移
        memo[i][j] = matrix[i][j] + min(
                dp(matrix, i - 1, j),
                dp(matrix, i - 1, j - 1),
                dp(matrix, i - 1, j + 1)
            );
        return memo[i][j];
    }

    int min(int a, int b, int c) {
        return Math.min(a, Math.min(b, c));
    }
}
```

▶ 代码可视化动画

如果看过我们公众号之前的动态规划系列文章，这个解题思路应该是非常容易理解的。

那么本文对于这个 dp 函数仔细探讨三个问题：

1、对于索引的合法性检测，返回值为什么是 99999？其他的值行不行？

2、base case 为什么是 `i == 0`？

3、备忘录 `memo` 的初始值为什么是 66666？其他值行不行？

首先，说说 base case 为什么是 `i == 0`，返回值为什么是 `matrix[0][j]`，这是根据 `dp` 函数的定义所决定的。

回顾我们的 `dp` 函数定义：

从第一行（`matrix[0][..]`）向下落，落到位置 `matrix[i][j]` 的最小路径和为 `dp(matrix, i, j)`。

根据这个定义，我们就是从 `matrix[0][j]` 开始下落。那如果我们想落到的目的地就是 `i == 0`，所需的路径和当然就是 `matrix[0][j]` 呗。

再说说备忘录 `memo` 的初始值为什么是 66666，这是由题目给出的数据范围决定的。

备忘录 `memo` 数组的作用是什么？

就是防止重复计算，将 `dp(matrix, i, j)` 的计算结果存进 `memo[i][j]`，遇到重复计算可以直接返回。

那么，我们必须要知道 `memo[i][j]` 到底存储计算结果没有，对吧？如果存结果了，就直接返回；没存，就去递归计算。

所以，`memo` 的初始值一定得是特殊值，和合法的答案有所区分。

我们回过头看看题目给出的数据范围：

> `matrix` 是 `n x n` 的二维数组，其中 `1 <= n <= 100`；对于二维数组中的元素，有 `-100 <= matrix[i][j] <= 100`。

假设 `matrix` 的大小是 100 x 100，所有元素都是 100，那么从第一行往下落，得到的路径和就是 100 x 100 = 10000，也就是最大的合法答案。

类似的，依然假设 `matrix` 的大小是 100 x 100，所有元素是 -100，那么从第一行往下落，就得到了最小的合法答案 -100 x 100 = -10000。

也就是说，这个问题的合法结果会落在区间 `[-10000, 10000]` 中。

所以，我们 `memo` 的初始值就要避开区间 `[-10000, 10000]`，换句话说，`memo` 的初始值只要在区间 `(-inf, -10001] U [10001, +inf)` 中就可以。

最后，说说对于不合法的索引，返回值应该如何确定，这需要根据我们状态转移方程的逻辑确定。

对于这道题，状态转移的基本逻辑如下：

```
int dp(int[][] matrix, int i, int j) {

    return matrix[i][j] + min(
            dp(matrix, i - 1, j),
            dp(matrix, i - 1, j - 1),
            dp(matrix, i - 1, j + 1)
        );
}
```

显然，`i - 1, j - 1, j + 1` 这几个运算可能会造成索引越界，对于索引越界的 `dp` 函数，应该返回一个不可能被取到的值。

因为我们调用的是 `min` 函数，最终返回的值是最小值，所以对于不合法的索引，只要 `dp` 函数返回一个永远不会被取到的最大值即可。

刚才说了，合法答案的区间是 `[-10000, 10000]`，所以我们的返回值只要大于 10000 就相当于一个永不会取到的最大值。

换句话说，只要返回区间 `[10001, +inf)` 中的一个值，就能保证不会被取到。

至此，我们就把动态规划相关的三个细节问题举例说明了。

拓展延伸一下，建议大家做题时，除了题意本身，一定不要忽视题目给定的其他信息。

本文举的例子，测试用例数据范围可以确定「什么是特殊值」，从而帮助我们将思路转化成代码。

除此之外，数据范围还可以帮我们估算算法的时间/空间复杂度。

比如说，有的算法题，你只想到一个暴力求解思路，时间复杂度比较高。如果发现题目给定的数据量比较大，那么肯定可以说明这个求解思路有问题或者存在优化的空间。

除了数据范围，有时候题目还会限制我们算法的时间复杂度，这种信息其实也暗示着一些东西。

比如要求我们的算法复杂度是 `O(NlogN)`，你想想怎么才能搞出一个对数级别的复杂度呢？

肯定得用到 二分搜索 或者二叉树相关的数据结构，比如 `TreeMap`，`PriorityQueue` 之类的对吧。

再比如，有时候题目要求你的算法时间复杂度是 `O(MN)`，这可以联想到什么？

可以大胆猜测，常规解法是用 回溯算法 暴力穷举，但是更好的解法是动态规划，而且是一个二维动态规划，需要一个 `M * N` 的二维 `dp` 数组，所以产生了这样一个时间复杂度。

如果你早就胸有成竹了，那就当我没说，毕竟猜测也不一定准确；但如果你本来就没啥解题思路，那有了这些推测之后，最起码可以给你的思路一些方向吧？

总之，多动脑筋，不放过任何蛛丝马迹，你不成为刷题小能手才怪。

如果你有高质量的问题，可以 点击这里 进入本文的讨论区。

▶ **引用本文的题目**

安装 我的 Chrome 刷题插件 点开下列题目可直接查看解题思路：

LeetCode	力扣
63. Unique Paths II	63. 不同路径 II

▶ 引用本文的文章

- 旅游省钱大法：加权最短路径

更多精品课程可查看 我的网站；扫码查看更多配套学习套件：

最优子结构和 dp 数组的遍历方向怎么定?

Stars 123k 精品课程 查看 知乎 @labuladong B站 @labuladong

学算法认准 labuladong，致力于把算法讲清楚！网页版 点这里。

> tip：本文有视频版：动态规划详解进阶。建议关注我的 B 站账号，我会用视频领读的方式带大家学习那些稍有难度的算法技巧。

本文是两年前发的 动态规划答疑篇 的修订版，根据我的不断学习总结以及读者的评论反馈，我给扩展了更多内容，力求使本文成为继 动态规划核心套路框架 之后的一篇全面答疑文章。以下是正文。

这篇文章就给你讲明白以下几个问题：

1、到底什么才叫「最优子结构」，和动态规划什么关系。

2、如何判断一个问题是动态规划问题，即如何看出是否存在重叠子问题。

3、为什么经常看到将 dp 数组的大小设置为 `n + 1` 而不是 `n`。

4、为什么动态规划遍历 dp 数组的方式五花八门，有的正着遍历，有的倒着遍历，有的斜着遍历。

一、最优子结构详解

「最优子结构」是某些问题的一种特定性质，并不是动态规划问题专有的。也就是说，很多问题其实都具有最优子结构，只是其中大部分不具有重叠子问题，所以我们不把它们归为动态规划系列问题而已。

我先举个很容易理解的例子：假设你们学校有 10 个班，你已经计算出了每个班的最高考试成绩。那么现在我要求你计算全校最高的成绩，你会不会算？当然会，而且你不用重新遍历全校学生的分数进行比较，而是只要在这 10 个最高成绩中取最大的就是全校的最高成绩。

我给你提出的这个问题就**符合最优子结构**：可以从子问题的最优结果推出更大规模问题的最优结果。让你算**每个班**的最优成绩就是子问题，你知道所有子问题的答案后，就可以借此推出**全校**学生的最优成绩这个规模更大的问题的答案。

你看，这么简单的问题都有最优子结构性质，只是因为显然没有重叠子问题，所以我们简单地求最值肯定用不出动态规划。

再举个例子：假设你们学校有 10 个班，你已知每个班的最大分数差（最高分和最低分的差值）。那么现在我让你计算全校学生中的最大分数差，你会不会算？可以想办法算，但是肯定不能通过已知的这 10 个班的最大分数差推到出来。因为这 10 个班的最大分数差不一定就包含全校学生的最大分数差，比如全校的最大分数差可能是 3 班的最高分和 6 班的最低分之差。

这次我给你提出的问题就**不符合最优子结构**，因为你没办通过每个班的最优值推出全校的最优值，没办法通过子问题的最优值推出规模更大的问题的最优值。前文 动态规划详解 说过，想满足最优子结，子问题之间必须互相独立。全校的最大分数差可能出现在两个班之间，显然子问题不独立，所以这个问题本身不符合最优子结构。

那么遇到这种最优子结构失效情况，怎么办？策略是：改造问题。对于最大分数差这个问题，我们不是没办法利用已知的每个班的分数差吗，那我只能这样写一段暴力代码：

```
int result = 0;
for (Student a : school) {
    for (Student b : school) {
        if (a is b) continue;
        result = max(result, |a.score - b.score|);
    }
}
return result;
```

改造问题，也就是把问题等价转化：最大分数差，不就等价于最高分数和最低分数的差么，那不就是要求最高和最低分数么，不就是我们讨论的第一个问题么，不就具有最优子结构了么？那现在改变思路，借助最优子结构解决最值问题，再回过头解决最大分数差问题，是不是就高效多了？

当然，上面这个例子太简单了，不过请读者回顾一下，我们做动态规划问题，是不是一直在求各种最值，本质跟我们举的例子没啥区别，无非需要处理一下重叠子问题。

前文不 同定义不同解法 和 高楼扔鸡蛋问题 就展示了如何改造问题，不同的最优子结构，可能导致不同的解法和效率。

再举个常见但也十分简单的例子，求一棵二叉树的最大值，不难吧（简单起见，假设节点中的值都是非负数）：

```
int maxVal(TreeNode root) {
    if (root == null)
        return -1;
    int left = maxVal(root.left);
    int right = maxVal(root.right);
    return max(root.val, left, right);
}
```

你看这个问题也符合最优子结构，以 `root` 为根的树的最大值，可以通过两边子树（子问题）的最大值推导出来，结合刚才学校和班级的例子，很容易理解吧。

当然这也不是动态规划问题，旨在说明，最优子结构并不是动态规划独有的一种性质，能求最值的问题大部分都具有这个性质；**但反过来，最优子结构性质作为动态规划问题的必要条件，一定是让你求最值的**，以后碰到那种恶心人的最值题，思路往动态规划想就对了，这就是套路。

动态规划不就是从最简单的 base case 往后推导吗，可以想象成一个链式反应，以小博大。但只有符合最优子结构的问题，才有发生这种链式反应的性质。

找最优子结构的过程，其实就是证明状态转移方程正确性的过程，方程符合最优子结构就可以写暴力解了，写出暴力解就可以看出有没有重叠子问题了，有则优化，无则 OK。这也是套路，经常刷题的读者应该能体会。

这里就不举那些正宗动态规划的例子了，读者可以翻翻历史文章，看看状态转移是如何遵循最优子结构的，这个话题就聊到这，下面再来看其他的动态规划迷惑行为。

二、如何一眼看出重叠子问题

经常有读者说：

看了前文 动态规划核心套路，我知道了如何一步步优化动态规划问题；

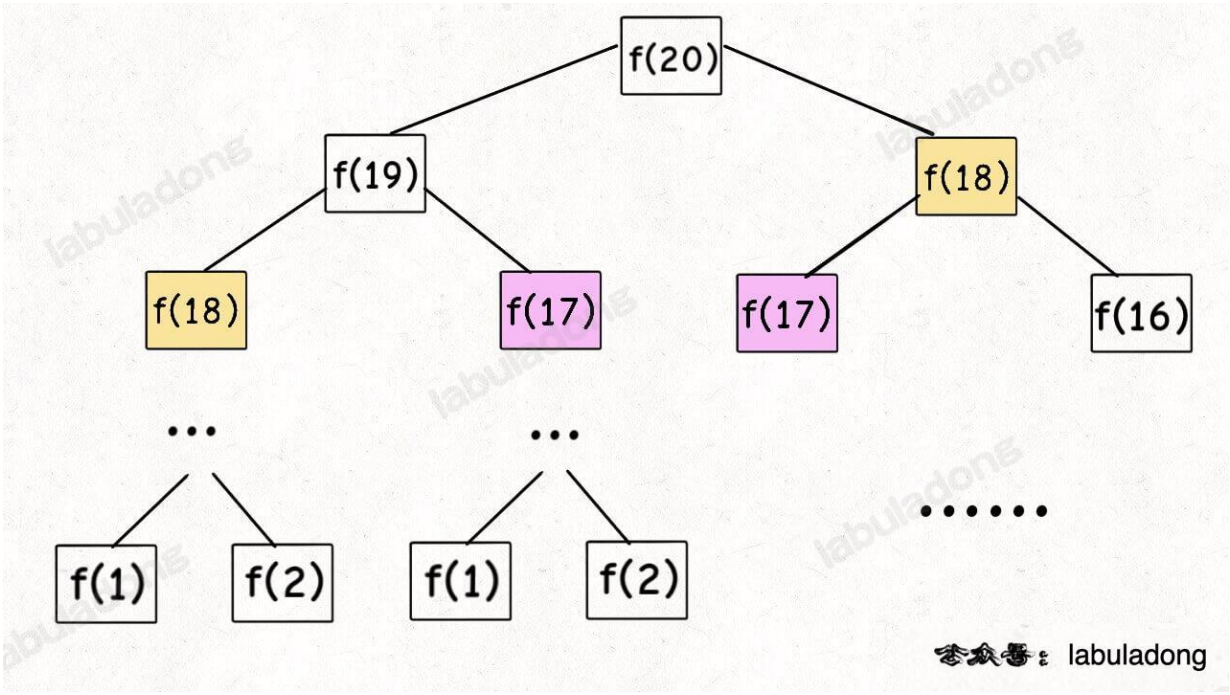
看了后文 动态规划设计：数学归纳法，我知道了利用数学归纳法写出暴力解（状态转移方程）。

但就算我写出了暴力解，我很难判断这个解法是否存在重叠子问题，从而无法确定是否可以运用备忘录等方法去优化算法效率。

对于这个问题，其实我在动态规划系列的文章中写过几次，在这里再统一总结一下吧。

首先，最简单粗暴的方式就是画图，把递归树画出来，看看有没有重复的节点。

比如最简单的例子，动态规划核心套路 中斐波那契数列的递归树：



这棵递归树很明显存在重复的节点，所以我们可以通过备忘录避免冗余计算。

但毕竟斐波那契数列问题太简单了，实际的动态规划问题比较复杂，比如二维甚至三维的动态规划，当然也可以画递归树，但不免有些复杂。

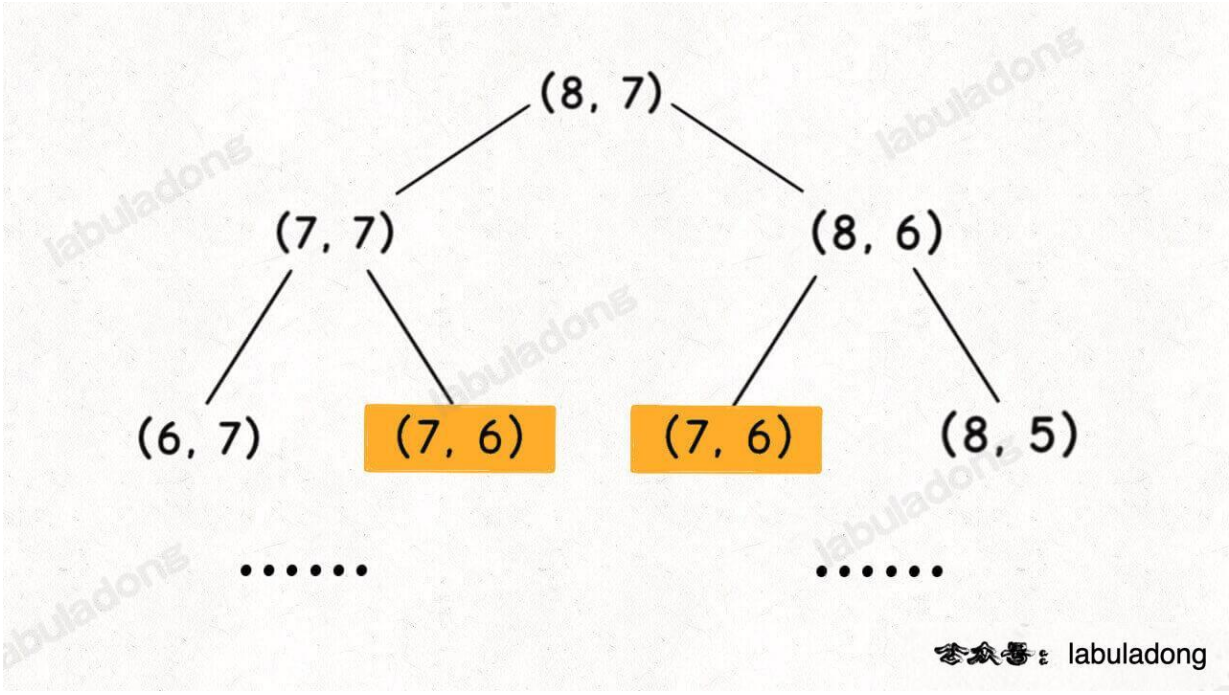
比如在 最小路径和问题 中，我们写出了这样一个暴力解法：

```
int dp(int[][] grid, int i, int j) {
    if (i == 0 && j == 0) {
```

```
            return grid[0][0];
        }
        if (i < 0 || j < 0) {
            return Integer.MAX_VALUE;
        }

        return Math.min(
                dp(grid, i - 1, j),
                dp(grid, i, j - 1)
            ) + grid[i][j];
    }
```

你不需要读过前文，光看这个函数代码就能看出来，该函数递归过程中参数 `i, j` 在不断变化，即「状态」是 `(i, j)` 的值，你是否可以判断这个解法是否存在重叠子问题呢？

假设输入的 `i = 8, j = 7`，二维状态的递归树如下图，显然出现了重叠子问题：



但稍加思考就可以知道，其实根本没必要画图，可以通过递归框架直接判断是否存在重叠子问题。

具体操作就是直接删掉代码细节，抽象出该解法的递归框架：

```
int dp(int[][] grid, int i, int j) {
    dp(grid, i - 1, j), // #1
    dp(grid, i, j - 1)  // #2
}
```

可以看到 `i, j` 的值在不断减小，那么我问你一个问题：如果我想从状态 `(i, j)` 转移到 `(i-1, j-1)`，有几种路径？

显然有两种路径，可以是 `(i, j) -> #1 -> #2` 或者 `(i, j) -> #2 -> #1`，不止一种，说明 `(i-1, j-1)` 会被多次计算，所以一定存在重叠子问题。

再举个稍微复杂的例子，后文 正则表达式问题 的暴力解代码：

```
bool dp(string& s, int i, string& p, int j) {
    int m = s.size(), n = p.size();
    if (j == n)  return i == m;
    if (i == m) {
        if ((n - j) % 2 == 1) return false;
        for (; j + 1 < n; j += 2) {
            if (p[j + 1] != '*') return false;
        }
        return true;
    }

    if (s[i] == p[j] || p[j] == '.') {
        if (j < n - 1 && p[j + 1] == '*') {
            return dp(s, i, p, j + 2)
               || dp(s, i + 1, p, j);
        } else {
            return dp(s, i + 1, p, j + 1);
        }
    } else if (j < n - 1 && p[j + 1] == '*') {
        return dp(s, i, p, j + 2);
    }
    return false;
}
```

代码有些复杂对吧，如果画图的话有些麻烦，但我们不画图，直接忽略所有细节代码和条件分支，只抽象出递归框架：

```
bool dp(string& s, int i, string& p, int j) {
    dp(s, i, p, j + 2);     // #1
    dp(s, i + 1, p, j);     // #2
    dp(s, i + 1, p, j + 1); // #3
}
```

和上一题一样，这个解法的「状态」也是 `(i, j)` 的值，那么我继续问你问题：如果我想从状态 `(i, j)` 转移到 `(i+2, j+2)`，有几种路径？

显然，至少有两条路径：`(i, j) -> #1 -> #2 -> #2` 和 `(i, j) -> #3 -> #3`，这就说明这个解法存在巨量重叠子问题。

所以，不用画图就知道这个解法也存在重叠子问题，需要用备忘录技巧去优化。

三、dp 数组的大小设置

比如说后文 编辑距离问题，我首先讲的是自顶向下的递归解法，实现了这样一个 `dp` 函数：

```
int minDistance(String s1, String s2) {
    int m = s1.length(), n = s2.length();
    // 按照 dp 函数的定义，计算 s1 和 s2 的最小编辑距离
    return dp(s1, m - 1, s2, n - 1);
}

// 定义：s1[0..i] 和 s2[0..j] 的最小编辑距离是 dp(s1, i, s2, j)
int dp(String s1, int i, String s2, int j) {
    // 处理 base case
    if (i == -1) {
        return j + 1;
    }
    if (j == -1) {
        return i + 1;
    }

    // 进行状态转移
    if (s1.charAt(i) == s2.charAt(j)) {
        return dp(s1, i - 1, s2, j - 1);
    } else {
        return min(
            dp(s1, i, s2, j - 1) + 1,
            dp(s1, i - 1, s2, j) + 1,
            dp(s1, i - 1, s2, j - 1) + 1
        );
    }
}
```

然后改造成了自底向上的迭代解法：

```
int minDistance(String s1, String s2) {
    int m = s1.length(), n = s2.length();
    // 定义：s1[0..i] 和 s2[0..j] 的最小编辑距离是 dp[i+1][j+1]
    int[][] dp = new int[m + 1][n + 1];
    // 初始化 base case
    for (int i = 1; i <= m; i++)
        dp[i][0] = i;
    for (int j = 1; j <= n; j++)
        dp[0][j] = j;

    // 自底向上求解
    for (int i = 1; i <= m; i++) {
        for (int j = 1; j <= n; j++) {
            // 进行状态转移
            if (s1.charAt(i-1) == s2.charAt(j-1)) {
                dp[i][j] = dp[i - 1][j - 1];
            } else {
                dp[i][j] = min(
                    dp[i - 1][j] + 1,
                    dp[i][j - 1] + 1,
                    dp[i - 1][j - 1] + 1
```

```
                    );
                }
            }
        }
        // 按照 dp 数组的定义，存储 s1 和 s2 的最小编辑距离
        return dp[m][n];
    }
```

这两种解法思路是完全相同的，但就有读者提问，为什么迭代解法中的 dp 数组初始化大小要设置为 int[m+1][n+1]？为什么 s1[0..i] 和 s2[0..j] 的最小编辑距离要存储在 dp[i+1][j+1] 中，有一位索引偏移？

能不能模仿 dp 函数的定义，把 dp 数组初始化为 int[m][n]，然后让 s1[0..i] 和 s2[0..j] 的最小编辑距离要存储在 dp[i][j] 中？

理论上，你怎么定义都可以，只要根据定义处理好 base case 就可以。

你看 dp 函数的定义，dp(s1, i, s2, j) 计算 s1[0..i] 和 s2[0..j] 的编辑距离，那么 i, j 等于 -1 时代表空串的 base case，所以函数开头处理了这两种特殊情况。

再看 dp 数组，你当然也可以定义 dp[i][j] 存储 s1[0..i] 和 s2[0..j] 的编辑距离，但问题是 base case 怎么搞？索引怎么能是 -1 呢？

所以我们把 dp 数组初始化为 int[m+1][n+1]，让索引整体偏移一位，把索引 0 留出来作为 base case 表示空串，然后定义 dp[i+1][j+1] 存储 s1[0..i] 和 s2[0..j] 的编辑距离。

四、dp 数组的遍历方向

我相信读者做动态规问题时，肯定会对 dp 数组的遍历顺序有些头疼。我们拿二维 dp 数组来举例，有时候我们是正向遍历：

```
int[][] dp = new int[m][n];
for (int i = 0; i < m; i++)
    for (int j = 0; j < n; j++)
        // 计算 dp[i][j]
```

有时候我们反向遍历：

```
for (int i = m - 1; i >= 0; i--)
    for (int j = n - 1; j >= 0; j--)
        // 计算 dp[i][j]
```

有时候可能会斜向遍历：

```
// 斜着遍历数组
for (int l = 2; l <= n; l++) {
```

```
    for (int i = 0; i <= n - l; i++) {
        int j = l + i - 1;
        // 计算 dp[i][j]
    }
}
```

甚至更让人迷惑的是，有时候发现正向反向遍历都可以得到正确答案，比如我们在 团灭股票问题 中有的地方就正反皆可。

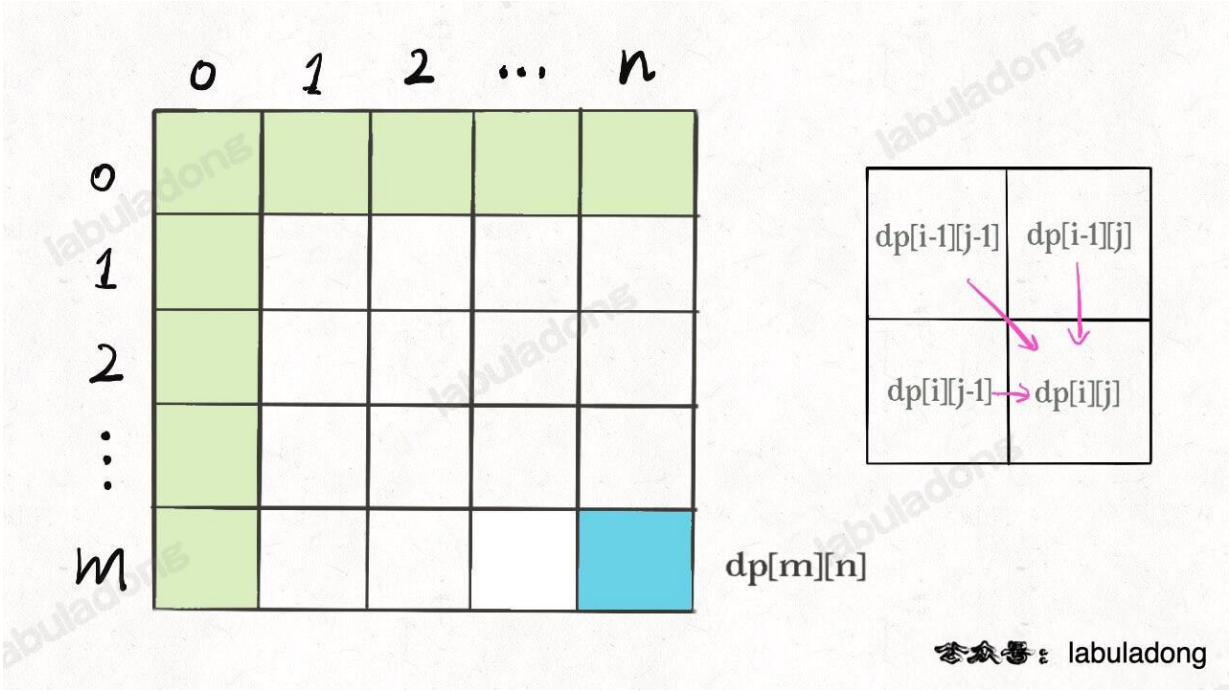
如果仔细观察的话可以发现其中的原因，你只要把住两点就行了：

1、遍历的过程中，所需的状态必须是已经计算出来的。

2、遍历结束后，存储结果的那个位置必须已经被计算出来。

下面来具体解释上面两个原则是什么意思。

比如编辑距离这个经典的问题，详解见后文 编辑距离详解，我们通过对 dp 数组的定义，确定了 base case 是 dp[..][0] 和 dp[0][..]，最终答案是 dp[m][n]；而且我们通过状态转移方程知道 dp[i][j] 需要从 dp[i-1][j], dp[i][j-1], dp[i-1][j-1] 转移而来，如下图：

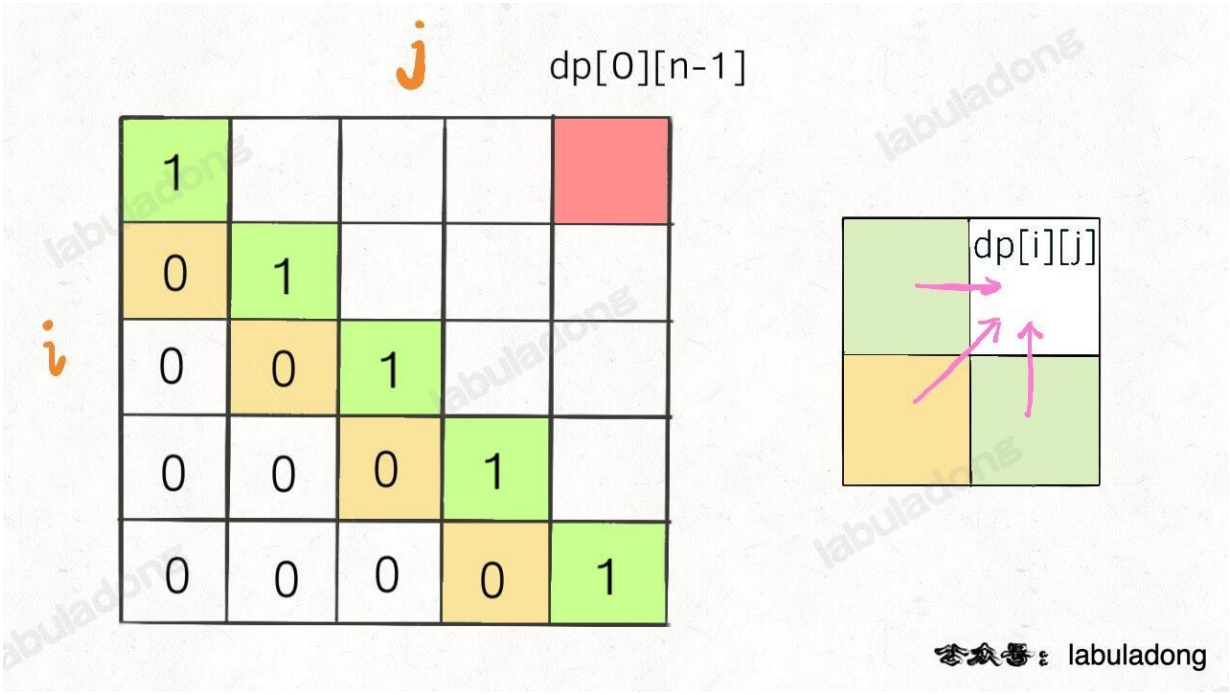


那么，参考刚才说的两条原则，你该怎么遍历 dp 数组？肯定是正向遍历：

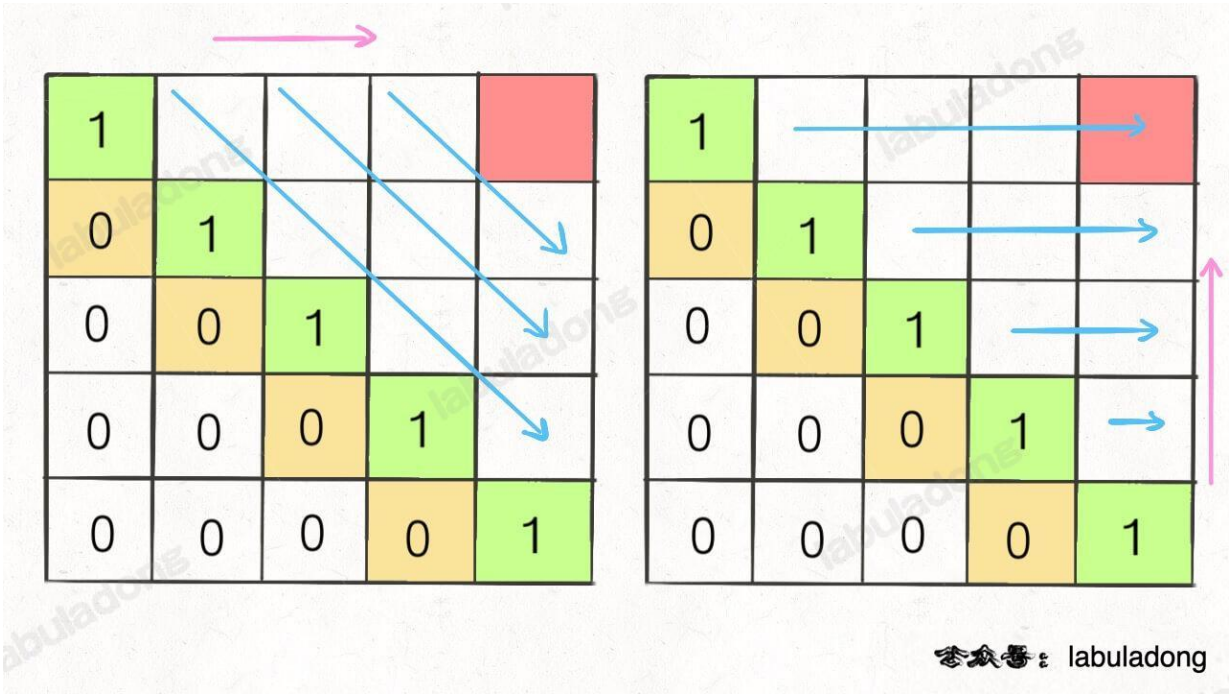
```
for (int i = 1; i < m; i++)
    for (int j = 1; j < n; j++)
        // 通过 dp[i-1][j], dp[i][j - 1], dp[i-1][j-1]
        // 计算 dp[i][j]
```

因为，这样每一步迭代的左边、上边、左上边的位置都是 base case 或者之前计算过的，而且最终结束在我们想要的答案 dp[m][n]。

再举一例，回文子序列问题，详见前文 子序列问题模板，我们通过过对 dp 数组的定义，确定了 base case 处在中间的对角线，dp[i][j] 需要从 dp[i+1][j], dp[i][j-1], dp[i+1][j-1] 转移而来，想要求的最终答案是 dp[0][n-1]，如下图：



这种情况根据刚才的两个原则，就可以有两种正确的遍历方式：



要么从左至右斜着遍历，要么从下向上从左到右遍历，这样才能保证每次 dp[i][j] 的左边、下边、左下边已经计算完毕，得到正确结果。

现在，你应该理解了这两个原则，主要就是看 base case 和最终结果的存储位置，保证遍历过程中使用的数据都是计算完毕的就行，有时候确实存在多种方法可以得到正确答案，可根据个人口味自行选择。

如果你有高质量的问题，可以 点击这里 进入本文的讨论区。

▶ 引用本文的题目

安装 我的 Chrome 刷题插件 点开下列题目可直接查看解题思路：

LeetCode	力扣
115. Distinct Subsequences	115. 不同的子序列
139. Word Break	139. 单词拆分
221. Maximal Square	221. 最大正方形
256. Paint House🔒	256. 粉刷房子🔒
343. Integer Break	343. 整数拆分
576. Out of Boundary Paths	576. 出界的路径数
63. Unique Paths II	63. 不同路径 II
91. Decode Ways	91. 解码方法
-	剑指 Offer II 091. 粉刷房子
-	剑指 Offer II 097. 子序列的数目

▶ 引用本文的文章

- 一个方法团灭 LeetCode 股票买卖问题
- 分治算法详解：运算优先级
- 动态规划之子序列问题解题模板
- 动态规划解题套路框架
- 对动态规划进行降维打击
- 经典动态规划：博弈问题
- 经典动态规划：戳气球
- 经典动态规划：正则表达式

——————————————

更多精品课程可查看 我的网站；扫码查看更多配套学习套件：

算法学习网站：https://labuladong.gitee.io/algo/ 或 https://labuladong.github.io/algo/

二维码太多，长按识别不到？放大图片 -> 让对应二维码充满屏幕 -> 长按识别该二维码

动态规划的穷举视角：不同子序列问题

Stars 123k 精品课程 查看 知乎 @labuladong B站 @labuladong

学算法认准 labuladong，致力于把算法讲清楚！网页版 点这里。

读完本文，你不仅学会了算法套路，还可以顺便解决如下题目：

LeetCode	力扣	难度
115. Distinct Subsequences	115. 不同的子序列	🔴
-	剑指 Offer II 097. 子序列的数目	🔴

挺久没写动态规划相关的题目了，本文我带大家复习一下动态规划相关问题的一系列解题套路，然后着重讨论一下动态规划穷举时不同视角的问题。

动态规划解题组合拳

首先，前文 我的刷题心得 讲了，我们刷的算法问题的本质是「穷举」，动态规划问题也不例外，你必须想办法穷举所有可能的解，然后从中筛选出符合题目要求的解。

另外，动态规划问题穷举的过程中会出现重叠子问题导致的冗余计算，所以前文 动态规划核心套路框架 中告诉你如何一步一步把暴力穷举解法优化成效率更高的动态规划解法。

然而，想要写出暴力解需要依据状态转移方程，状态转移方程是动态规划的解题核心，可不是那么容易想出来的。不过，后文 动态规划设计：数学归纳法 告诉你，思考状态转移方程的一个基本方法是数学归纳法，即明确 dp 函数或数组的定义，然后使用这个定义，从已知的「状态」中推导出未知的「状态」。

还没完，比如 高楼扔鸡蛋问题 中对 dp 函数/数组的定义不见得是唯一的，不同的定义会导致状态转移方程发生变化，解题效率也有高低之分，所以我们应该给 dp 函数尽可能想出更合适的定义来解题。

接下来就是本文要着重探讨的问题了：就算 dp 函数/数组的定义相同，如果你使用不同的「视角」进行穷举，效率也不见得是相同的。

关于穷举「视角」的问题，前文 回溯算法穷举视角：子集划分问题 讲了回溯算法中不同的穷举视角导致的不同解法，其实这种视角的切换在动态规划类型问题中依然存在。前文对排列的举例非常有助于你理解穷举视角的问题，这里再简单提一下。

▶ 引用本文的题目

安装 我的 Chrome 刷题插件 点开下列题目可直接查看解题思路：

LeetCode	力扣
-	剑指 Offer II 097. 子序列的数目

▶ 引用本文的文章

- 球盒模型：回溯算法穷举的两种视角

本文为网站会员内容，请 点这里 查看。

算法时空复杂度分析实用指南

Stars 123k 精品课程 查看 知乎 @labuladong B站 @labuladong

微信搜一搜 labuladong公众号

学算法认准 labuladong，致力于把算法讲清楚！网页版 点这里。

我以前的文章主要都是讲解算法的原理和解题的思维，对时间复杂度和空间复杂度的分析经常一笔带过，主要是基于以下两个原因：

1、对于偏小白的读者，我希望你集中精力理解算法原理。如果加入太多偏数学的内容，很容易把人劝退。

2、正确理解常用算法底层原理，是进行复杂度的分析的前提。尤其是递归相关的算法，只有你从树的角度进行思考和分析，才能正确分析其复杂度。

鉴于现在历史文章已经涵盖了所有常见算法的核心原理，所以我专门写一篇时空复杂度的分析指南，授人以鱼不如授人以渔，教给你一套通用的方法分析任何算法的时空复杂度。

本文会篇幅较长，会涵盖如下几点：

1、利用时间复杂度反推解题思路，减少试错时间。

2、时间都去哪儿了？哪些常见的编码失误会导致算法超时。

3、Big O 表示法的几个基本特点。

4、非递归算法中的时间复杂度分析。

5、数据结构 API 的效率衡量方法（摊还分析）。

6、递归算法的时间/空间复杂度的分析方法，这部分是重点，我会用动态规划和回溯算法举例。

在讲解复杂度的概念和具体计算方法之前，我先说一些实战中常见的技巧和容易踩的坑。

复杂度分析反推解题思路

> 不要以为复杂度分析是专门用来难为你的，它其实是来帮你的，它是来偷偷告诉你解题思路的。
>
> 你应该在开始写代码**之前**就做复杂度分析，因为复杂度分析可以避免你在错误的思路上浪费时间，有时候它甚至可以直接告诉你这道题用什么算法。
>
> 为啥这样说呢，因为一般题目都会告诉我们测试用例的数据规模有多大，我们可以根据这个数据规模反推这道题能够允许的时间复杂度在什么范围，进一步反推我们应该要用什么算法。

举例来说吧，比如一个题目给你输入一个数组，其长度能够达到 `10^6` 这个量级，那么我们肯定可以知道这道题的时间复杂度大概要小于 `O(N^2)`，得优化成 `O(NlogN)` 或者 `O(N)` 才行。因为如果你写的算法是 `O(N^2)` 的，最大的复杂度会达到 `10^12` 这个量级，在大部分判题系统上都是跑不过去的。

为了把复杂度控制在 `O(NlogN)` 或者 `O(N)`，我们的选择范围就缩小了，可能符合条件的做法是：对数组进行排序处理、前缀和、双指针、一维 dp 等等，从这些思路切入就比较靠谱。像嵌套 for 循环、二维 dp、回溯算法这些思路，基本可以直接排除掉了。

再举个更直接的例子，如果你发现题目给的数据规模很小，比如数组长度 `N` 不超过 `20` 这样的，那么我们可以断定这道题大概率要用暴力穷举算法。

因为判题平台肯定是尽可能扩大数据规模难为你，它一反常态给这么小的数据规模，肯定是因为最优解就是指数/阶乘级别的复杂度。你放心用 回溯算法 招呼它就行了，不用想别的算法了。

所以说啊，很多读者看题都不看那个数据规模，上来就闷声写代码，这是不对滴。你先把题目给的所有信息都考虑进去，再写代码，这样才能少走弯路。

由于编码失误导致复杂度异常

这部分主要总结一下大家（尤其是初学者）在写代码时容易犯的一些编码层面的错误。这些错误会产生预期之外的时间消耗，拖慢你的算法运行，甚至导致超时。

使用了标准输出

在写算法题时，我们可能会用到 `print/console.log` 函数来打印一些状态，以便调试算法。

但你准备提交代码时，记得把这些输出语句注释掉，因为标准输出属于 I/O 操作，会很大程度上拖慢你的算法代码运行。

错误地「传值」而非「传引用」

比如 C++ 里面，函数参数默认是传值的，比如你传入一个 `vector` 参数，那么这个数据结构会被完整地复制一份，导致额外的时间和空间消耗。尤其是当这个函数是个递归函数的时候，错误地传值几乎必然导致超时或超内存。

正确的做法是传引用，比如 `vector<int>&`，这样就不会产生额外的复制开销。使用其他语言的读者可以自查是否存在类似的问题，一定要搞清楚你的编程语言的参数传递机制。

接口对象的底层实现不明

这应该算是一个比较刁钻的问题，一般在 Java 这种面向对象的语言出现，出现地比较少，但也必须引起注意。

Java 中 `List` 是一个接口，它有很多实现类，比如 `ArrayList`、`LinkedList` 等等。而我们知道 `ArrayList` 和 `LinkedList` 的很多方法复杂度不同，比如 `ArrayList` 的 `get` 方法是 `O(1)`，而 `LinkedList` 的 `get` 方法是 `O(N)`。

那么如果函数参数给你传入一个 `List` 类型的参数，你敢不敢直接 `list.get(i)` 进行随机访问？不敢吧。

这种情况，一般需要自己创建一个 `ArrayList`，把传入的 `List` 的元素全部复制过去，再通过索引进行访问，这样比较保险。

主要就上面这几个吧，它们都是非算法思想层面的问题，大家留心注意一下应该没什么问题。下面开始正式讲解算法复杂度分析。

Big O 表示法

> $O(g(n)) = \{ f(n)$: 存在正常量 c 和 n_0，使得对所有 $n \geq n_0$，有 $0 \leq f(n) \leq c*g(n) \}$

我们常用的这个符号 O（大写字母 o，不是数字 0）其实代表一个函数的集合，比如 $O(n^2)$ 代表着一个由 $g(n) = n^2$ 派生出来的一个函数集合；我们说一个算法的时间复杂度为 $O(n^2)$，意思就是描述该算法的复杂度的函数属于这个函数集合之中。

理论上，你看明白这个抽象的数学定义，就可以解答你关于 Big O 表示法的一切疑问了。

但考虑到大部分人看到数学定义就头晕，我给你列举两个复杂度分析中会用到的特性，记住这两个就够用了。

1、只保留增长速率最快的项，其他的项可以省略。

首先，乘法和加法中的常数因子都可以忽略不计，比如下面的例子：

```
O(2N + 100) = O(N)
O(2^(N+1)) = O(2 * 2^N) = O(2^N)
O(M + 3N + 99) = O(M + N)
```

当然，不要见到常数就消，有的常数消不得，可能会用到我们中学学过的指数运算法则：

```
O(2^(2N)) = O(4^N)
```

除了常数因子，增长速率慢的项在增长速率快的项面前也可以忽略不计：

```
O(N^3 + 999 * N^2 + 999 * N) = O(N^3)
O((N + 1) * 2^N) = O(N * 2^N + 2^N) = O(N * 2^N)
```

以上列举的都是最简单常见的例子，这些例子都可以被 Big O 记号的定义正确解释。如果你遇到更复杂的复杂度场景，也可以根据定义来判断自己的复杂度表达式是否正确。

2、Big O 记号表示复杂度的「上界」。

换句话说，只要你给出的是一个上界，用 Big O 记号表示就都是正确的。

比如如下代码：

```
for (int i = 0; i < N; i++) {
    print("hello world");
```

```
}
```

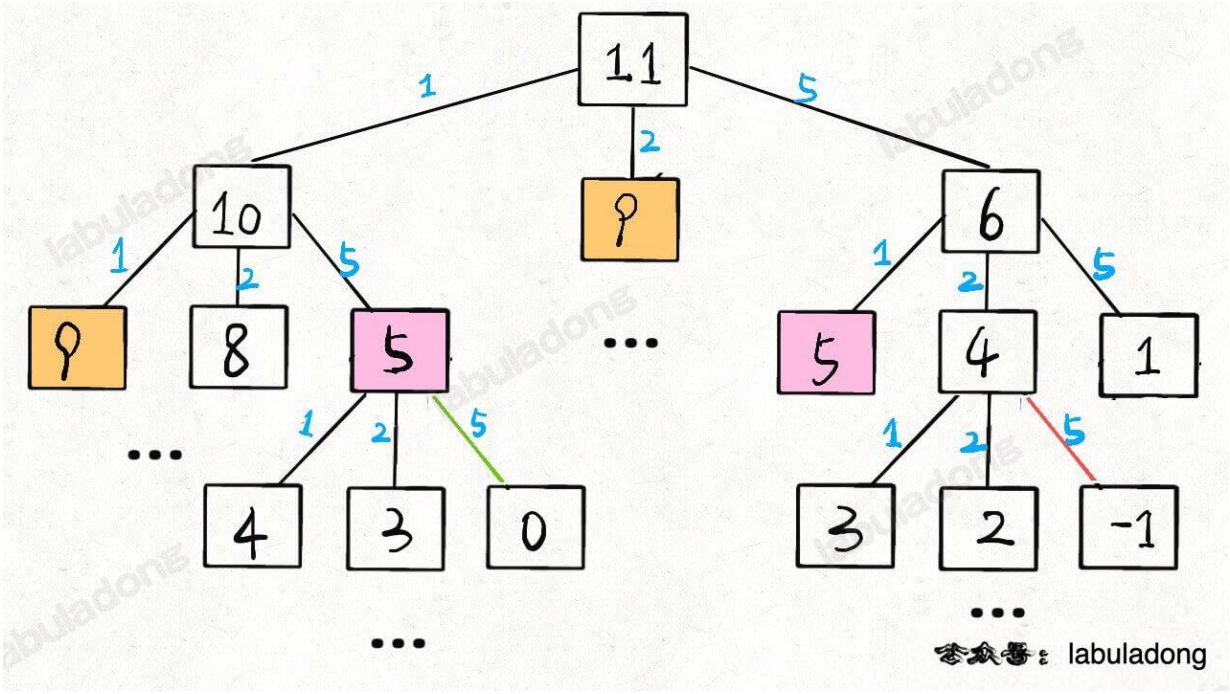
如果说这是一个算法，那么显然它的时间复杂度是 O(N)。**但如果你非要说它的时间复杂度是 O(N^2)，理论上讲是可以的**，因为 O 记号表示一个上界嘛，这个算法的时间复杂度确实不会超过 N^2 这个上界呀，虽然这个上界不够「紧」，但符合定义，所以理论上说也没毛病。

上述例子太简单，非要扩大它的时间复杂度上界显得没什么意义。但有些算法的复杂度会和算法的输入数据有关，没办法提前给出一个特别精确的时间复杂度，那么在这种情况下，用 Big O 记号扩大时间复杂度的上界就变得有意义了。

比如前文 动态规划核心框架 中讲到的凑零钱问题的暴力递归解法，核心代码框架如下：

```
// 定义：要凑出金额 n，至少要 dp(coins, n) 个硬币
int dp(int[] coins, int amount) {
    // base case
    if (amount <= 0) return;
    // 状态转移
    for (int coin : coins) {
        dp(coins, amount - coin);
    }
}
```

当 amount = 11, coins = [1,2,5] 时，算法的递归树就长这样：



后文会具体讲递归算法的时间复杂度计算方法，现在我们先求一下这棵递归树上的节点个数吧。

假设金额 amount 的值为 N，coins 列表中元素个数为 K，那么这棵递归树就是一棵 K 叉树。但这棵树的生长和 coins 列表中的硬币面额有直接的关系，所以这棵树的形状会很不规则，导致我们很难精确地求出树上节点的总数。

对于这种情况，比较简单的处理方式就是按最坏情况做近似处理：

这棵树的高度有多高？不知道，那就按最坏情况来处理，假设全都是面额为 1 的硬币，这种情况下树高为 `N`。

这棵树的结构是什么样的？不知道，那就按最坏情况来处理，假设它是一棵满 `K` 叉树好了。

那么，这棵树上共有多少节点？都按最坏情况来处理，高度为 `N` 的一棵满 `K` 叉树，其节点总数为等比数列求和公式 `(K^N - 1)/(K - 1)`，用 Big O 表示就是 `O(K^N)`。

当然，我们知道这棵树上的节点数其实没有这么多，但用 `O(K^N)` 表示一个粗略的上界是没问题的，也很容易看出来这是一个指数级的算法，需要想办法优化运行效率。

所以，有时候你自己估算出来的时间复杂度和别人估算的复杂度不同，并不一定代表谁算错了，可能你俩都是对的，只是是估算的精度不同。

理论上，我们当然希望得到一个比较准确比较「紧」的上界，但想得到准确的上界对数学的功力有一定要求，我们针对面试刷题的话不妨退而求其次，只要数量级（线性/指数级/对数级/平方级等）能对上就没问题。

在算法领域，除了用 Big O 表示渐进上界，还有渐进下界、渐进紧确界等边界的表示方法，有兴趣的读者可以自行搜索。不过从实用的角度看，以上对 Big O 记号表示法的讲解就够用了。

非递归算法分析

非递归算法的空间复杂度一般很容易计算，你看它有没有申请数组之类的存储空间就行了，所以我主要说下时间复杂度的分析。

如果你有高质量的问题，可以 点击这里 进入本文的讨论区。

▶ 引用本文的题目

安装 我的 Chrome 刷题插件 点开下列题目可直接查看解题思路：

LeetCode	力扣
128. Longest Consecutive Sequence	128. 最长连续序列
1429. First Unique Number🔒	1429. 第一个唯一数字🔒
-	剑指 Offer II 119. 最长连续序列

▶ 引用本文的文章

- 动态规划和回溯算法的思维转换
- 动态规划穷举的两种视角
- 单调队列结构解决滑动窗口问题
- 哈希表基本原理
- 回溯算法秒杀所有排列/组合/子集问题
- 回溯算法解题套路框架
- 并查集（Union-Find）算法
- 我写了首诗，把滑动窗口算法变成了默写题
- 数组（顺序存储）基本原理

———————————————

本文为网站会员内容，请 点这里 查看。

算法笔试「骗分」套路

学算法认准 labuladong，致力于把算法讲清楚！网页版 点这里。

首先回答一个问题，刷力扣题是直接在网页上刷比较好还是在本地 IDE 上刷比较好?

如果是牛客网笔试那种自己处理输入输出的判题形式，一定要在 IDE 上写，这个没啥说的，但**像力扣这种判题形式，我个人偏好直接在网页上刷**，原因有二：

1、方便

因为力扣有的数据结构是自定的，比如说 `TreeNode`，`ListNode` 这种，在本地你还得把这个类 copy 过去。

而且在 IDE 上没办法测试，写完代码之后还得粘贴到网页上跑测试数据，那还不如直接网页上写呢。

算法又不是工程代码，量都比较小，IDE 的自动补全带来的收益基本可以忽略不计。

2、实用

到时候面试的时候，面试官给你出的算法题大都是希望你直接在网页上完成的，最好是边写边讲你的思路。

如果平时练习的时候就习惯没有 IDE 的自动补全，习惯手写代码大脑编译，到时候面试的时候写代码就能更快更从容。

之前我面快手的时候，有个面试官让我 实现 LRU 算法，我直接把双链表的实现、哈希链表的实现，在网页上全写出来了，而且一次无 bug 跑通，可以看到面试官惊讶的表情😂

我秋招能当 offer 收割机，很大程度上就是因为手写算法这一关超出面试官的预期，其实都是因为之前在网页上刷题练出来的。

当然，实在不想在网页上刷，也可以用我的 vscode 刷题插件或者 JetBrains 刷题插件，插件和我的网站内容都有完美的融合：

接下来介绍几个很实用的「投机取巧」的办法和调试技巧，全方位提高你通过笔试的概率。

如果你有高质量的问题，可以 点击这里 进入本文的讨论区。

▶ **引用本文的文章**

- 带权重的随机选择算法

——————————————————

本文为网站会员内容，请 点这里 查看。

4.2 经典动态规划

动态规划的底层逻辑也是穷举，只不过动态规划问题具有一些特殊的性质，使得穷举的过程中存在可优化的空间。

这里先提醒你，学习动态规划问题要格外注意这几个词：「**状态**」，「**选择**」，「**dp 数组的定义**」。你把这几个词理解到位了，就理解了动态规划的核心。

当然，动态规划问题的题型非常广泛，我不能保证你理解了核心就能做出所有动态规划题目，但我保证你理解了核心原理之后可以很轻松地理解别人的正确解法。如果自己勤加练习和总结，解决大部分中上难度的动态规划问题应该是没什么问题的。

公众号标签：手把手刷动态规划

最长递增子序列问题

Stars 123k 精品课程 查看 知乎 @labuladong B站 @labuladong

学算法认准 labuladong，致力于把算法讲清楚！网页版 点这里。

读完本文，你不仅学会了算法套路，还可以顺便解决如下题目：

LeetCode	力扣	难度
300. Longest Increasing Subsequence	300. 最长递增子序列	🟠
354. Russian Doll Envelopes	354. 俄罗斯套娃信封问题	🔴

也许有读者看了前文 动态规划详解，学会了动态规划的套路：找到了问题的「状态」，明确了 dp 数组/函数的含义，定义了 base case；但是不知道如何确定「选择」，也就是找不到状态转移的关系，依然写不出动态规划解法，怎么办？

不要担心，动态规划的难点本来就在于寻找正确的状态转移方程，本文就借助经典的「最长递增子序列问题」来讲一讲设计动态规划的通用技巧：**数学归纳思想**。

最长递增子序列（Longest Increasing Subsequence，简写 LIS）是非常经典的一个算法问题，比较容易想到的是动态规划解法，时间复杂度 O(N^2)，我们借这个问题来由浅入深讲解如何找状态转移方程，如何写出动态规划解法。比较难想到的是利用二分查找，时间复杂度是 O(NlogN)，我们通过一种简单的纸牌游戏来辅助理解这种巧妙的解法。

力扣第 300 题「最长递增子序列」就是这个问题：

输入一个无序的整数数组，请你找到其中最长的严格递增子序列的长度，函数签名如下：

```
int lengthOfLIS(int[] nums);
```

比如说输入 `nums=[10,9,2,5,3,7,101,18]`，其中最长的递增子序列是 `[2,3,7,101]`，所以算法的输出应该是 4。

注意「子序列」和「子串」这两个名词的区别，子串一定是连续的，而子序列不一定是连续的。下面先来设计动态规划算法解决这个问题。

一、动态规划解法

动态规划的核心设计思想是数学归纳法。

相信大家对数学归纳法都不陌生，高中就学过，而且思路很简单。比如我们想证明一个数学结论，那么**我们先假设这个结论在 `k < n` 时成立，然后根据这个假设，想办法推导证明出 `k = n` 的时候此结论也成立**。如果能够证明出来，那么就说明这个结论对于 `k` 等于任何数都成立。

类似的，我们设计动态规划算法，不是需要一个 dp 数组吗？我们可以假设 `dp[0...i-1]` 都已经被算出来了，然后问自己：怎么通过这些结果算出 `dp[i]`？

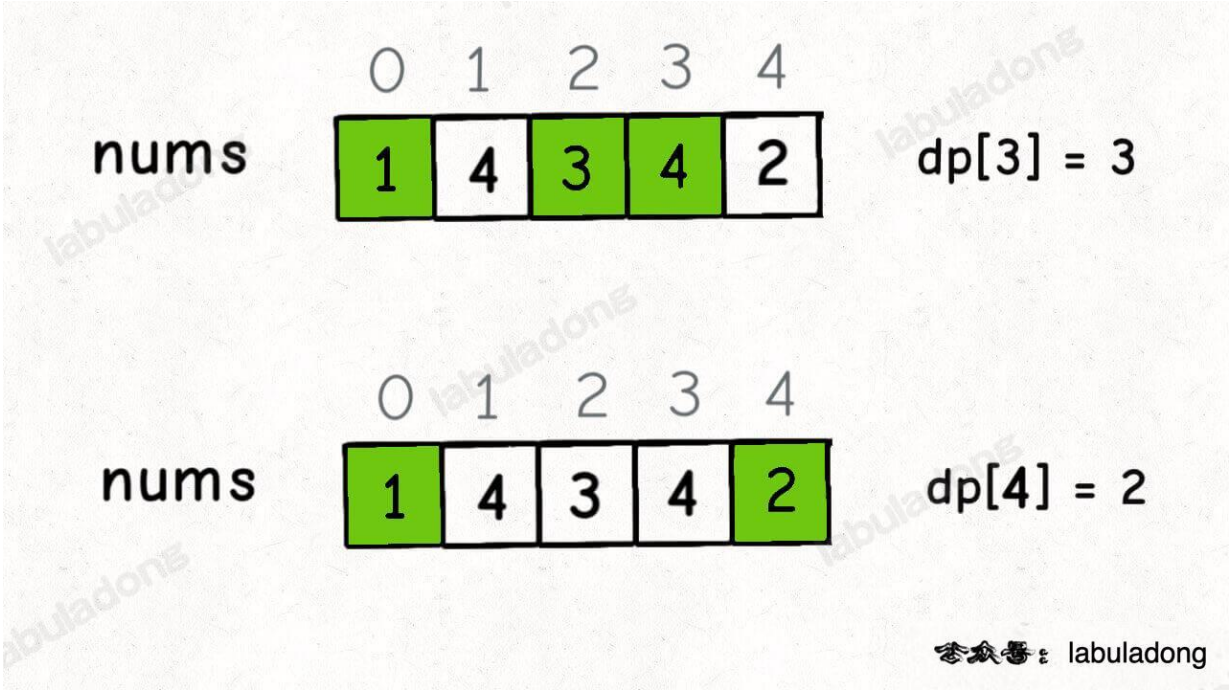
直接拿最长递增子序列这个问题举例你就明白了。不过，首先要定义清楚 dp 数组的含义，即 `dp[i]` 的值到底代表着什么？

我们的定义是这样的：`dp[i]` 表示以 `nums[i]` 这个数结尾的最长递增子序列的长度。

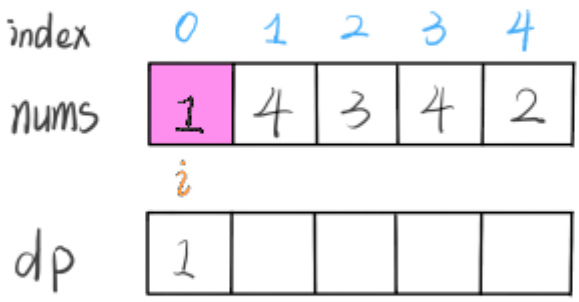
> 为什么这样定义呢？这是解决子序列问题的一个套路，后文 动态规划之子序列问题解题模板 总结了几种常见套路。你读完本章所有的动态规划问题，就会发现 `dp` 数组的定义方法也就那几种。

根据这个定义，我们就可以推出 base case：`dp[i]` 初始值为 1，因为以 `nums[i]` 结尾的最长递增子序列起码要包含它自己。

举两个例子：



这个 GIF 展示了算法演进的过程：



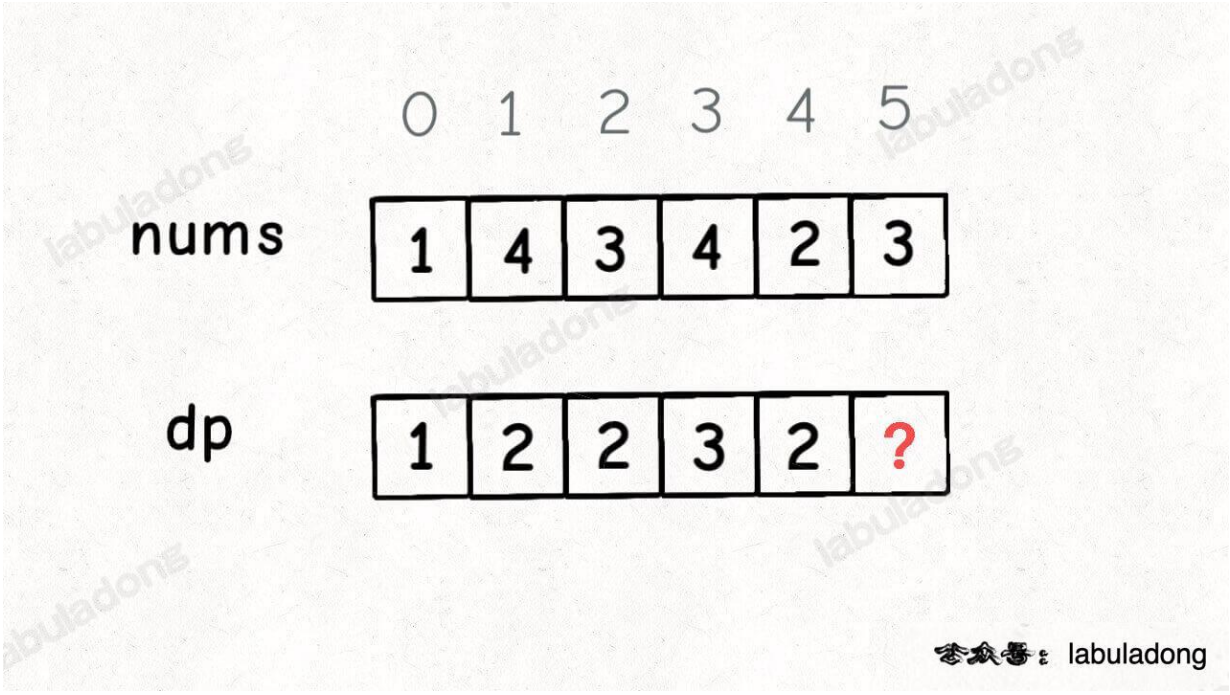
根据这个定义，我们的最终结果（子序列的最大长度）应该是 dp 数组中的最大值。

```
int res = 0;
for (int i = 0; i < dp.length; i++) {
    res = Math.max(res, dp[i]);
}
return res;
```

读者也许会问，刚才的算法演进过程中每个 `dp[i]` 的结果是我们肉眼看出来的，我们应该怎么设计算法逻辑来正确计算每个 `dp[i]` 呢？

这就是动态规划的重头戏，如何设计算法逻辑进行状态转移，才能正确运行呢？这里需要使用数学归纳的思想：

假设我们已经知道了 `dp[0..4]` 的所有结果，我们如何通过这些已知结果推出 `dp[5]` 呢？



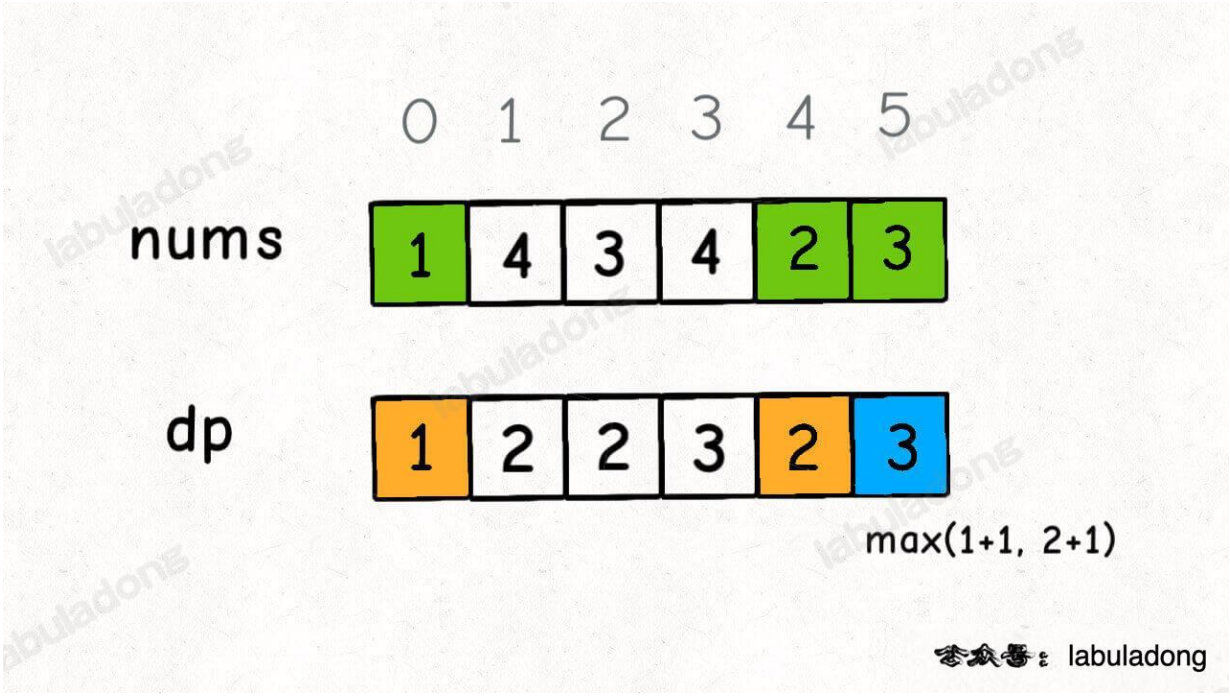
根据刚才我们对 dp 数组的定义，现在想求 dp[5] 的值，也就是想求以 nums[5] 为结尾的最长递增子序列。

nums[5] = 3，既然是递增子序列，我们只要找到前面那些结尾比 3 小的子序列，然后把 3 接到这些子序列末尾，就可以形成一个新的递增子序列，而且这个新的子序列长度加一。

nums[5] 前面有哪些元素小于 nums[5]？这个好算，用 for 循环比较一波就能把这些元素找出来。

以这些元素为结尾的最长递增子序列的长度是多少？回顾一下我们对 dp 数组的定义，它记录的正是以每个元素为末尾的最长递增子序列的长度。

以我们举的例子来说，nums[0] 和 nums[4] 都是小于 nums[5] 的，然后对比 dp[0] 和 dp[4] 的值，我们让 nums[5] 和更长的递增子序列结合，得出 dp[5] = 3：



```
    for (int j = 0; j < i; j++) {
        if (nums[i] > nums[j]) {
            dp[i] = Math.max(dp[i], dp[j] + 1);
        }
    }
```

当 `i = 5` 时，这段代码的逻辑就可以算出 `dp[5]`。其实到这里，这道算法题我们就基本做完了。

读者也许会问，我们刚才只是算了 `dp[5]` 呀，`dp[4]`, `dp[3]` 这些怎么算呢？类似数学归纳法，你已经可以算出 `dp[5]` 了，其他的就都可以算出来：

```
    for (int i = 0; i < nums.length; i++) {
        for (int j = 0; j < i; j++) {
            // 寻找 nums[0..j-1] 中比 nums[i] 小的元素
            if (nums[i] > nums[j]) {
                // 把 nums[i] 接在后面，即可形成长度为 dp[j] + 1，
                // 且以 nums[i] 为结尾的递增子序列
                dp[i] = Math.max(dp[i], dp[j] + 1);
            }
        }
    }
```

结合我们刚才说的 base case，下面我们看一下完整代码：

```
int lengthOfLIS(int[] nums) {
    // 定义：dp[i] 表示以 nums[i] 这个数结尾的最长递增子序列的长度
    int[] dp = new int[nums.length];
    // base case：dp 数组全都初始化为 1
    Arrays.fill(dp, 1);
    for (int i = 0; i < nums.length; i++) {
        for (int j = 0; j < i; j++) {
            if (nums[i] > nums[j])
                dp[i] = Math.max(dp[i], dp[j] + 1);
        }
    }

    int res = 0;
    for (int i = 0; i < dp.length; i++) {
        res = Math.max(res, dp[i]);
    }
    return res;
}
```

▶ 🎃 代码可视化动画🎃

至此，这道题就解决了，时间复杂度 `O(N^2)`。总结一下如何找到动态规划的状态转移关系：

1、明确 dp 数组的定义。这一步对于任何动态规划问题都很重要，如果不得当或者不够清晰，会阻碍之后的步骤。

2、根据 dp 数组的定义，运用数学归纳法的思想，假设 dp[0...i-1] 都已知，想办法求出 dp[i]，一旦这一步完成，整个题目基本就解决了。

但如果无法完成这一步，很可能就是 dp 数组的定义不够恰当，需要重新定义 dp 数组的含义；或者可能是 dp 数组存储的信息还不够，不足以推出下一步的答案，需要把 dp 数组扩大成二维数组甚至三维数组。

目前的解法是标准的动态规划，但对最长递增子序列问题来说，这个解法不是最优的，可能无法通过所有测试用例了，下面讲讲更高效的解法。

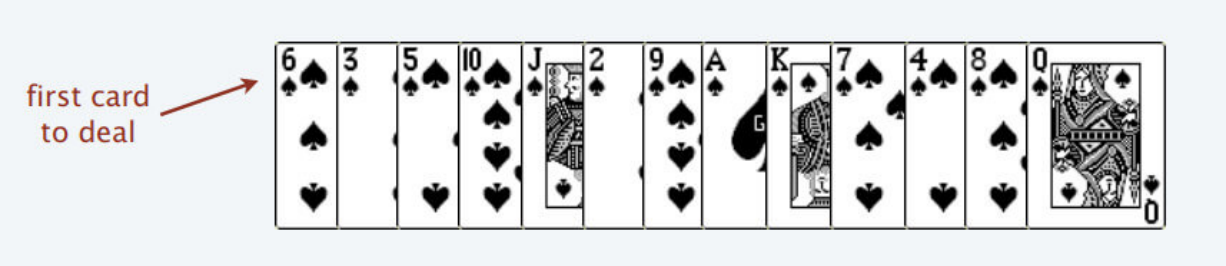
二、二分查找解法

这个解法的时间复杂度为 O(NlogN)，但是说实话，正常人基本想不到这种解法（也许玩过某些纸牌游戏的人可以想出来）。所以大家了解一下就好，正常情况下能够给出动态规划解法就已经很不错了。

根据题目的意思，我都很难想象这个问题竟然能和二分查找扯上关系。其实最长递增子序列和一种叫做 patience game 的纸牌游戏有关，甚至有一种排序方法就叫做 patience sorting（耐心排序）。

为了简单起见，后文跳过所有数学证明，通过一个简化的例子来理解一下算法思路。

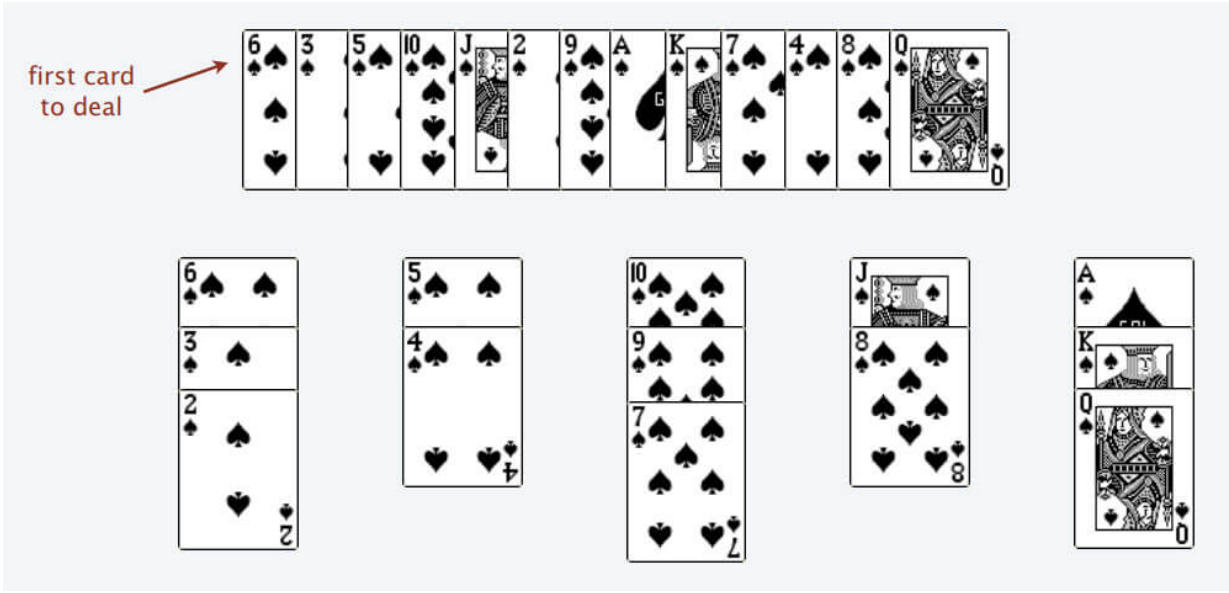
首先，给你一排扑克牌，我们像遍历数组那样从左到右一张一张处理这些扑克牌，最终要把这些牌分成若干堆。



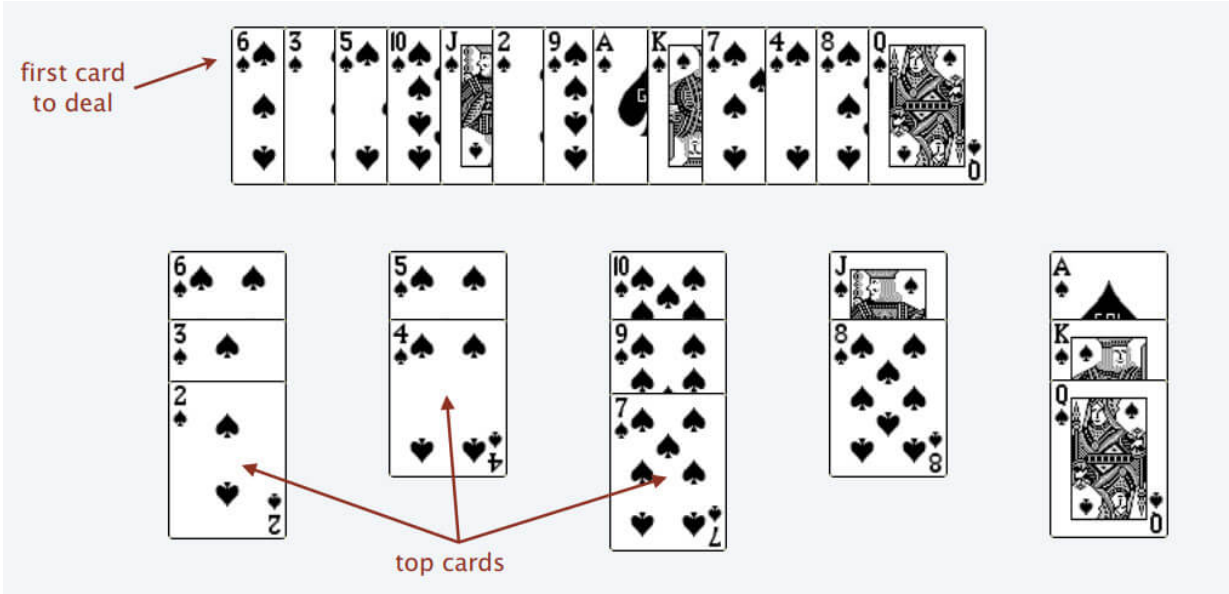
处理这些扑克牌要遵循以下规则：

只能把点数小的牌压到点数比它大的牌上；如果当前牌点数较大没有可以放置的堆，则新建一个堆，把这张牌放进去；如果当前牌有多个堆可供选择，则选择最左边的那一堆放置。

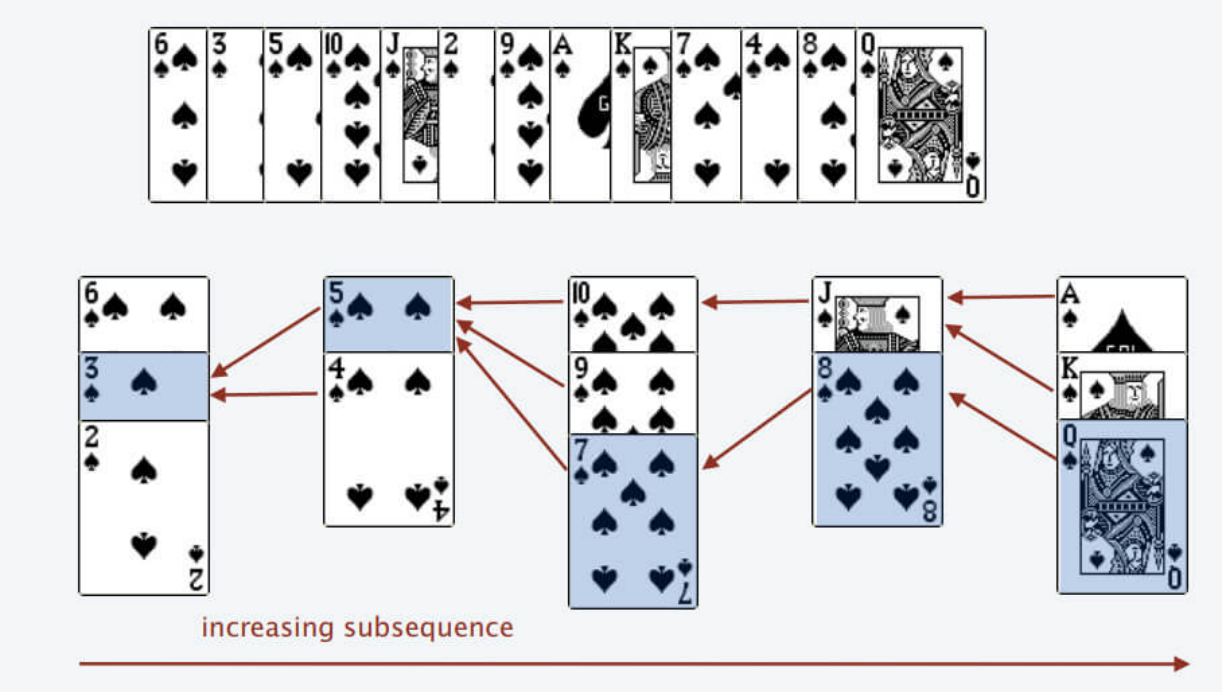
比如说上述的扑克牌最终会被分成这样 5 堆（我们认为纸牌 A 的牌面是最大的，纸牌 2 的牌面是最小的）。



为什么遇到多个可选择堆的时候要放到最左边的堆上呢？因为这样可以保证牌堆顶的牌有序（2, 4, 7, 8, Q），证明略。



按照上述规则执行，可以算出最长递增子序列，牌的堆数就是最长递增子序列的长度，证明略。



我们只要把处理扑克牌的过程编程写出来即可。每次处理一张扑克牌不是要找一个合适的牌堆顶来放吗，牌堆顶的牌不是**有序**吗，这就能用到二分查找了：用二分查找来搜索当前牌应放置的位置。

> 前文 二分查找算法详解 详细介绍了二分查找的细节及变体，这里就完美应用上了，如果没读过强烈建议阅读。

```
int lengthOfLIS(int[] nums) {
    int[] top = new int[nums.length];
    // 牌堆数初始化为 0
    int piles = 0;
    for (int i = 0; i < nums.length; i++) {
        // 要处理的扑克牌
        int poker = nums[i];

        /***** 搜索左侧边界的二分查找 *****/
        int left = 0, right = piles;
        while (left < right) {
            int mid = (left + right) / 2;
            if (top[mid] > poker) {
                right = mid;
            } else if (top[mid] < poker) {
                left = mid + 1;
            } else {
                right = mid;
            }
        }
        /*********************************/

        // 没找到合适的牌堆，新建一堆
        if (left == piles) piles++;
        // 把这张牌放到牌堆顶
```

```
            top[left] = poker;
        }
        // 牌堆数就是 LIS 长度
        return piles;
    }
```

▶ 🌟 代码可视化动画🌟

至此，二分查找的解法也讲解完毕。

这个解法确实很难想到。首先涉及数学证明，谁能想到按照这些规则执行，就能得到最长递增子序列呢？其次还有二分查找的运用，要是对二分查找的细节不清楚，给了思路也很难写对。

所以，这个方法作为思维拓展好了。但动态规划的设计方法应该完全理解：假设之前的答案已知，利用数学归纳的思想正确进行状态的推演转移，最终得到答案。

三、拓展到二维

我们看一个经常出现在生活中的有趣问题，力扣第 354 题「俄罗斯套娃信封问题」，先看下题目：

▼ 354. 俄罗斯套娃信封问题 Leetcode | 力扣

给你一个二维整数数组 `envelopes` ，其中 `envelopes[i] = [wᵢ, hᵢ]` ，表示第 `i` 个信封的宽度和高度。

当另一个信封的宽度和高度都比这个信封大的时候，这个信封就可以放进另一个信封里，如同俄罗斯套娃一样。

请计算 **最多能有多少个** 信封能组成一组“俄罗斯套娃”信封（即可以把一个信封放到另一个信封里面）。

注意：不允许旋转信封。

示例 1：

```
输入：envelopes = [[5,4],[6,4],[6,7],[2,3]]
输出：3
解释：最多信封的个数为 3，组合为：[2,3] => [5,4] => [6,7]。
```

示例 2：

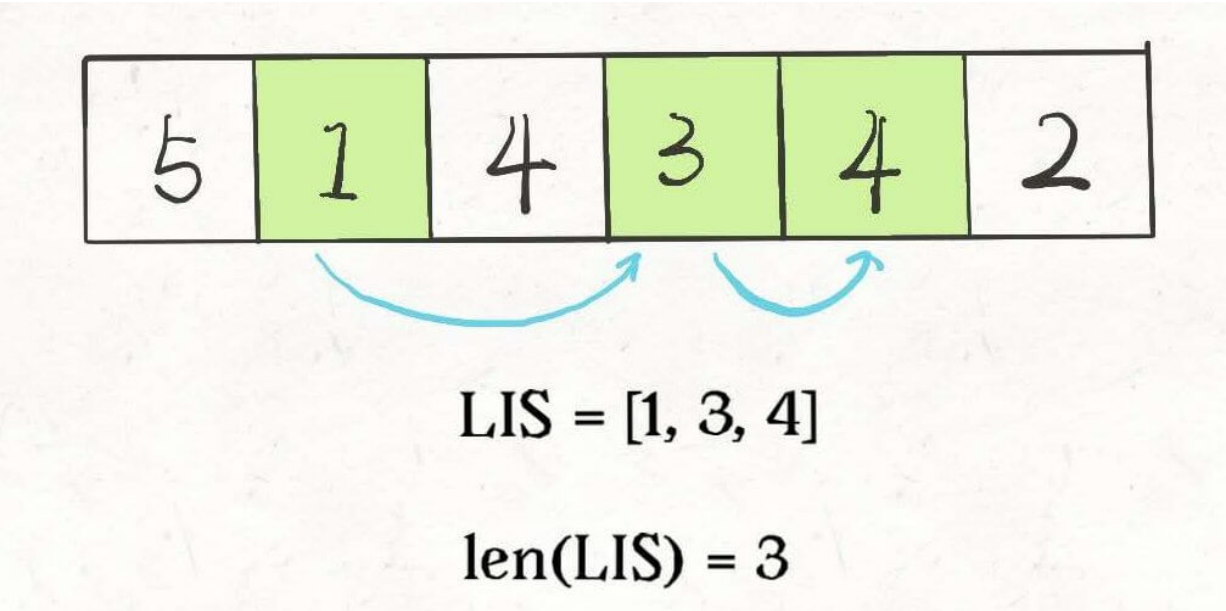
```
输入：envelopes = [[1,1],[1,1],[1,1]]
输出：1
```

提示：

- `1 <= envelopes.length <= 10^5`
- `envelopes[i].length == 2`
- `1 <= w_i, h_i <= 10^5`

这道题目其实是最长递增子序列的一个变种，因为每次合法的嵌套是大的套小的，相当于在二维平面中找一个最长递增的子序列，其长度就是最多能嵌套的信封个数。

前面说的标准 LIS 算法只能在一维数组中寻找最长子序列，而我们的信封是由 `(w, h)` 这样的二维数对形式表示的，如何把 LIS 算法运用过来呢？



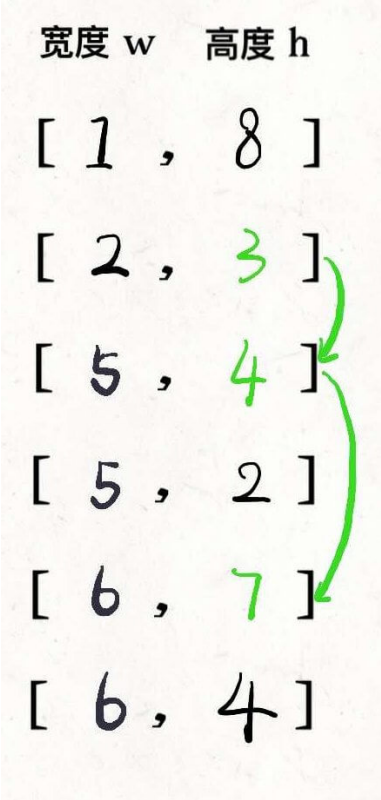
读者也许会想，通过 `w * h` 计算面积，然后对面积进行标准的 LIS 算法。但是稍加思考就会发现这样不行，比如 `1 * 10` 大于 `3 * 3`，但是显然这样的两个信封是无法互相嵌套的。

这道题的解法比较巧妙：

先对宽度 `w` 进行升序排序，如果遇到 `w` 相同的情况，则按照高度 `h` 降序排序；之后把所有的 `h` 作为一个数组，在这个数组上计算 LIS 的长度就是答案。

画个图理解一下，先对这些数对进行排序：

然后在 h 上寻找最长递增子序列，这个子序列就是最优的嵌套方案：



那么为什么这样就可以找到可以互相嵌套的信封序列呢？稍微思考一下就明白了：

首先，对宽度 w 从小到大排序，确保了 w 这个维度可以互相嵌套，所以我们只需要专注高度 h 这个维度能够互相嵌套即可。

其次，两个 w 相同的信封不能相互包含，所以对于宽度 w 相同的信封，对高度 h 进行降序排序，保证二维 LIS 中不存在多个 w 相同的信封（因为题目说了长宽相同也无法嵌套）。

下面看解法代码：

```
// envelopes = [[w, h], [w, h]...]
public int maxEnvelopes(int[][] envelopes) {
    int n = envelopes.length;
    // 按宽度升序排列，如果宽度一样，则按高度降序排列
    Arrays.sort(envelopes, (int[] a, int[] b) -> {
        return a[0] == b[0] ?
            b[1] - a[1] : a[0] - b[0];
    });
    // 对高度数组寻找 LIS
    int[] height = new int[n];
    for (int i = 0; i < n; i++)
        height[i] = envelopes[i][1];

    return lengthOfLIS(height);
}

int lengthOfLIS(int[] nums) {
    // 见前文
}
```

▶ 代码可视化动画

为了清晰，我将代码分为了两个函数， 你也可以合并，这样可以节省下 `height` 数组的空间。

由于增加了测试用例，这里必须使用二分搜索版的 `lengthOfLIS` 函数才能通过所有测试用例。这样的话算法的时间复杂度为 `O(NlogN)`，因为排序和计算 LIS 各需要 `O(NlogN)` 的时间，加到一起还是 `O(NlogN)`；空间复杂度为 `O(N)`，因为计算 LIS 的函数中需要一个 `top` 数组。

接下来可阅读：

- 动态规划之最大子数组

如果你有高质量的问题，可以 点击这里 进入本文的讨论区。

▶ 引用本文的题目

安装 我的 Chrome 刷题插件 点开下列题目可直接查看解题思路：

LeetCode	力扣
1425. Constrained Subsequence Sum	1425. 带限制的子序列和
256. Paint House🔒	256. 粉刷房子🔒
368. Largest Divisible Subset	368. 最大整除子集
-	剑指 Offer II 091. 粉刷房子

▶ 引用本文的文章

- 二分查找高效判定子序列
- 动态规划之子序列问题解题模板
- 动态规划穷举的两种视角
- 动态规划解题套路框架
- 动态规划设计：最大子数组
- 我的刷题心得：算法的本质
- 最优子结构原理和 dp 数组遍历方向

——————————————————

更多精品课程可查看 我的网站；扫码查看更多配套学习套件：

最大子数组和问题

Stars 123k 精品课程 查看 知乎 @labuladong B站 @labuladong

学算法认准 labuladong，致力于把算法讲清楚！网页版 点这里。

读完本文，你不仅学会了算法套路，还可以顺便解决如下题目：

LeetCode	力扣	难度
53. Maximum Subarray	53. 最大子数组和	🟠
-	剑指 Offer 42. 连续子数组的最大和	🟢

力扣第 53 题「最大子序和」问题和前文讲过的 经典动态规划：最长递增子序列 的套路非常相似，代表着一类比较特殊的动态规划问题的思路，题目如下：

给你输入一个整数数组 `nums`，请你找在其中找一个和最大的子数组，返回这个子数组的和。函数签名如下：

```
int maxSubArray(int[] nums);
```

比如说输入 `nums = [-3,1,3,-1,2,-4,2]`，算法返回 5，因为最大子数组 `[1,3,-1,2]` 的和为 5。

其实第一次看到这道题，我首先想到的是滑动窗口算法，因为我们前文说过嘛，滑动窗口算法就是专门处理子串/子数组问题的，这里不就是子数组问题么？

前文 滑动窗口算法框架详解 中讲过，想用滑动窗口算法，先问自己几个问题：

1、什么时候应该扩大窗口？

2、什么时候应该缩小窗口？

3、什么时候更新答案？

我之前认为这题用不了滑动窗口算法，因为我认为 `nums` 中包含负数，所以无法确定什么时候扩大和缩小窗口。但经读者评论的启发，发现这道题确实是可以用滑动窗口技巧解决的。

我们可以在窗口内元素之和大于等于 0 时扩大窗口，在窗口内元素之和小于 0 时缩小窗口，在每次移动窗口时更新答案。先直接看解法代码，待会儿再解释：

```

```

```
int maxSubArray(int[] nums) {
    int left = 0, right = 0;
    int windowSum = 0, maxSum = Integer.MIN_VALUE;
    while(right < nums.length){
        // 扩大窗口并更新窗口内的元素和
        windowSum += nums[right];
        right++;

        // 更新答案
        maxSum = windowSum > maxSum ? windowSum : maxSum;

        // 判断窗口是否要收缩
        while(windowSum < 0) {
            // 缩小窗口并更新窗口内的元素和
            windowSum -=  nums[left];
            left++;
        }
    }
    return maxSum;
}
```

结合前文 滑动窗口算法框架详解 给出的滑动窗口代码框架，这段代码的结构应该很清晰，我主要解释一下为什么这个逻辑是正确的。

首先讨论一种特殊情况，就是 `nums` 中全是负数的时候，此时算法是可以得到正确答案的。

接下来讨论一般情况，`nums` 中有正有负，这种情况下元素和最大的那个子数组一定是以正数开头的（以负数开头的话，把这个负数去掉，就可以得到和更大的子数组了，与假设相矛盾）。那么此时我们需要穷举所有以正数开头的子数组，计算他们的元素和，找到元素和最大的那个子数组。

说到这里，解法代码的逻辑应该就清晰了。算法只有在窗口元素和大于 0 时才会不断扩大窗口，并且在扩大窗口时更新答案，这其实就是在穷举所有正数开头的子数组，寻找子数组和最大的那个，所以这段代码能够得到正确的结果。

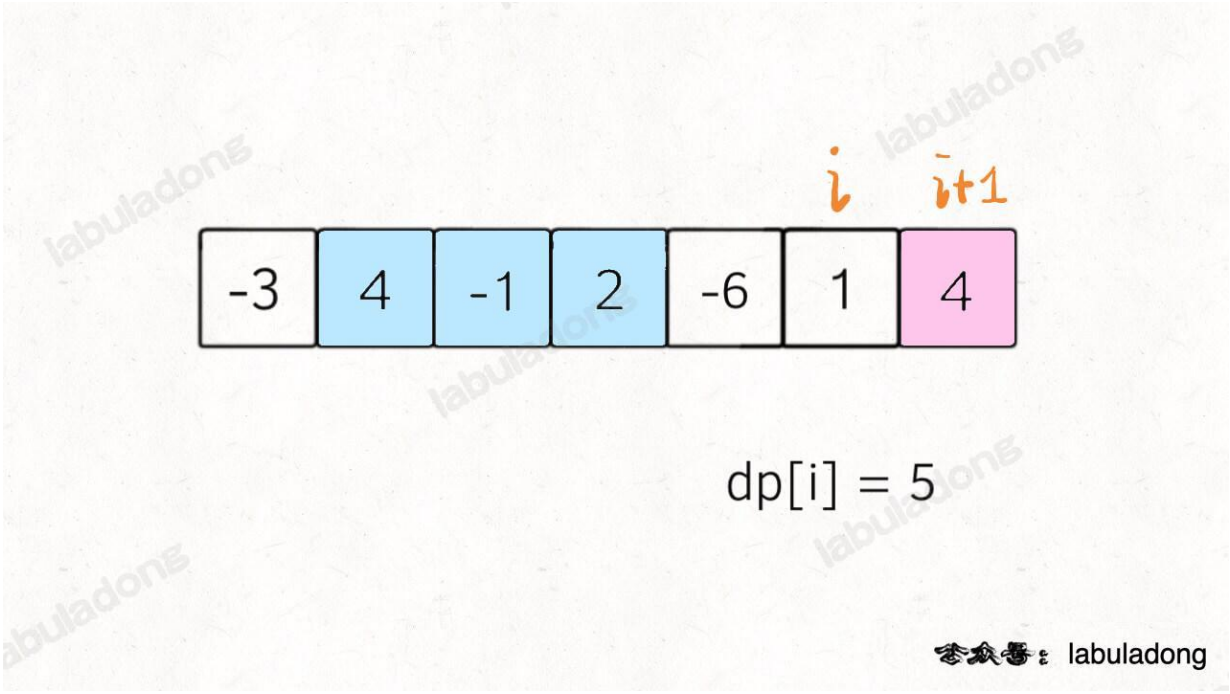
动态规划思路

解决这个问题还可以用动态规划技巧解决，但是 `dp` 数组的定义比较特殊。按照我们常规的动态规划思路，一般是这样定义 `dp` 数组：

`nums[0..i]` 中的「最大的子数组和」为 `dp[i]`。

如果这样定义的话，整个 `nums` 数组的「最大子数组和」就是 `dp[n-1]`。如何找状态转移方程呢？按照数学归纳法，假设我们知道了 `dp[i-1]`，如何推导出 `dp[i]` 呢？

如下图，按照我们刚才对 `dp` 数组的定义，`dp[i] = 5`，也就是等于 `nums[0..i]` 中的最大子数组和：



那么在上图这种情况中，利用数学归纳法，你能用 dp[i] 推出 dp[i+1] 吗？

实际上是不行的，因为子数组一定是连续的，按照我们当前 dp 数组定义，并不能保证 nums[0..i] 中的最大子数组与 nums[i+1] 是相邻的，也就没办法从 dp[i] 推导出 dp[i+1]。

所以说我们这样定义 dp 数组是不正确的，无法得到合适的状态转移方程。对于这类子数组问题，我们就要重新定义 dp 数组的含义：

以 nums[i] 为结尾的「最大子数组和」为 dp[i]。

这种定义之下，想得到整个 nums 数组的「最大子数组和」，不能直接返回 dp[n-1]，而需要遍历整个 dp 数组：

```
int res = Integer.MIN_VALUE;
for (int i = 0; i < n; i++) {
    res = Math.max(res, dp[i]);
}
return res;
```

依然使用数学归纳法来找状态转移关系：假设我们已经算出了 dp[i-1]，如何推导出 dp[i] 呢？

可以做到，dp[i] 有两种「选择」，要么与前面的相邻子数组连接，形成一个和更大的子数组；要么不与前面的子数组连接，自成一派，自己作为一个子数组。

如何选择？既然要求「最大子数组和」，当然选择结果更大的那个啦：

```
// 要么自成一派，要么和前面的子数组合并
dp[i] = Math.max(nums[i], nums[i] + dp[i - 1]);
```

综上，我们已经写出了状态转移方程，就可以直接写出解法了：

```
int maxSubArray(int[] nums) {
    int n = nums.length;
    if (n == 0) return 0;
    // 定义：dp[i] 记录以 nums[i] 为结尾的「最大子数组和」
    int[] dp = new int[n];
    // base case
    // 第一个元素前面没有子数组
    dp[0] = nums[0];
    // 状态转移方程
    for (int i = 1; i < n; i++) {
        dp[i] = Math.max(nums[i], nums[i] + dp[i - 1]);
    }
    // 得到 nums 的最大子数组
    int res = Integer.MIN_VALUE;
    for (int i = 0; i < n; i++) {
        res = Math.max(res, dp[i]);
    }
    return res;
}
```

▶ 🌟 代码可视化动画🌟

以上解法时间复杂度是 O(N)，空间复杂度也是 O(N)，较暴力解法已经很优秀了，不过**注意到 `dp[i]` 仅仅和 `dp[i-1]` 的状态有关**，那么我们可以施展前文 动态规划的降维打击：空间压缩技巧 讲的技巧进行进一步优化，将空间复杂度降低：

```
int maxSubArray(int[] nums) {
    int n = nums.length;
    if (n == 0) return 0;
    // base case
    int dp_0 = nums[0];
    int dp_1 = 0, res = dp_0;

    for (int i = 1; i < n; i++) {
        // dp[i] = max(nums[i], nums[i] + dp[i-1])
        dp_1 = Math.max(nums[i], nums[i] + dp_0);
        dp_0 = dp_1;
        // 顺便计算最大的结果
        res = Math.max(res, dp_1);
    }

    return res;
}
```

前缀和思路

在动态规划解法中，我们通过状态转移方程推导以 nums[i] 结尾的最大子数组和，其实用前文 小而美的算法技巧：前缀和数组 讲过的前缀和数组也可以达到相同的效果。

回顾一下，前缀和数组 preSum 就是 nums 元素的累加和，preSum[i+1] - preSum[j] 其实就是子数组 nums[j..i] 之和（根据 preSum 数组的实现，索引 0 是占位符，所以 i 有一位索引偏移）。

那么反过来想，以 nums[i] 为结尾的最大子数组之和是多少？其实就是 preSum[i+1] - min(preSum[0..i])。

所以，我们可以利用前缀和数组计算以每个元素结尾的子数组之和，进而得到和最大的子数组：

```
// 前缀和技巧解题
int maxSubArray(int[] nums) {
    int n = nums.length;
    int[] preSum = new int[n + 1];
    preSum[0] = 0;
    // 构造 nums 的前缀和数组
    for (int i = 1; i <= n; i++) {
        preSum[i] = preSum[i - 1] + nums[i - 1];
    }

    int res = Integer.MIN_VALUE;
    int minVal = Integer.MAX_VALUE;
    for (int i = 0; i < n; i++) {
        // 维护 minVal 是 preSum[0..i] 的最小值
        minVal = Math.min(minVal, preSum[i]);
        // 以 nums[i] 结尾的最大子数组和就是 preSum[i+1] - min(preSum[0..i])
        res = Math.max(res, preSum[i + 1] - minVal);
    }
    return res;
}
```

至此，前缀和解法也完成了。

简单总结下动态规划解法吧，虽然说状态转移方程确实有点玄学，但大部分还是有些规律可循的，跑不出那几个套路。像子数组、子序列这类问题，你就可以尝试定义 dp[i] 是以 nums[i] 为结尾的最大子数组和/最长递增子序列，因为这样定义更容易将 dp[i+1] 和 dp[i] 建立起联系，利用数学归纳法写出状态转移方程。

如果你有高质量的问题，可以 点击这里 进入本文的讨论区。

▶ **引用本文的题目**

安装 我的 Chrome 刷题插件 点开下列题目可直接查看解题思路：

LeetCode	力扣
256. Paint House🔒	256. 粉刷房子🔒
-	剑指 Offer 42. 连续子数组的最大和

LeetCode	力扣
-	剑指 Offer II 091. 粉刷房子

▶ 引用本文的文章

- 动态规划之子序列问题解题模板
- 动态规划设计：最长递增子序列

——————————————

更多精品课程可查看 我的网站；扫码查看更多配套学习套件：

编辑距离问题

Stars 123k 精品课程 查看 知乎 @labuladong B站 @labuladong

学算法认准 labuladong，致力于把算法讲清楚！网页版 点这里。

读完本文，你不仅学会了算法套路，还可以顺便解决如下题目：

LeetCode	力扣	难度
72. Edit Distance	72. 编辑距离	🔴

> tip：本文有视频版：编辑距离详解动态规划。建议关注我的 B 站账号，我会用视频领读的方式带大家学习那些稍有难度的算法技巧。

前几天看了一份鹅厂的面试题，算法部分大半是动态规划，最后一题就是写一个计算编辑距离的函数，今天就专门写一篇文章来探讨一下这个问题。

我个人很喜欢编辑距离这个问题，因为它看起来十分困难，解法却出奇得简单漂亮，而且它是少有的比较实用的算法（我承认很多算法问题都不太实用）。

力扣第 72 题「编辑距离」就是这个问题，先看下题目：

▼ 72. 编辑距离 Leetcode | 力扣

给你两个单词 `word1` 和 `word2`， *请返回将 `word1` 转换成 `word2` 所使用的最少操作数* 。

你可以对一个单词进行如下三种操作：

- 插入一个字符
- 删除一个字符
- 替换一个字符

示例 1：

```
输入：word1 = "horse", word2 = "ros"
输出：3
解释：
horse -> rorse (将 %%%%%h%%%%% 替换为 %%%%%r%%%%%)
rorse -> rose (删除 %%%%%r%%%%%)
rose -> ros (删除 %%%%%e%%%%%)
```

示例 2：

```
输入：word1 = "intention", word2 = "execution"
输出：5
解释：
intention -> inention （删除 %%%%%t%%%%%）
inention -> enention （将 %%%%%i%%%%% 替换为 %%%%%e%%%%%）
enention -> exention （将 %%%%%n%%%%% 替换为 %%%%%x%%%%%）
exention -> exection （将 %%%%%n%%%%% 替换为 %%%%%c%%%%%）
exection -> execution （插入 %%%%%u%%%%%）
```

提示：

- `0 <= word1.length, word2.length <= 500`
- `word1` 和 `word2` 由小写英文字母组成

函数签名如下：

```
int minDistance(String s1, String s2)
```

为什么说这个问题难呢，因为显而易见，它就是难，让人手足无措，望而生畏。

为什么说它实用呢，因为前几天我就在日常生活中用到了这个算法。之前有一篇公众号文章由于疏忽，写错位了一段内容，我决定修改这部分内容让逻辑通顺。但是公众号文章最多只能修改 20 个字，且只支持增、删、替换操作（跟编辑距离问题一模一样），于是我就用算法求出了一个最优方案，只用了 16 步就完成了修改。

再比如高大上一点的应用，DNA 序列是由 A,G,C,T 组成的序列，可以类比成字符串。编辑距离可以衡量两个 DNA 序列的相似度，编辑距离越小，说明这两段 DNA 越相似，说不定这俩 DNA 的主人是远古近亲啥的。

下面言归正传，详细讲解一下编辑距离该怎么算，相信本文会让你有收获。

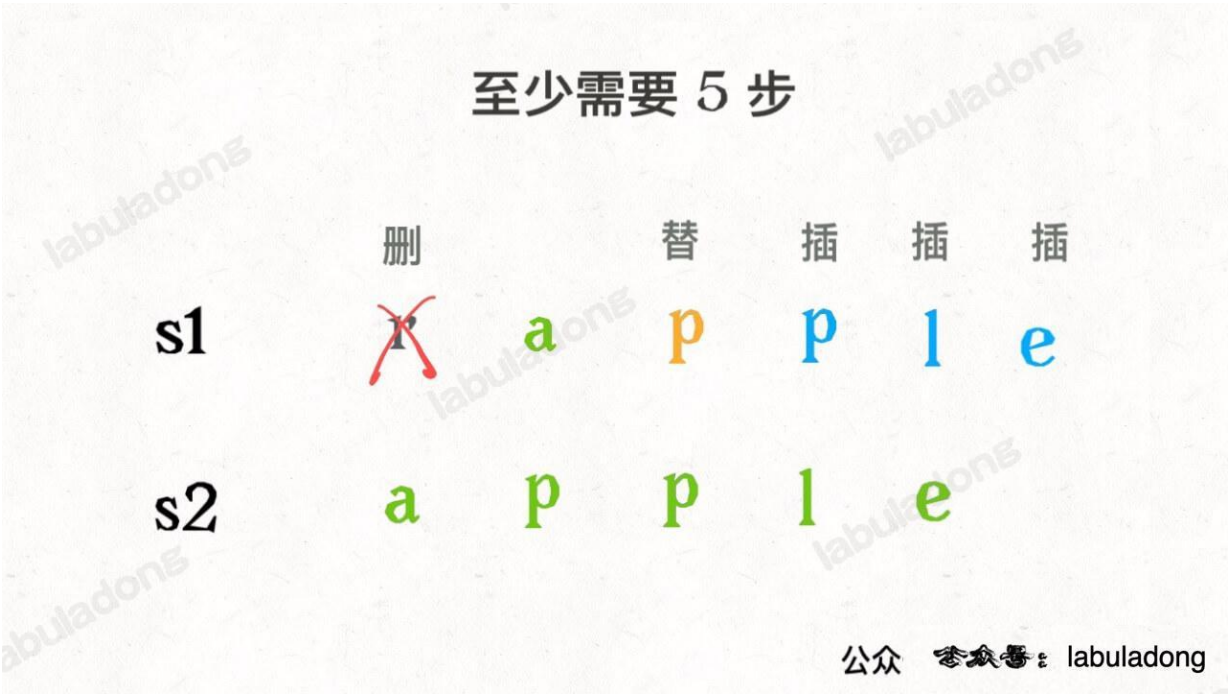
一、思路

编辑距离问题就是给我们两个字符串 `s1` 和 `s2`，只能用三种操作，让我们把 `s1` 变成 `s2`，求最少的操作数。需要明确的是，不管是把 `s1` 变成 `s2` 还是反过来，结果都是一样的，所以后文就以 `s1` 变成 `s2` 举例。

后文 最长公共子序列 说过，**解决两个字符串的动态规划问题，一般都是用两个指针 `i, j` 分别指向两个字符串的最后，然后一步步往前移动，缩小问题的规模。**

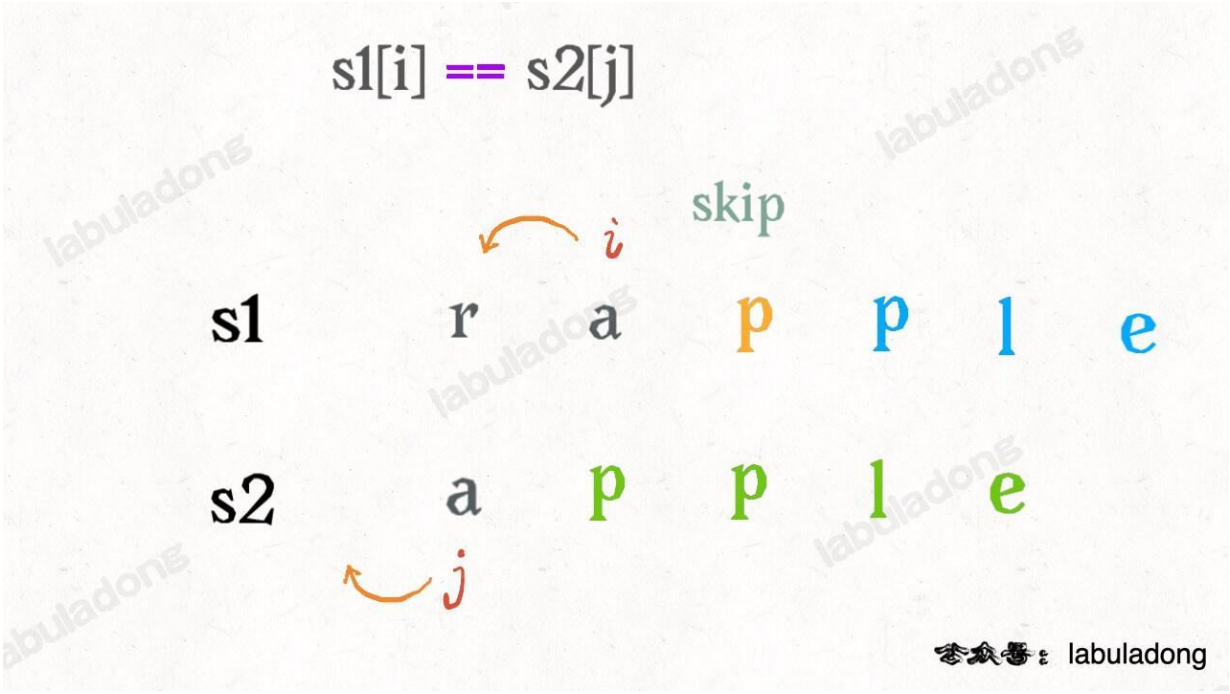
> 其实让 `i, j` 从前往后移动也可以，改一下 `dp` 函数/数组的定义即可，思路是完全一样的。

设两个字符串分别为 `"rad"` 和 `"apple"`，为了把 `s1` 变成 `s2`，算法会这样进行：



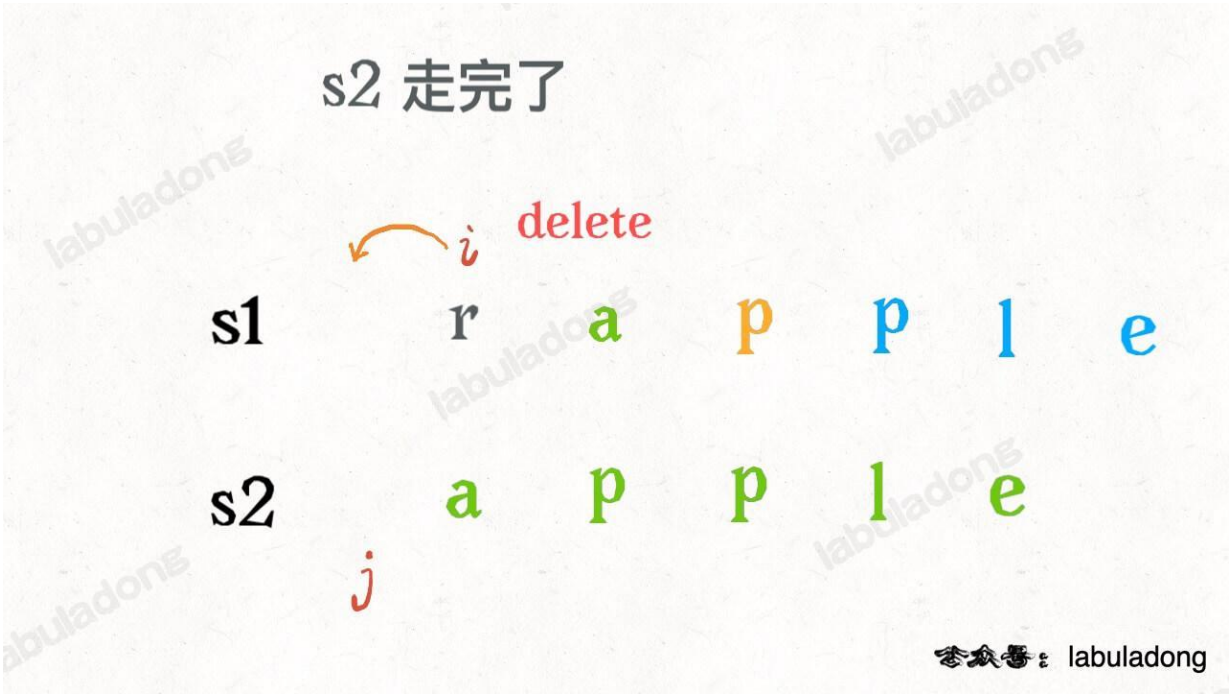
请记住这个 GIF 过程，这样就能算出编辑距离。关键在于如何做出正确的操作，稍后会讲。

根据上面的 GIF，可以发现操作不只有三个，其实还有第四个操作，就是什么都不要做（skip）。比如这个情况：



因为这两个字符本来就相同，为了使编辑距离最小，显然不应该对它们有任何操作，直接往前移动 `i, j` 即可。

还有一个很容易处理的情况，就是 `j` 走完 `s2` 时，如果 `i` 还没走完 `s1`，那么只能用删除操作把 `s1` 缩短为 `s2`。比如这个情况：



类似的，如果 `i` 走完 `s1` 时 `j` 还没走完了 `s2`，那就只能用插入操作把 `s2` 剩下的字符全部插入 `s1`。等会会看到，这两种情况就是算法的 **base case**。

下面详解一下如何将思路转换成代码，坐稳，要发车了。

二、代码详解

先梳理一下之前的思路：

base case 是 i 走完 s1 或 j 走完 s2，可以直接返回另一个字符串剩下的长度。

对于每对儿字符 s1[i] 和 s2[j]，可以有四种操作：

```
if s1[i] == s2[j]:
    啥都别做（skip）
    i, j 同时向前移动
else:
    三选一：
        插入（insert）
        删除（delete）
        替换（replace）
```

有这个框架，问题就已经解决了。读者也许会问，这个「三选一」到底该怎么选择呢？很简单，全试一遍，哪个操作最后得到的编辑距离最小，就选谁。这里需要递归技巧，先看下暴力解法代码：

```
int minDistance(String s1, String s2) {
    int m = s1.length(), n = s2.length();
    // i, j 初始化指向最后一个索引
    return dp(s1, m - 1, s2, n - 1);
}

// 定义：返回 s1[0..i] 和 s2[0..j] 的最小编辑距离
int dp(String s1, int i, String s2, int j) {
    // base case
    if (i == -1) return j + 1;
    if (j == -1) return i + 1;

    if (s1.charAt(i) == s2.charAt(j)) {
        return dp(s1, i - 1, s2, j - 1); // 啥都不做
    }
    return min(
        dp(s1, i, s2, j - 1) + 1,    // 插入
        dp(s1, i - 1, s2, j) + 1,    // 删除
        dp(s1, i - 1, s2, j - 1) + 1 // 替换
    );
}

int min(int a, int b, int c) {
    return Math.min(a, Math.min(b, c));
}
```

下面来详细解释一下这段递归代码，base case 应该不用解释了，主要解释一下递归部分。

都说递归代码的可解释性很好，这是有道理的，只要理解函数的定义，就能很清楚地理解算法的逻辑。我们这里 dp 函数的定义是这样的：

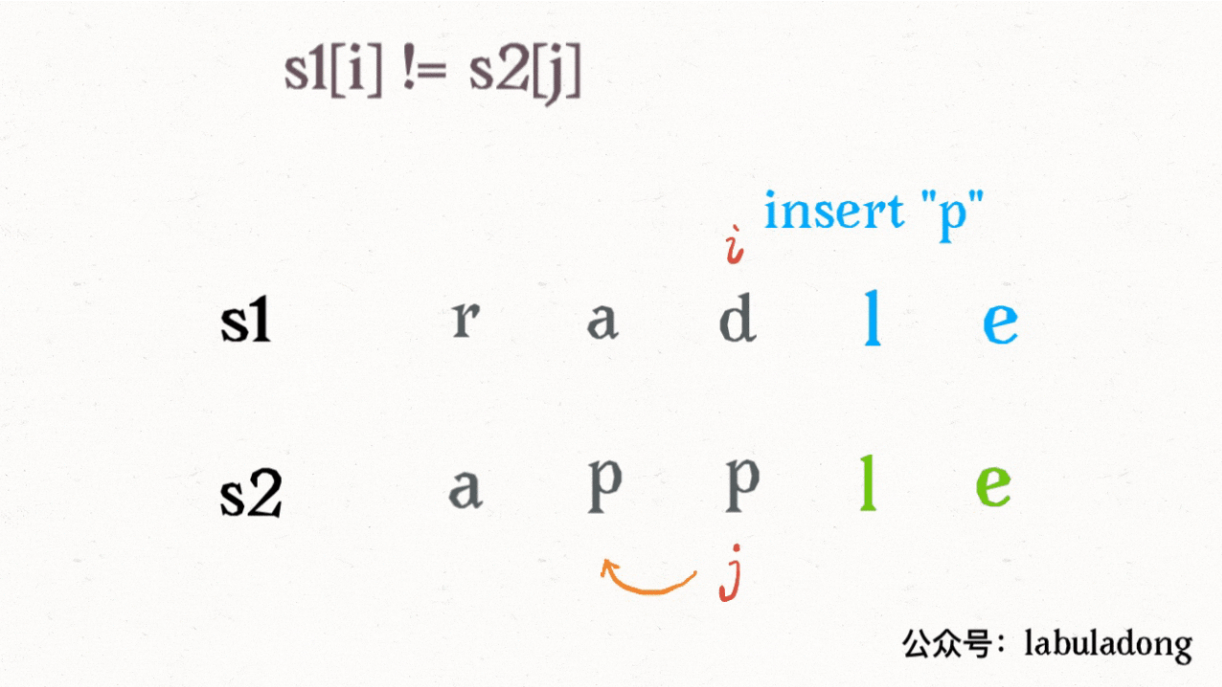
```
// 定义：返回 s1[0..i] 和 s2[0..j] 的最小编辑距离
int dp(String s1, int i, String s2, int j) {
```

记住这个定义之后，先来看这段代码：

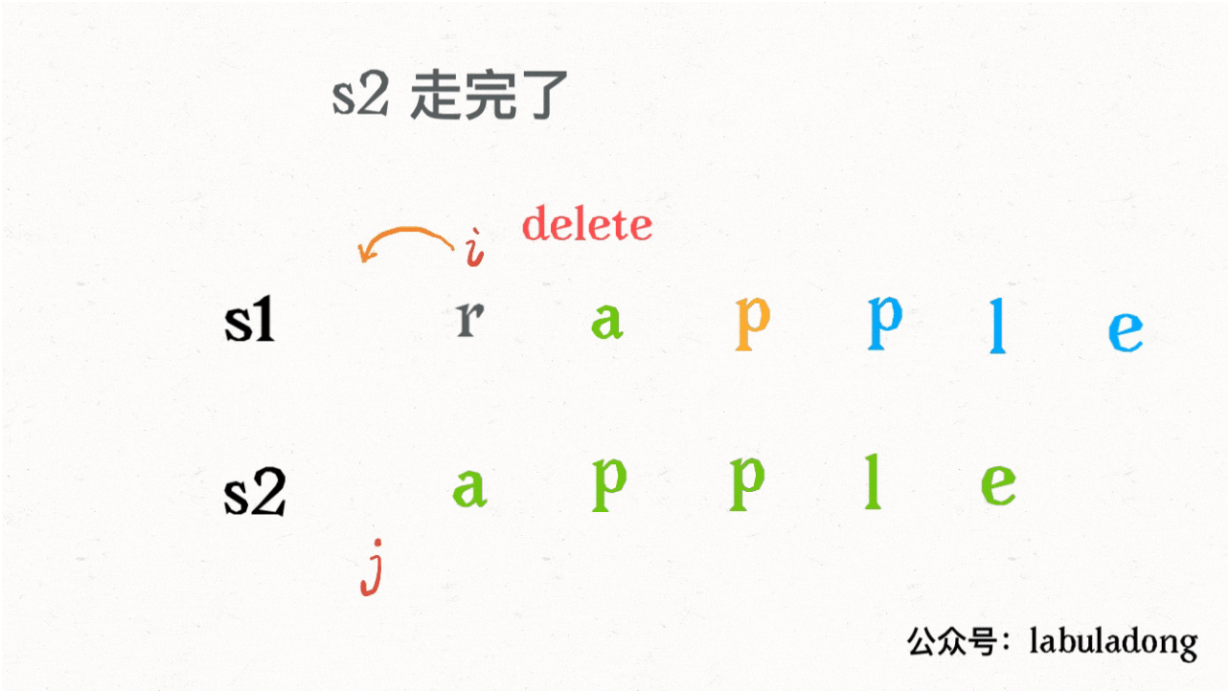
```
if s1[i] == s2[j]:
    return dp(s1, i - 1, s2, j - 1); # 啥都不做
# 解释：
# 本来就相等，不需要任何操作
# s1[0..i] 和 s2[0..j] 的最小编辑距离等于
# s1[0..i-1] 和 s2[0..j-1] 的最小编辑距离
# 也就是说 dp(i, j) 等于 dp(i-1, j-1)
```

如果 `s1[i] != s2[j]`，就要对三个操作递归了，稍微需要点思考：

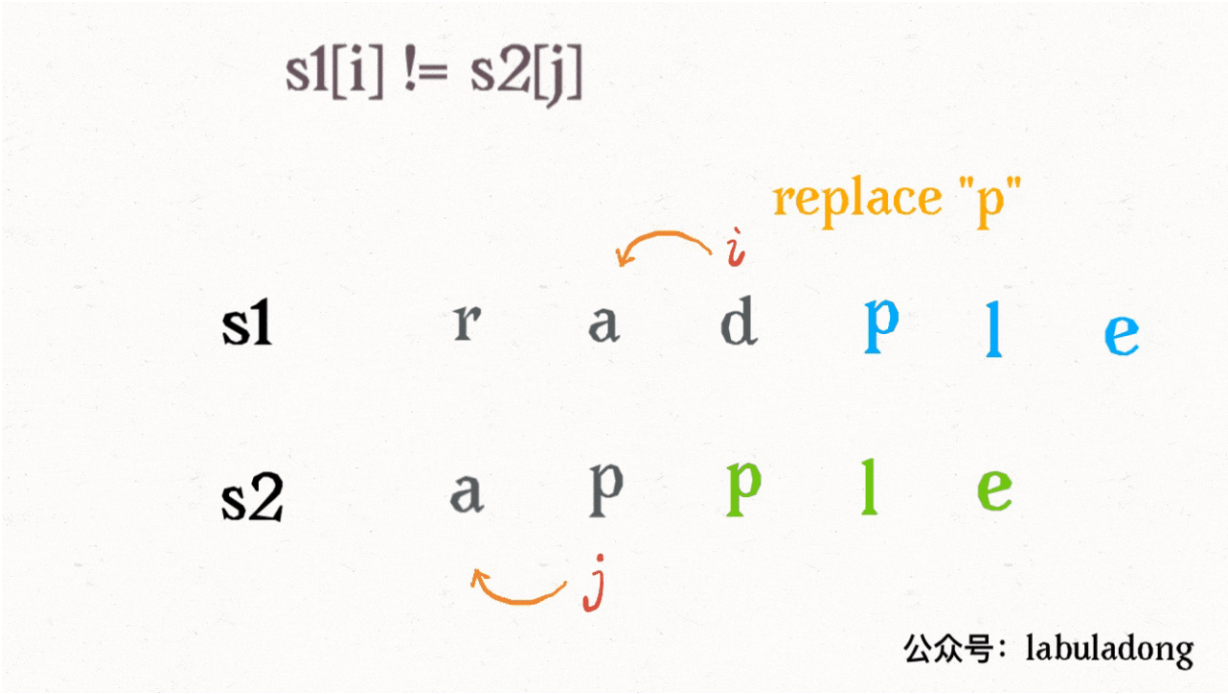
```
dp(s1, i, s2, j - 1) + 1,    # 插入
# 解释：
# 我直接在 s1[i] 插入一个和 s2[j] 一样的字符
# 那么 s2[j] 就被匹配了，前移 j，继续跟 i 对比
# 别忘了操作数加一
```




```
dp(s1, i - 1, s2, j) + 1,    # 删除
# 解释：
# 我直接把 s[i] 这个字符删掉
# 前移 i，继续跟 j 对比
# 操作数加一
```




```
dp(s1, i - 1, s2, j - 1) + 1 # 替换
# 解释：
# 我直接把 s1[i] 替换成 s2[j]，这样它俩就匹配了
# 同时前移 i，j 继续对比
# 操作数加一
```



现在，你应该完全理解这段短小精悍的代码了。还有点小问题就是，这个解法是暴力解法，存在重叠子问题，需要用动态规划技巧来优化。

怎么能一眼看出存在重叠子问题呢？后文 动态规划之正则表达式 有提过，这里再简单提一下，需要抽象出本文算法的递归框架：

```
int dp(i, j) {
    dp(i - 1, j - 1); // #1
    dp(i, j - 1);     // #2
    dp(i - 1, j);     // #3
}
```

对于子问题 `dp(i-1, j-1)`，如何通过原问题 `dp(i, j)` 得到呢？有不止一条路径，比如 `dp(i, j) -> #1` 和 `dp(i, j) -> #2 -> #3`。一旦发现一条重复路径，就说明存在巨量重复路径，也就是重叠子问题。

三、动态规划优化

对于重叠子问题呢，前文 动态规划详解 详细介绍过，优化方法无非是备忘录或者 DP table。

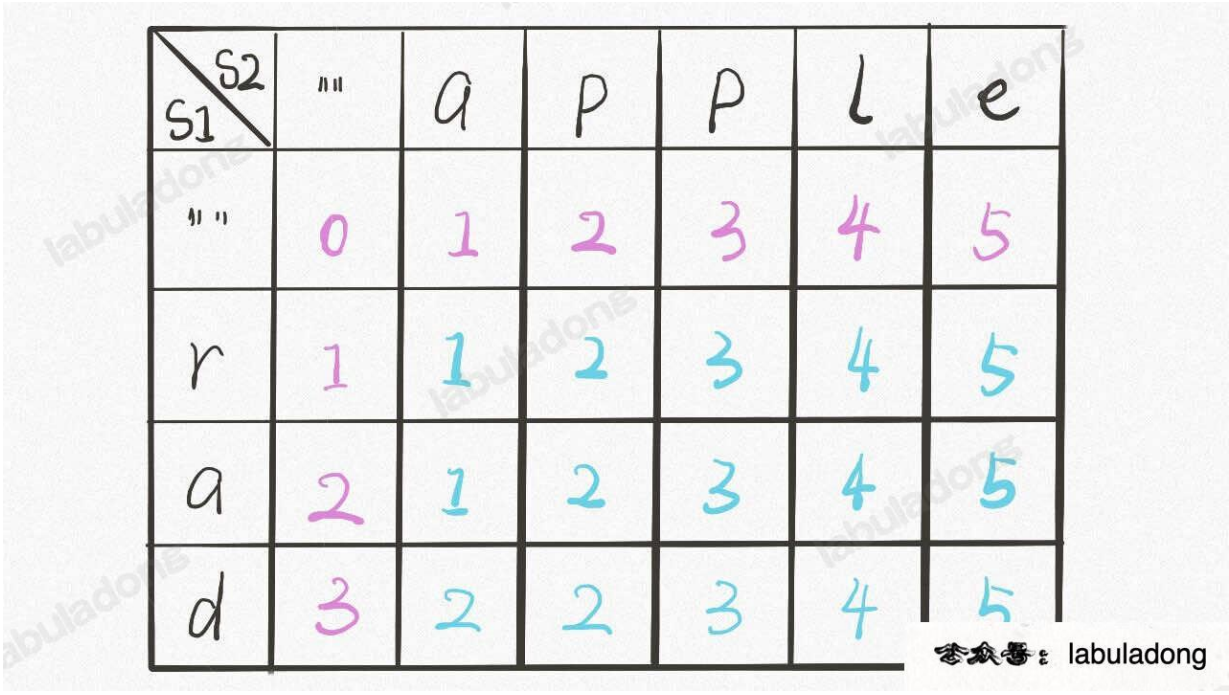
备忘录很好加，原来的代码稍加修改即可：

```
class Solution {
    // 备忘录
    int[][] memo;

    public int minDistance(String s1, String s2) {
        int m = s1.length(), n = s2.length();
        // 备忘录初始化为特殊值，代表还未计算
        memo = new int[m][n];
        for (int[] row : memo) {
            Arrays.fill(row, -1);
        }
        return dp(s1, m - 1, s2, n - 1);
    }

    int dp(String s1, int i, String s2, int j) {
        if (i == -1) return j + 1;
        if (j == -1) return i + 1;
        // 查备忘录，避免重叠子问题
        if (memo[i][j] != -1) {
            return memo[i][j];
        }
        // 状态转移，结果存入备忘录
        if (s1.charAt(i) == s2.charAt(j)) {
            memo[i][j] = dp(s1, i - 1, s2, j - 1);
        } else {
            memo[i][j] =  min(
                dp(s1, i, s2, j - 1) + 1,
                dp(s1, i - 1, s2, j) + 1,
                dp(s1, i - 1, s2, j - 1) + 1
            );
        }
        return memo[i][j];
    }

    int min(int a, int b, int c) {
```

```
            return Math.min(a, Math.min(b, c));
        }
    }
```

主要说下 DP table 的解法：

首先明确 dp 数组的含义，dp 数组是一个二维数组，长这样：



有了之前递归解法的铺垫，应该很容易理解。dp[..][0] 和 dp[0][..] 对应 base case，dp[i][j] 的含义和之前的 dp 函数类似：

```
int dp(String s1, int i, String s2, int j)
// 返回 s1[0..i] 和 s2[0..j] 的最小编辑距离

dp[i-1][j-1]
// 存储 s1[0..i] 和 s2[0..j] 的最小编辑距离
```

dp 函数的 base case 是 i, j 等于 -1，而数组索引至少是 0，所以 dp 数组会偏移一位。

既然 dp 数组和递归 dp 函数含义一样，也就可以直接套用之前的思路写代码，**唯一不同的是，DP table 是自底向上求解，递归解法是自顶向下求解**：

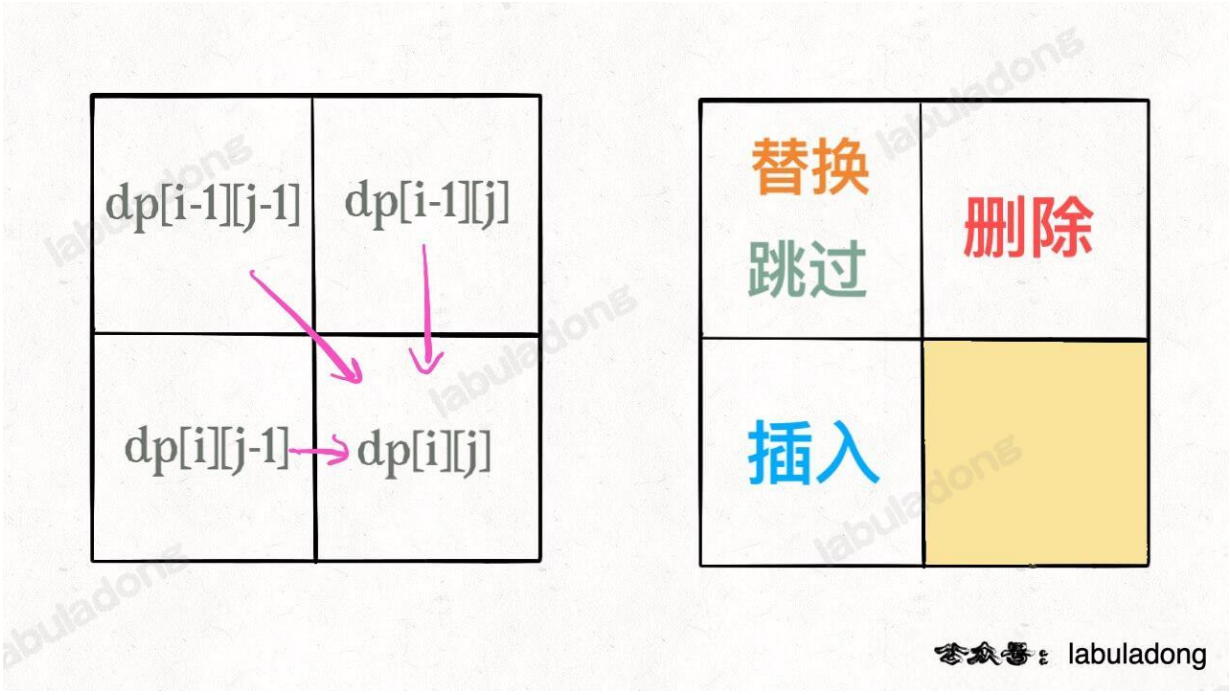
```
int minDistance(String s1, String s2) {
    int m = s1.length(), n = s2.length();
    // 定义：s1[0..i] 和 s2[0..j] 的最小编辑距离是 dp[i+1][j+1]
    int[][] dp = new int[m + 1][n + 1];
    // base case
    for (int i = 1; i <= m; i++)
        dp[i][0] = i;
    for (int j = 1; j <= n; j++)
```

```
            dp[0][j] = j;
        // 自底向上求解
        for (int i = 1; i <= m; i++) {
            for (int j = 1; j <= n; j++) {
                if (s1.charAt(i-1) == s2.charAt(j-1)) {
                    dp[i][j] = dp[i - 1][j - 1];
                } else {
                    dp[i][j] = min(
                        dp[i - 1][j] + 1,
                        dp[i][j - 1] + 1,
                        dp[i - 1][j - 1] + 1
                    );
                }
            }
        }
        // 储存着整个 s1 和 s2 的最小编辑距离
        return dp[m][n];
    }

    int min(int a, int b, int c) {
        return Math.min(a, Math.min(b, c));
    }
```

▶ 🌈 代码可视化动画🌈

三、扩展延伸

一般来说，处理两个字符串的动态规划问题，都是按本文的思路处理，建立 DP table。为什么呢，因为易于找出状态转移的关系，比如编辑距离的 DP table：



还有一个细节，既然每个 `dp[i][j]` 只和它附近的三个状态有关，空间复杂度是可以压缩成 `O(min(M, N))` 的（M，N 是两个字符串的长度）。不难，但是可解释性大大降低，读者可以自己尝试优化一下。

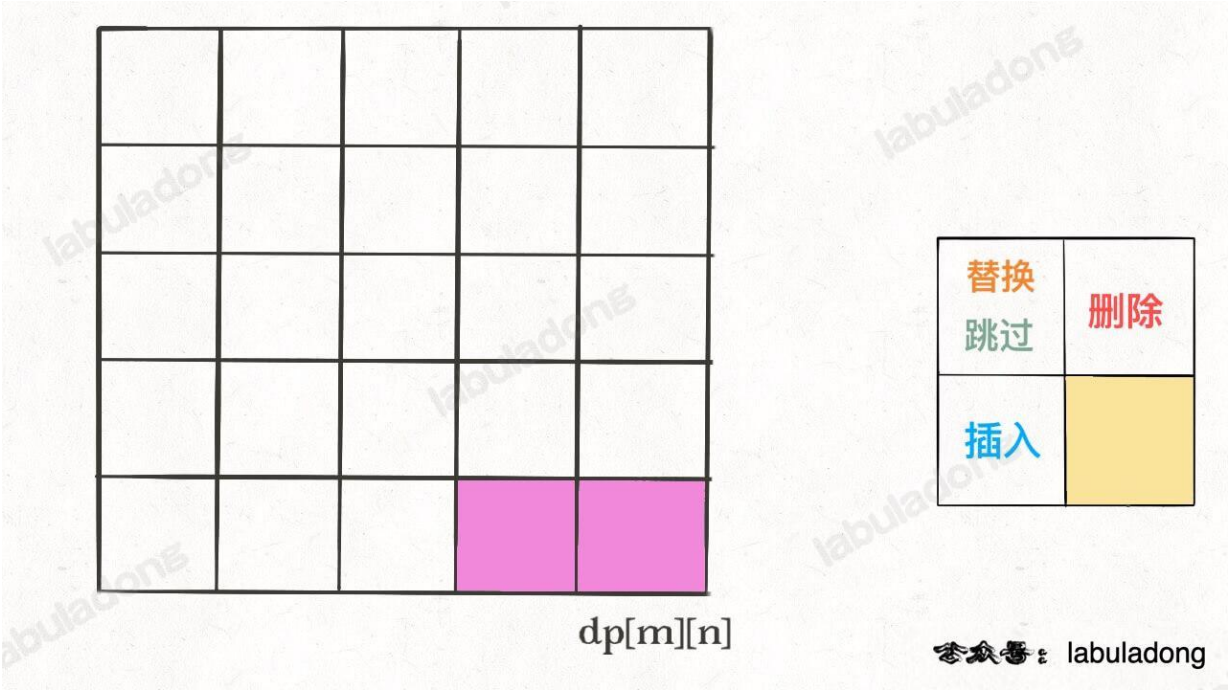
你可能还会问，**这里只求出了最小的编辑距离，那具体的操作是什么**？你之前举的修改公众号文章的例子，只有一个最小编辑距离肯定不够，还得知道具体怎么修改才行。

这个其实很简单，代码稍加修改，给 dp 数组增加额外的信息即可：

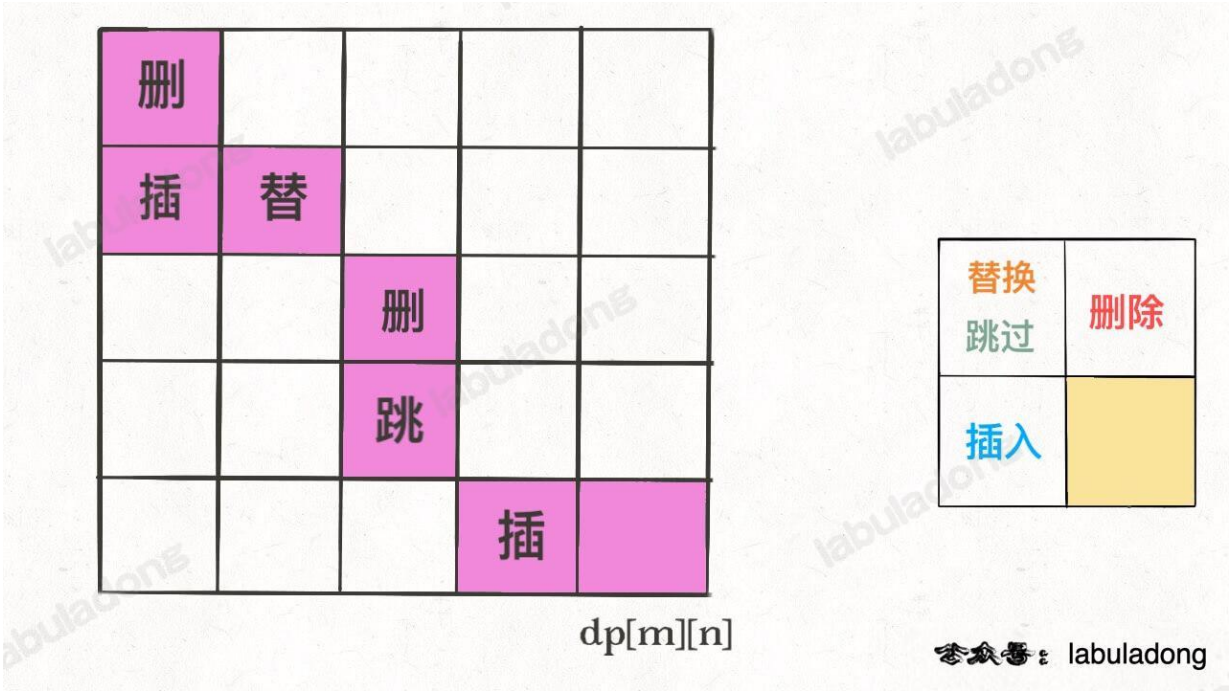
```
// int[][] dp;
Node[][] dp;

class Node {
    int val;
    int choice;
    // 0 代表啥都不做
    // 1 代表插入
    // 2 代表删除
    // 3 代表替换
}
```

`val` 属性就是之前的 dp 数组的数值，`choice` 属性代表操作。在做最优选择时，顺便把操作记录下来，然后就从结果反推具体操作。

我们的最终结果不是 `dp[m][n]` 吗，这里的 `val` 存着最小编辑距离，`choice` 存着最后一个操作，比如说是插入操作，那么就可以左移一格：



重复此过程，可以一步步回到起点 `dp[0][0]`，形成一条路径，按这条路径上的操作进行编辑，就是最佳方案。



应大家的要求，我把这个思路也写出来，你可以自己运行试一下：

```
int minDistance(String s1, String s2) {
    int m = s1.length(), n = s2.length();
    Node[][] dp = new Node[m + 1][n + 1];
    // base case
    for (int i = 0; i <= m; i++) {
        // s1 转化成 s2 只需要删除一个字符
        dp[i][0] = new Node(i, 2);
    }
    for (int j = 1; j <= n; j++) {
        // s1 转化成 s2 只需要插入一个字符
        dp[0][j] = new Node(j, 1);
    }
    // 状态转移方程
    for (int i = 1; i <= m; i++) {
        for (int j = 1; j <= n; j++) {
            if (s1.charAt(i-1) == s2.charAt(j-1)){
                // 如果两个字符相同，则什么都不需要做
                Node node = dp[i - 1][j - 1];
                dp[i][j] = new Node(node.val, 0);
            } else {
                // 否则，记录代价最小的操作
                dp[i][j] = minNode(
                    dp[i - 1][j],
                    dp[i][j - 1],
                    dp[i-1][j-1]
                );
                // 并且将编辑距离加一
                dp[i][j].val++;
            }
        }
    }
```

```
    // 根据 dp table 反推具体操作过程并打印
    printResult(dp, s1, s2);
    return dp[m][n].val;
}

// 计算 delete, insert, replace 中代价最小的操作
Node minNode(Node a, Node b, Node c) {
    Node res = new Node(a.val, 2);

    if (res.val > b.val) {
        res.val = b.val;
        res.choice = 1;
    }
    if (res.val > c.val) {
        res.val = c.val;
        res.choice = 3;
    }
    return res;
}
```

最后，printResult 函数反推结果并把具体的操作打印出来：

```
void printResult(Node[][] dp, String s1, String s2) {
    int rows = dp.length;
    int cols = dp[0].length;
    int i = rows - 1, j = cols - 1;
    System.out.println("Change s1=" + s1 + " to s2=" + s2 + ":\n");
    while (i != 0 && j != 0) {
        char c1 = s1.charAt(i - 1);
        char c2 = s2.charAt(j - 1);
        int choice = dp[i][j].choice;
        System.out.print("s1[" + (i - 1) + "]:");
        switch (choice) {
            case 0:
                // 跳过，则两个指针同时前进
                System.out.println("skip '" + c1 + "'");
                i--; j--;
                break;
            case 1:
                // 将 s2[j] 插入 s1[i]，则 s2 指针前进
                System.out.println("insert '" + c2 + "'");
                j--;
                break;
            case 2:
                // 将 s1[i] 删除，则 s1 指针前进
                System.out.println("delete '" + c1 + "'");
                i--;
                break;
            case 3:
                // 将 s1[i] 替换成 s2[j]，则两个指针同时前进
                System.out.println(
                    "replace '" + c1 + "'" + " with '" + c2 + "'");
```

```
                i--; j--;
                break;
            }
        }
        // 如果 s1 还没有走完，则剩下的都是需要删除的
        while (i > 0) {
            System.out.print("s1[" + (i - 1) + "]:");
            System.out.println("delete '" + s1.charAt(i - 1) + "'");
            i--;
        }
        // 如果 s2 还没有走完，则剩下的都是需要插入 s1 的
        while (j > 0) {
            System.out.print("s1[0]:");
            System.out.println("insert '" + s2.charAt(j - 1) + "'");
            j--;
        }
    }
```

如果你有高质量的问题，可以 点击这里 进入本文的讨论区。

▶ 引用本文的题目

安装 我的 Chrome 刷题插件 点开下列题目可直接查看解题思路：

LeetCode	力扣
97. Interleaving String	97. 交错字符串

▶ 引用本文的文章

- 动态规划之子序列问题解题模板
- 最优子结构原理和 dp 数组遍历方向
- 目标和问题：背包问题的变体

——————————————

更多精品课程可查看 我的网站；扫码查看更多配套学习套件：

算法学习网站：https://labuladong.gitee.io/algo/ 或 https://labuladong.github.io/algo/

二维码太多，长按识别不到？放大图片 -> 让对应二维码充满屏幕 -> 长按识别该二维码

最长公共子序列问题

Stars 123k 精品课程 查看 知乎 @labuladong B站 @labuladong

学算法认准 labuladong，致力于把算法讲清楚！网页版 点这里。

读完本文，你不仅学会了算法套路，还可以顺便解决如下题目：

LeetCode	力扣	难度
1143. Longest Common Subsequence	1143. 最长公共子序列	🟠
583. Delete Operation for Two Strings	583. 两个字符串的删除操作	🟠
712. Minimum ASCII Delete Sum for Two Strings	712. 两个字符串的最小ASCII删除和	🟠
-	剑指 Offer II 095. 最长公共子序列	🟠

不知道大家做算法题有什么感觉，**我总结出来做算法题的技巧就是，把大的问题细化到一个点，先研究在这个小的点上如何解决问题，然后再通过递归/迭代的方式扩展到整个问题**。

比如说我们前文 手把手带你刷二叉树第三期，解决二叉树的题目，我们就会把整个问题细化到某一个节点上，想象自己站在某个节点上，需要做什么，然后套二叉树递归框架就行了。

动态规划系列问题也是一样，尤其是子序列相关的问题。**本文从「最长公共子序列问题」展开，总结三道子序列问题**，解这道题仔细讲讲这种子序列问题的套路，你就能感受到这种思维方式了。

最长公共子序列

计算最长公共子序列（Longest Common Subsequence，简称 LCS）是一道经典的动态规划题目，力扣第 1143 题「最长公共子序列」就是这个问题：

给你输入两个字符串 `s1` 和 `s2`，请你找出他们俩的最长公共子序列，返回这个子序列的长度。函数签名如下：

```
int longestCommonSubsequence(String s1, String s2);
```

比如说输入 `s1 = "zabcde", s2 = "acez"`，它俩的最长公共子序列是 `lcs = "ace"`，长度为 3，所以算法返回 3。

如果没有做过这道题，一个最简单的暴力算法就是，把 `s1` 和 `s2` 的所有子序列都穷举出来，然后看看有没有公共的，然后在所有公共子序列里面再寻找一个长度最大的。

显然，这种思路的复杂度非常高，你要穷举出所有子序列，这个复杂度就是指数级的，肯定不实际。

正确的思路是不要考虑整个字符串，而是细化到 s1 和 s2 的每个字符。前文 子序列解题模板 中总结的一个规律：

如果你有高质量的问题，可以 点击这里 进入本文的讨论区。

▶ 引用本文的题目

安装 我的 Chrome 刷题插件 点开下列题目可直接查看解题思路：

LeetCode	力扣
97. Interleaving String	97. 交错字符串
-	剑指 Offer II 095. 最长公共子序列

▶ 引用本文的文章

- 动态规划之子序列问题解题模板
- 经典动态规划：编辑距离

———————————————

本文为网站会员内容，请 点这里 查看。

正则表达式问题

Stars 123k 精品课程 查看 知乎 @labuladong B站 @labuladong

学算法认准 labuladong，致力于把算法讲清楚！网页版 点这里。

读完本文，你不仅学会了算法套路，还可以顺便解决如下题目：

LeetCode	力扣	难度
10. Regular Expression Matching	10. 正则表达式匹配	🔴
-	剑指 Offer 19. 正则表达式匹配	🔴

正则表达式是一个非常强力的工具，本文就来具体看一看正则表达式的底层原理是什么。力扣第 10 题「正则表达式匹配」就要求我们实现一个简单的正则匹配算法，包括「.」通配符和「*」通配符。

这两个通配符是最常用的，其中点号「.」可以匹配任意一个字符，星号「*」可以让之前的那个字符重复任意次数（包括 0 次）。

比如说模式串 `".a*b"` 就可以匹配文本 `"zaaab"`，也可以匹配 `"cb"`；模式串 `"a..b"` 可以匹配文本 `"amnb"`；而模式串 `".*"` 就比较牛逼了，它可以匹配任何文本。

题目会给我们输入两个字符串 `s` 和 `p`，`s` 代表文本，`p` 代表模式串，请你判断模式串 `p` 是否可以匹配文本 `s`。我们可以假设模式串只包含小写字母和上述两种通配符且一定合法，不会出现 `*a` 或者 `b**` 这种不合法的模式串，

函数签名如下：

```
bool isMatch(string s, string p);
```

对于我们将要实现的这个正则表达式，难点在那里呢？

点号通配符其实很好实现，`s` 中的任何字符，只要遇到 `.` 通配符，无脑匹配就完事了。主要是这个星号通配符不好实现，一旦遇到 `*` 通配符，前面的那个字符可以选择重复一次，可以重复多次，也可以一次都不出现，这该怎么办？

对于这个问题，答案很简单，对于所有可能出现的情况，全部穷举一遍，只要有一种情况可以完成匹配，就认为 `p` 可以匹配 `s`。那么一旦涉及两个字符串的穷举，我们就应该条件反射地想到动态规划的技巧了。

一、思路分析

我们先脑补一下，s 和 p 相互匹配的过程大致是，两个指针 i, j 分别在 s 和 p 上移动，如果最后两个指针都能移动到字符串的末尾，那么久匹配成功，反之则匹配失败。

如果不考虑 * 通配符，面对两个待匹配字符 s[i] 和 p[j]，我们唯一能做的就是看他俩是否匹配：

```
bool isMatch(string s, string p) {
    int i = 0, j = 0;
    while (i < s.size() && j < p.size()) {
        // 「.」通配符就是万金油
        if (s[i] == p[j] || p[j] == '.') {
            // 匹配，接着匹配 s[i+1..] 和 p[j+1..]
            i++; j++;
        } else {
            // 不匹配
            return false;
        }
    }
    return i == j;
}
```

那么考虑一下，如果加入 * 通配符，局面就会稍微复杂一些，不过只要分情况来分析，也不难理解。

当 p[j + 1] 为 * 通配符时，我们分情况讨论下：

1、如果 s[i] == p[j]，那么有两种情况：

1.1 p[j] 有可能会匹配多个字符，比如 s = "aaa", p = "a*"，那么 p[0] 会通过 * 匹配 3 个字符 "a"。

1.2 p[i] 也有可能匹配 0 个字符，比如 s = "aa", p = "a*aa"，由于后面的字符可以匹配 s，所以 p[0] 只能匹配 0 次。

2、如果 s[i] != p[j]，只有一种情况：

p[j] 只能匹配 0 次，然后看下一个字符是否能和 s[i] 匹配。比如说 s = "aa", p = "b*aa"，此时 p[0] 只能匹配 0 次。

综上，可以把之前的代码针对 * 通配符进行一下改造：

```
if (s[i] == p[j] || p[j] == '.') {
    // 匹配
    if (j < p.size() - 1 && p[j + 1] == '*') {
        // 有 * 通配符，可以匹配 0 次或多次
    } else {
        // 无 * 通配符，老老实实匹配 1 次
        i++; j++;
    }
} else {
    // 不匹配
    if (j < p.size() - 1 && p[j + 1] == '*') {
        // 有 * 通配符，只能匹配 0 次
    } else {
```

```
            // 无 * 通配符，匹配无法进行下去了
            return false;
        }
    }
```

整体的思路已经很清晰了，但现在的问题是，遇到 * 通配符时，到底应该匹配 0 次还是匹配多次？多次是几次？

你看，这就是一个做「选择」的问题，要把所有可能的选择都穷举一遍才能得出结果。动态规划算法的核心就是「状态」和「选择」，**「状态」无非就是 `i` 和 `j` 两个指针的位置，「选择」就是 `p[j]` 选择匹配几个字符**。

二、动态规划解法

根据「状态」，我们可以定义一个 dp 函数：

```
bool dp(string& s, int i, string& p, int j);
```

如果你有高质量的问题，可以 点击这里 进入本文的讨论区。

▶ 引用本文的题目

安装 我的 Chrome 刷题插件 点开下列题目可直接查看解题思路：

LeetCode	力扣
-	剑指 Offer 19. 正则表达式匹配

▶ 引用本文的文章

- 最优子结构原理和 dp 数组遍历方向
- 经典动态规划：编辑距离

————————————————

本文为网站会员内容，请 点这里 查看。

4.3 背包问题

背包问题是一类经典的动态规划问题。

当我说 XXX 问题是一类经典动态规划问题的时候，并不是指题目的形式经典，而是强调该类问题的状态转移方程非常有特点，其「状态」和「选择」的定义遵循一定的模式，可以抽象为一类特定的问题。

你之后会看到大部分题目都会把题目原型深深地隐藏起来，缺乏思考的话甚至看不出来这题竟然是一道背包问题，但一旦你发现一道题目可以被抽象为背包问题，那么你就可以按照背包问题的解题思路写出标准化的答案。

公众号标签：背包问题

名称	最新版本号	详情
PDF 教材	V5.2	下载
刷题打卡挑战	开放报名	报名
网站会员	V已上线	购买
Chrome 刷题插件	V4.4.3	使用手册
vscode 刷题插件	V1.5.4	使用手册
JetBrains IDE 刷题插件	V1.8.6	使用手册

0-1 背包问题

Stars 123k 精品课程 查看 知乎 @labuladong B站 @labuladong

微信搜一搜 labuladong公众号

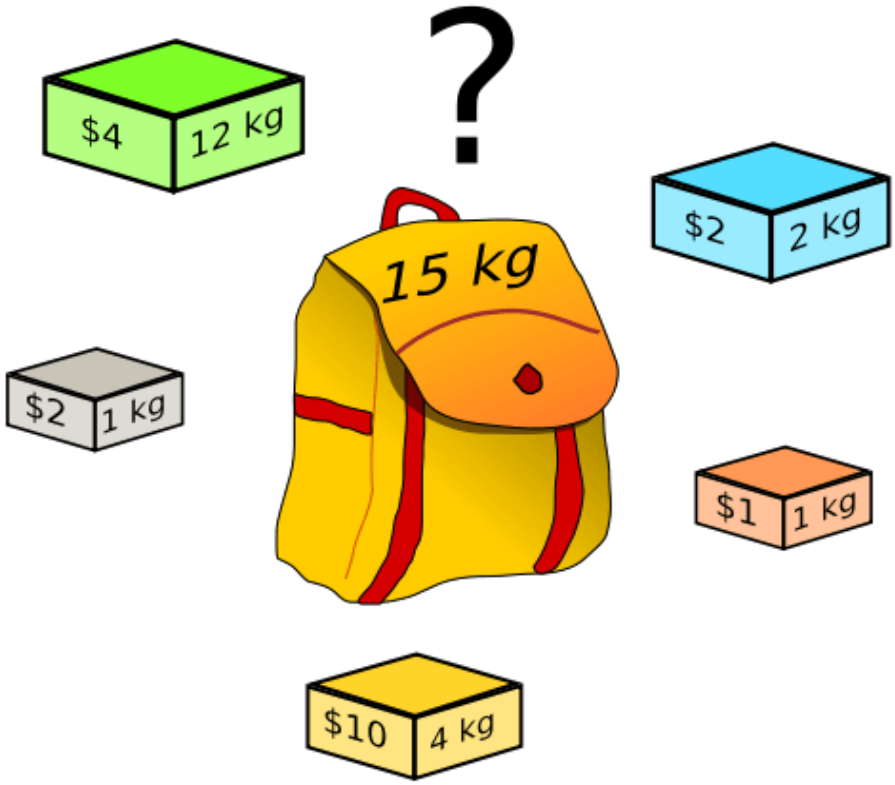
学算法认准 labuladong，致力于把算法讲清楚！网页版 点这里。

> tip：本文有视频版：0-1背包问题详解。建议关注我的 B 站账号，我会用视频领读的方式带大家学习那些稍有难度的算法技巧。

后台天天有人问背包问题，这个问题其实不难啊，如果我们号动态规划系列的十几篇文章你都看过，借助框架，遇到背包问题可以说是手到擒来好吧。无非就是状态 + 选择，也没啥特别之处嘛。

今天就来说一下背包问题吧，就讨论最常说的 0-1 背包问题。描述：

给你一个可装载重量为 `W` 的背包和 `N` 个物品，每个物品有重量和价值两个属性。其中第 `i` 个物品的重量为 `wt[i]`，价值为 `val[i]`。现在让你用这个背包装物品，每个物品只能用一次，在不超过被包容量的前提下，最多能装的价值是多少？



举个简单的例子，输入如下：

```
N = 3, W = 4
wt = [2, 1, 3]
val = [4, 2, 3]
```

算法返回 6，选择前两件物品装进背包，总重量 3 小于 W，可以获得最大价值 6。

题目就是这么简单，一个典型的动态规划问题。这个题目中的物品不可以分割，要么装进包里，要么不装，不能说切成两块装一半。这就是 0-1 背包这个名词的来历。

解决这个问题没有什么排序之类巧妙的方法，只能穷举所有可能，根据我们 动态规划详解 中的套路，直接走流程就行了。

动规标准套路

看来每篇动态规划文章都得重复一遍套路，历史文章中的动态规划问题都是按照下面的套路来的。

第一步要明确两点，「状态」和「选择」。

先说状态，如何才能描述一个问题局面？只要给几个物品和一个背包的容量限制，就形成了一个背包问题呀。**所以状态有两个，就是「背包的容量」和「可选择的物品」。**

再说选择，也很容易想到啊，对于每件物品，你能选择什么？**选择就是「装进背包」或者「不装进背包」嘛。**

明白了状态和选择，动态规划问题基本上就解决了，只要往这个框架套就完事儿了：

```
for 状态1 in 状态1的所有取值：
    for 状态2 in 状态2的所有取值：
        for ...
            dp[状态1][状态2][...] = 择优(选择1，选择2...)
```

> 此框架出自历史文章 团灭 LeetCode 股票问题。

第二步要明确 dp 数组的定义。

首先看看刚才找到的「状态」，有两个，也就是说我们需要一个二维 dp 数组。

dp[i][w] 的定义如下：对于前 i 个物品，当前背包的容量为 w，这种情况下可以装的最大价值是 dp[i][w]。

比如说，如果 dp[3][5] = 6，其含义为：对于给定的一系列物品中，若只对前 3 个物品进行选择，当背包容量为 5 时，最多可以装下的价值为 6。

> 为什么要这么定义？便于状态转移，或者说这就是套路，记下来就行了。建议看一下我们的动态规划系列文章，几种套路都被扒得清清楚楚了。

根据这个定义，我们想求的最终答案就是 dp[N][W]。base case 就是 dp[0][..] = dp[..][0] = 0，因为没有物品或者背包没有空间的时候，能装的最大价值就是 0。

细化上面的框架：

```
int[][] dp[N+1][W+1]
dp[0][..] = 0
dp[..][0] = 0

for i in [1..N]:
    for w in [1..W]:
        dp[i][w] = max(
            把物品 i 装进背包,
            不把物品 i 装进背包
        )
return dp[N][W]
```

第三步，根据「选择」，思考状态转移的逻辑。

简单说就是，上面伪码中「把物品 i 装进背包」和「不把物品 i 装进背包」怎么用代码体现出来呢？

这就要结合对 dp 数组的定义，看看这两种选择会对状态产生什么影响：

先重申一下刚才我们的 dp 数组的定义：

dp[i][w] 表示：对于前 i 个物品（从 1 开始计数），当前背包的容量为 w 时，这种情况下可以装下的最大价值是 dp[i][w]。

如果你没有把这第 i 个物品装入背包，那么很显然，最大价值 dp[i][w] 应该等于 dp[i-1][w]，继承之前的结果。

如果你把这第 i 个物品装入了背包，那么 dp[i][w] 应该等于 val[i-1] + dp[i-1][w - wt[i-1]]。

首先，由于数组索引从 0 开始，而我们定义中的 i 是从 1 开始计数的，所以 val[i-1] 和 wt[i-1] 表示第 i 个物品的价值和重量。

你如果选择将第 i 个物品装进背包，那么第 i 个物品的价值 val[i-1] 肯定就到手了，接下来你就要在剩余容量 w - wt[i-1] 的限制下，在前 i - 1 个物品中挑选，求最大价值，即 dp[i-1][w - wt[i-1]]。

综上就是两种选择，我们都已经分析完毕，也就是写出来了状态转移方程，可以进一步细化代码：

```
for i in [1..N]:
    for w in [1..W]:
        dp[i][w] = max(
            dp[i-1][w],
            dp[i-1][w - wt[i-1]] + val[i-1]
        )
return dp[N][W]
```

最后一步，把伪码翻译成代码，处理一些边界情况。

我用 Java 写的代码，把上面的思路完全翻译了一遍，并且处理了 `w - wt[i-1]` 可能小于 0 导致数组索引越界的问题：

```
int knapsack(int W, int N, int[] wt, int[] val) {
    assert N == wt.length;
    // base case 已初始化
    int[][] dp = new int[N + 1][W + 1];
    for (int i = 1; i <= N; i++) {
        for (int w = 1; w <= W; w++) {
            if (w - wt[i - 1] < 0) {
                // 这种情况下只能选择不装入背包
                dp[i][w] = dp[i - 1][w];
            } else {
                // 装入或者不装入背包，择优
                dp[i][w] = Math.max(
                    dp[i - 1][w - wt[i-1]] + val[i-1],
                    dp[i - 1][w]
                );
            }
        }
    }

    return dp[N][W];
}
```

▶ 🍭 代码可视化动画🍭

> 其实函数签名中的物品数量 `N` 就是 `wt` 数组的长度，所以实际上这个参数 `N` 是多此一举的。但为了体现原汁原味的 0-1 背包问题，我就带上这个参数 `N` 了，你自己写的话可以省略。

至此，背包问题就解决了，相比而言，我觉得这是比较简单的动态规划问题，因为状态转移的推导比较自然，基本上你明确了 `dp` 数组的定义，就可以理所当然地确定状态转移了。

接下来可阅读：

- 完全背包问题之零钱兑换
- 背包问题变体之子集分割

如果你有高质量的问题，可以 点击这里 进入本文的讨论区。

▶ 引用本文的题目

安装 我的 Chrome 刷题插件 点开下列题目可直接查看解题思路：

LeetCode	力扣

LeetCode	力扣
1235. Maximum Profit in Job Scheduling	1235. 规划兼职工作

▶ 引用本文的文章

- 回溯算法最佳实践：集合划分
- 扫描线技巧：安排会议室
- 目标和问题：背包问题的变体
- 经典动态规划：子集背包问题
- 经典动态规划：完全背包问题

———————————————

更多精品课程可查看 我的网站；扫码查看更多配套学习套件：

完全背包问题

Stars 123k 精品课程 查看 知乎 @labuladong B站 @labuladong

学算法认准 labuladong，致力于把算法讲清楚！网页版 点这里。

读完本文，你不仅学会了算法套路，还可以顺便解决如下题目：

LeetCode	力扣	难度
518. Coin Change II	518. 零钱兑换 II	🟠

零钱兑换 2 是另一种典型背包问题的变体，我们前文已经讲了 经典动态规划：0-1 背包问题 和 背包问题变体：相等子集分割。

读本文之前，希望你已经看过前两篇文章，看过了动态规划和背包问题的套路，这篇继续按照背包问题的套路，列举一个背包问题的变形。

本文聊的是力扣第 518 题「零钱兑换 II」，我描述一下题目：

给定不同面额的硬币 `coins` 和一个总金额 `amount`，写一个函数来计算可以凑成总金额的硬币组合数。**假设每一种面额的硬币有无限个**。

我们要完成的函数的签名如下：

```
int change(int amount, int[] coins);
```

比如说输入 `amount = 5, coins = [1,2,5]`，算法应该返回 4，因为有如下 4 种方式可以凑出目标金额：

```
5=5

5=2+2+1

5=2+1+1+1

5=1+1+1+1+1
```

如果输入的 `amount = 5, coins = [3]`，算法应该返回 0，因为用面额为 3 的硬币无法凑出总金额 5。

> 至于零钱兑换 I，在我们前文 动态规划套路详解 写过。

我们可以把这个问题转化为背包问题的描述形式：

有一个背包，最大容量为 `amount`，有一系列物品 `coins`，每个物品的重量为 `coins[i]`，**每个物品的数量无限**。请问有多少种方法，能够把背包恰好装满？

这个问题和我们前面讲过的两个背包问题，有一个最大的区别就是，每个物品的数量是无限的，这也就是传说中的「**完全背包问题**」，没啥高大上的，无非就是状态转移方程有一点变化而已。

下面就以背包问题的描述形式，继续按照流程来分析。

解题思路

第一步要明确两点，「状态」和「选择」。

状态有两个，就是「背包的容量」和「可选择的物品」，选择就是「装进背包」或者「不装进背包」嘛，背包问题的套路都是这样。

明白了状态和选择，动态规划问题基本上就解决了，只要往这个框架套就完事儿了：

```
for 状态1 in 状态1的所有取值：
    for 状态2 in 状态2的所有取值：
        for ...
            dp[状态1][状态2][...] = 计算(选择1，选择2...)
```

第二步要明确 `dp` 数组的定义。

首先看看刚才找到的「状态」，有两个，也就是说我们需要一个二维 `dp` 数组。

`dp[i][j]` 的定义如下：

若只使用前 `i` 个物品（可以重复使用），当背包容量为 `j` 时，有 `dp[i][j]` 种方法可以装满背包。

换句话说，翻译回我们题目的意思就是：

若只使用 `coins` 中的前 `i` 个（`i` 从 1 开始计数）硬币的面值，若想凑出金额 `j`，有 `dp[i][j]` 种凑法。

经过以上的定义，可以得到：

base case 为 `dp[0][..] = 0, dp[..][0] = 1`。`i = 0` 代表不使用任何硬币面值，这种情况下显然无法凑出任何金额；`j = 0` 代表需要凑出的目标金额为 0，那么什么都不做就是唯一的一种凑法。

我们最终想得到的答案就是 `dp[N][amount]`，其中 `N` 为 `coins` 数组的大小。

大致的伪码思路如下：

```
int dp[N+1][amount+1]
dp[0][..] = 0
dp[..][0] = 1
```

```
for i in [1..N]:
    for j in [1..amount]:
        把物品 i 装进背包,
        不把物品 i 装进背包
return dp[N][amount]
```

第三步，根据「选择」，思考状态转移的逻辑。

注意，我们这个问题的特殊点在于物品的数量是无限的，所以这里和之前写的 0-1 背包问题 文章有所不同。

如果你不把这第 `i` 个物品装入背包，也就是说你不使用 `coins[i-1]` 这个面值的硬币，那么凑出面额 `j` 的方法数 `dp[i][j]` 应该等于 `dp[i-1][j]`，继承之前的结果。

如果你把这第 `i` 个物品装入了背包，也就是说你使用 `coins[i-1]` 这个面值的硬币，那么 `dp[i][j]` 应该等于 `dp[i][j-coins[i-1]]`。

> 由于定义中的 `i` 是从 1 开始计数的，所以 `coins` 的索引是 `i-1` 时表示第 `i` 个硬币的面值。

`dp[i][j-coins[i-1]]` 也不难理解，如果你决定使用这个面值的硬币，那么就应该关注如何凑出金额 `j - coins[i-1]`。

比如说，你想用面值为 2 的硬币凑出金额 5，那么如果你知道了凑出金额 3 的方法，再加上一枚面额为 2 的硬币，不就可以凑出 5 了嘛。

综上就是两种选择，而我们想求的 `dp[i][j]` 是「共有多少种凑法」，所以 `dp[i][j]` 的值应该是以上两种选择的结果之和：

```
for (int i = 1; i <= n; i++) {
    for (int j = 1; j <= amount; j++) {
        if (j - coins[i-1] >= 0)
            dp[i][j] = dp[i - 1][j]
                     + dp[i][j-coins[i-1]];
return dp[N][W]
```

> 有的读者在这里可能会有疑问，不是说可以重复使用硬币吗？那么如果我确定「使用第 `i` 个面值的硬币」，我怎么确定这个面值的硬币被使用了多少枚？简单的一个 `dp[i][j-coins[i-1]]` 可以包含重复使用第 `i` 个硬币的情况吗？

对于这个问题，建议你再仔回头细阅读一下我们对 `dp` 数组的定义，然后把这个定义代入 `dp[i][j-coins[i-1]]` 看看：

若只使用前 `i` 个物品（可以重复使用），当背包容量为 `j-coins[i-1]` 时，有 `dp[i][j-coins[i-1]]` 种方法可以装满背包。

看到了吗，`dp[i][j-coins[i-1]]` 也是允许你使用第 `i` 个硬币的，所以说已经包含了重复使用硬币的情况，你一百个放心。

最后一步，把伪码翻译成代码，处理一些边界情况。

我用 Java 写的代码，把上面的思路完全翻译了一遍，并且处理了一些边界问题：

```
int change(int amount, int[] coins) {
    int n = coins.length;
    int[][] dp = int[n + 1][amount + 1];
    // base case
    for (int i = 0; i <= n; i++)
        dp[i][0] = 1;

    for (int i = 1; i <= n; i++) {
        for (int j = 1; j <= amount; j++)
            if (j - coins[i-1] >= 0)
                dp[i][j] = dp[i - 1][j]
                         + dp[i][j - coins[i-1]];
            else
                dp[i][j] = dp[i - 1][j];
    }
    return dp[n][amount];
}
```

▶ 🌟 代码可视化动画🌟

而且，我们通过观察可以发现，`dp` 数组的转移只和 `dp[i][..]` 和 `dp[i-1][..]` 有关，所以可以使用前文讲的 动态规划空间压缩技巧，进一步降低算法的空间复杂度：

```
int change(int amount, int[] coins) {
    int n = coins.length;
    int[] dp = new int[amount + 1];
    dp[0] = 1; // base case
    for (int i = 0; i < n; i++)
        for (int j = 1; j <= amount; j++)
            if (j - coins[i] >= 0)
                dp[j] = dp[j] + dp[j-coins[i]];

    return dp[amount];
}
```

这个解法和之前的思路完全相同，将二维 `dp` 数组压缩为一维，时间复杂度 O(N*amount)，空间复杂度 O(amount)。

至此，这道零钱兑换问题也通过背包问题的框架解决了。

接下来可阅读：

- 背包问题变体之子集分割

如果你有高质量的问题，可以 点击这里 进入本文的讨论区。

▶ **引用本文的文章**

- 目标和问题：背包问题的变体
- 经典动态规划：0-1 背包问题

——————————————

更多精品课程可查看 我的网站；扫码查看更多配套学习套件：

子集背包问题

Stars 123k 精品课程 查看 知乎 @labuladong B站 @labuladong

学算法认准 labuladong，致力于把算法讲清楚！网页版 点这里。

读完本文，你不仅学会了算法套路，还可以顺便解决如下题目：

LeetCode	力扣	难度
416. Partition Equal Subset Sum	416. 分割等和子集	🟠
-	剑指 Offer II 101. 分割等和子集	🟢

上篇文章 经典动态规划：0-1 背包问题 详解了通用的 0-1 背包问题，今天来看看背包问题的思想能够如何运用到其他算法题目。

而且，不是经常有读者问，怎么将二维动态规划压缩成一维动态规划吗？这就是空间压缩，很容易的，本文也会提及这种技巧。

读者在阅读本文之前务必读懂前文 经典动态规划：0-1 背包问题 中讲的套路，因为本文就是按照背包问题的解题模板来讲解的。

一、问题分析

看一下力扣第 416 题「分割等和子集」：

输入一个只包含正整数的非空数组 `nums`，请你写一个算法，判断这个数组是否可以被分割成两个子集，使得两个子集的元素和相等。

算法的函数签名如下：

```
// 输入一个集合，返回是否能够分割成和相等的两个子集
boolean canPartition(int[] nums);
```

比如说输入 `nums = [1,5,11,5]`，算法返回 true，因为 `nums` 可以分割成 `[1,5,5]` 和 `[11]` 这两个子集。

如果说输入 `nums = [1,3,2,5]`，算法返回 false，因为 `nums` 无论如何都不能分割成两个和相等的子集。

对于这个问题，看起来和背包没有任何关系，为什么说它是背包问题呢？

首先回忆一下背包问题大致的描述是什么：

给你一个可装载重量为 `W` 的背包和 `N` 个物品，每个物品有重量和价值两个属性。其中第 `i` 个物品的重量为 `wt[i]`，价值为 `val[i]`，现在让你用这个背包装物品，最多能装的价值是多少？

那么对于这个问题，我们可以先对集合求和，得出 `sum`，把问题转化为背包问题：

给一个可装载重量为 `sum / 2` 的背包和 `N` 个物品，每个物品的重量为 `nums[i]`。现在让你装物品，是否存在一种装法，能够恰好将背包装满？

你看，这就是背包问题的模型，甚至比我们之前的经典背包问题还要简单一些，**下面我们就直接转换成背包问题**，开始套前文讲过的背包问题框架即可。

二、解法分析

第一步要明确两点，「状态」和「选择」。

这个前文 经典动态规划：背包问题 已经详细解释过了，状态就是「背包的容量」和「可选择的物品」，选择就是「装进背包」或者「不装进背包」。

第二步要明确 `dp` 数组的定义。

按照背包问题的套路，可以给出如下定义：

`dp[i][j] = x` 表示，对于前 `i` 个物品（`i` 从 1 开始计数），当前背包的容量为 `j` 时，若 `x` 为 `true`，则说明可以恰好将背包装满，若 `x` 为 `false`，则说明不能恰好将背包装满。

比如说，如果 `dp[4][9] = true`，其含义为：对于容量为 9 的背包，若只是在前 4 个物品中进行选择，可以有一种方法把背包恰好装满。

或者说对于本题，含义是对于给定的集合中，若只在前 4 个数字中进行选择，存在一个子集的和可以恰好凑出 9。

根据这个定义，我们想求的最终答案就是 `dp[N][sum/2]`，base case 就是 `dp[..][0] = true` 和 `dp[0][..] = false`，因为背包没有空间的时候，就相当于装满了，而当没有物品可选择的时候，肯定没办法装满背包。

第三步，根据「选择」，思考状态转移的逻辑。

回想刚才的 `dp` 数组含义，可以根据「选择」对 `dp[i][j]` 得到以下状态转移：

如果不把 `nums[i]` 算入子集，**或者说你不把这第 `i` 个物品装入背包**，那么是否能够恰好装满背包，取决于上一个状态 `dp[i-1][j]`，继承之前的结果。

如果把 `nums[i]` 算入子集，**或者说你把这第 `i` 个物品装入了背包**，那么是否能够恰好装满背包，取决于状态 `dp[i-1][j-nums[i-1]]`。

> 由于 `dp` 数组定义中的 `i` 是从 1 开始计数，而数组索引是从 0 开始的，所以第 `i` 个物品的重量应该是 `nums[i-1]`，这一点不要搞混。

`dp[i - 1][j-nums[i-1]]` 也很好理解：你如果装了第 `i` 个物品，就要看背包的剩余重量 `j - nums[i-1]` 限制下是否能够被恰好装满。

换句话说，如果 `j - nums[i-1]` 的重量可以被恰好装满，那么只要把第 `i` 个物品装进去，也可恰好装满 `j` 的重量；否则的话，重量 `j` 肯定是装不满的。

最后一步，把伪码翻译成代码，处理一些边界情况。

以下是我的 Java 代码，完全翻译了之前的思路，并处理了一些边界情况：

```
boolean canPartition(int[] nums) {
    int sum = 0;
    for (int num : nums) sum += num;
    // 和为奇数时，不可能划分成两个和相等的集合
    if (sum % 2 != 0) return false;
    int n = nums.length;
    sum = sum / 2;
    boolean[][] dp = new boolean[n + 1][sum + 1];
    // base case
    for (int i = 0; i <= n; i++)
        dp[i][0] = true;

    for (int i = 1; i <= n; i++) {
        for (int j = 1; j <= sum; j++) {
            if (j - nums[i - 1] < 0) {
                // 背包容量不足，不能装入第 i 个物品
                dp[i][j] = dp[i - 1][j];
            } else {
                // 装入或不装入背包
                dp[i][j] = dp[i - 1][j] || dp[i - 1][j - nums[i - 1]];
            }
        }
    }
    return dp[n][sum];
}
```

三、进一步优化

再进一步，是否可以优化这个代码呢？**注意到 `dp[i][j]` 都是通过上一行 `dp[i-1][..]` 转移过来的**，之前的数据都不会再使用了。

所以，我们可以参照前文 对动态规划进行降维打击，将二维 `dp` 数组压缩为一维，节约空间复杂度：

```
boolean canPartition(int[] nums) {
    int sum = 0;
    for (int num : nums) sum += num;
    // 和为奇数时，不可能划分成两个和相等的集合
    if (sum % 2 != 0) return false;
    int n = nums.length;
    sum = sum / 2;
```

```
        boolean[] dp = new boolean[sum + 1];

        // base case
        dp[0] = true;

        for (int i = 0; i < n; i++) {
            for (int j = sum; j >= 0; j--) {
                if (j - nums[i] >= 0) {
                    dp[j] = dp[j] || dp[j - nums[i]];
                }
            }
        }
        return dp[sum];
    }
```

其实这段代码和之前的解法思路完全相同，只在一行 `dp` 数组上操作，`i` 每进行一轮迭代，`dp[j]` 其实就相当于 `dp[i-1][j]`，所以只需要一维数组就够用了。

唯一需要注意的是 `j` 应该从后往前反向遍历，因为每个物品（或者说数字）只能用一次，以免之前的结果影响其他的结果。

至此，子集切割的问题就完全解决了，时间复杂度 `O(n\*sum)`，空间复杂度 `O(sum)`。

如果你有高质量的问题，可以 点击这里 进入本文的讨论区。

▶ **引用本文的题目**

安装 我的 Chrome 刷题插件 点开下列题目可直接查看解题思路：

LeetCode	力扣
-	剑指 Offer II 101. 分割等和子集

▶ **引用本文的文章**

- 回溯算法最佳实践：集合划分
- 目标和问题：背包问题的变体
- 经典动态规划：0-1 背包问题
- 经典动态规划：完全背包问题

———————————————

更多精品课程可查看 我的网站；扫码查看更多配套学习套件：

算法学习网站：https://labuladong.gitee.io/algo/ 或 https://labuladong.github.io/algo/

二维码太多，长按识别不到？放大图片 -> 让对应二维码充满屏幕 -> 长按识别该二维码

4.4 用动态规划玩游戏

动态规划的底层逻辑也是穷举，只不过动态规划问题具有一些特殊的性质，使得穷举的过程中存在可优化的空间。

这里先提醒你，学习动态规划问题要格外注意这几个词：**「状态」**，**「选择」**，**「dp 数组的定义」**。你把这几个词理解到位了，就理解了动态规划的核心。

当然，动态规划问题的题型非常广泛，我不能保证你理解了核心就能做出所有动态规划题目，但我保证你理解了核心原理之后可以很轻松地理解别人的正确解法。如果自己勤加练习和总结，解决大部分中上难度的动态规划问题应该是没什么问题的。

公众号标签：手把手刷动态规划

团灭 LeetCode 股票买卖问题

Stars 123k 精品课程 查看 知乎 @labuladong B站 @labuladong

微信搜一搜 labuladong公众号

学算法认准 labuladong，致力于把算法讲清楚！网页版 点这里。

读完本文，你不仅学会了算法套路，还可以顺便解决如下题目：

LeetCode	力扣	难度
121. Best Time to Buy and Sell Stock	121. 买卖股票的最佳时机	🟢
122. Best Time to Buy and Sell Stock II	122. 买卖股票的最佳时机 II	🟠
123. Best Time to Buy and Sell Stock III	123. 买卖股票的最佳时机 III	🔴
188. Best Time to Buy and Sell Stock IV	188. 买卖股票的最佳时机 IV	🔴
309. Best Time to Buy and Sell Stock with Cooldown	309. 最佳买卖股票时机含冷冻期	🟠
714. Best Time to Buy and Sell Stock with Transaction Fee	714. 买卖股票的最佳时机含手续费	🟠
-	剑指 Offer 63. 股票的最大利润	🟠

很多读者抱怨力扣上的股票系列问题的解法太多，如果面试真的遇到这类问题，基本不会想到那些巧妙的办法，怎么办？**所以本文不讲那些过于巧妙的思路，而是稳扎稳打，只用一种通用方法解决所有问题，以不变应万变。**

这篇文章参考 英文版高赞题解 的思路，用状态机的技巧来解决，可以全部提交通过。不要觉得这个名词高大上，文学词汇而已，实际上就是 DP table，看一眼就明白了。

先随便抽出一道题，看看别人的解法：

```
int maxProfit(vector<int>& prices) {
    if(prices.empty()) return 0;
    int s1 = -prices[0], s2 = INT_MIN, s3 = INT_MIN, s4 = INT_MIN;

    for(int i = 1; i < prices.size(); ++i) {
        s1 = max(s1, -prices[i]);
        s2 = max(s2, s1 + prices[i]);
        s3 = max(s3, s2 - prices[i]);
        s4 = max(s4, s3 + prices[i]);
    }
```

```
    return max(0, s4);
}
```

能看懂吧？会做了吗？不可能的，你看不懂，这才正常。就算你勉强看懂了，下一个问题你还是做不出来。为什么别人能写出这么诡异却又高效的解法呢？因为这类问题是有框架的，但是人家不会告诉你的，因为一旦告诉你，你五分钟就学会了，该算法题就不再神秘，变得不堪一击了。

本文就来告诉你这个框架，然后带着你一道一道秒杀。这篇文章用状态机的技巧来解决，可以全部提交通过。不要觉得这个名词高大上，文学词汇而已，实际上就是 DP table，看一眼就明白了。

这 6 道题目是有共性的，我们只需要抽出来力扣第 188 题「买卖股票的最佳时机 IV」进行研究，因为这道题是最泛化的形式，其他的问题都是这个形式的简化，看下题目：

▼ 188. 买卖股票的最佳时机 IV Leetcode | 力扣

给你一个整数数组 `prices` 和一个整数 `k`，其中 `prices[i]` 是某支给定的股票在第 `i` 天的价格。

设计一个算法来计算你所能获取的最大利润。你最多可以完成 `k` 笔交易。也就是说，你最多可以买 `k` 次，卖 `k` 次。

注意：你不能同时参与多笔交易（你必须在再次购买前出售掉之前的股票）。

示例 1：

输入：`k = 2, prices = [2,4,1]`
输出：`2`
解释：在第 `1` 天 (股票价格 `= 2`) 的时候买入，在第 `2` 天 (股票价格 `= 4`) 的时候卖出，这笔交易所能获得利润 `= 4-2 = 2` 。

示例 2：

输入：`k = 2, prices = [3,2,6,5,0,3]`
输出：`7`
解释：在第 `2` 天 (股票价格 `= 2`) 的时候买入，在第 `3` 天 (股票价格 `= 6`) 的时候卖出，这笔交易所能获得利润 `= 6-2 = 4` 。
随后，在第 `5` 天 (股票价格 `= 0`) 的时候买入，在第 `6` 天 (股票价格 `= 3`) 的时候卖出，这笔交易所能获得利润 `= 3-0 = 3` 。

提示：

- `1 <= k <= 100`
- `1 <= prices.length <= 1000`
- `0 <= prices[i] <= 1000`

第一题是只进行一次交易，相当于 `k = 1`；第二题是不限交易次数，相当于 `k = +infinity`（正无穷）；第三题是只进行 2 次交易，相当于 `k = 2`；剩下两道也是不限次数，但是加了交易「冷冻期」和「手续费」的额外条件，其实就是第二题的变种，都很容易处理。

下面言归正传，开始解题。

一、穷举框架

首先，还是一样的思路：如何穷举？

动态规划核心套路 说过，动态规划算法本质上就是穷举「状态」，然后在「选择」中选择最优解。

那么对于这道题，我们具体到每一天，看看总共有几种可能的「状态」，再找出每个「状态」对应的「选择」。我们要穷举所有「状态」，穷举的目的是根据对应的「选择」更新状态。听起来抽象，你只要记住「状态」和「选择」两个词就行，下面实操一下就很容易明白了。

```
for 状态1 in 状态1的所有取值：
    for 状态2 in 状态2的所有取值：
        for ...
            dp[状态1][状态2][...] = 择优(选择1，选择2...)
```

比如说这个问题，**每天都有三种「选择」**：买入、卖出、无操作，我们用 `buy`, `sell`, `rest` 表示这三种选择。

但问题是，并不是每天都可以任意选择这三种选择的，因为 `sell` 必须在 `buy` 之后，`buy` 必须在 `sell` 之后。那么 `rest` 操作还应该分两种状态，一种是 `buy` 之后的 `rest`（持有了股票），一种是 `sell` 之后的 `rest`（没有持有股票）。而且别忘了，我们还有交易次数 `k` 的限制，就是说你 `buy` 还只能在 `k > 0` 的前提下操作。

> 注意我在本文会频繁使用「交易」这个词，**我们把一次买入和一次卖出定义为一次「交易」**。

很复杂对吧，不要怕，我们现在的目的只是穷举，你有再多的状态，老夫要做的就是一把梭全部列举出来。

这个问题的「状态」有三个，第一个是天数，第二个是允许交易的最大次数，第三个是当前的持有状态（即之前说的 `rest` 的状态，我们不妨用 1 表示持有，0 表示没有持有）。然后我们用一个三维数组就可以装下这几种状态的全部组合：

```
dp[i][k][0 or 1]
0 <= i <= n - 1, 1 <= k <= K
n 为天数，大 K 为交易数的上限，0 和 1 代表是否持有股票。
此问题共 n × K × 2 种状态，全部穷举就能搞定。

for 0 <= i < n:
    for 1 <= k <= K:
        for s in {0, 1}:
            dp[i][k][s] = max(buy, sell, rest)
```

而且我们可以用自然语言描述出每一个状态的含义，比如说 `dp[3][2][1]` 的含义就是：今天是第三天，我现在手上持有着股票，至今最多进行 2 次交易。再比如 `dp[2][3][0]` 的含义：今天是第二天，我现在手上没有持有股票，至今最多进行 3 次交易。很容易理解，对吧？

我们想求的最终答案是 `dp[n - 1][K][0]`，即最后一天，最多允许 `K` 次交易，最多获得多少利润。

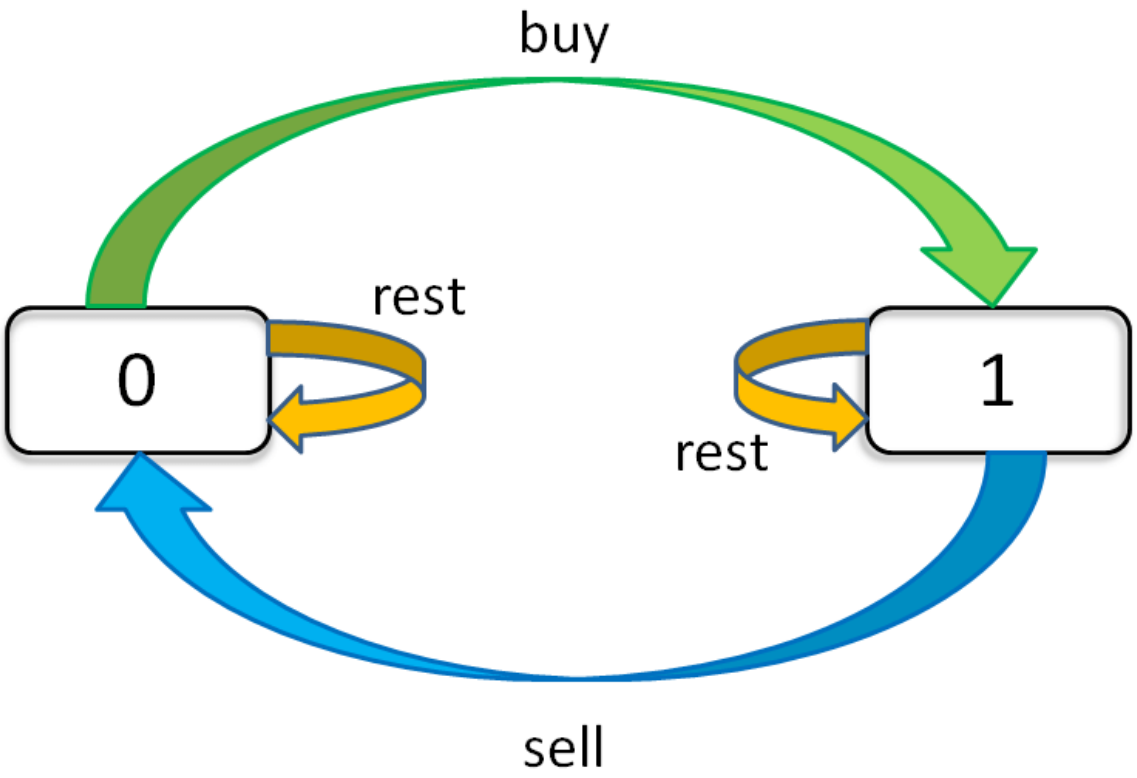
读者可能问为什么不是 `dp[n - 1][K][1]`？因为 `dp[n - 1][K][1]` 代表到最后一天手上还持有股票，`dp[n - 1][K][0]` 表示最后一天手上的股票已经卖出去了，很显然后者得到的利润一定大于前者。

记住如何解释「状态」，一旦你觉得哪里不好理解，把它翻译成自然语言就容易理解了。

二、状态转移框架

现在，我们完成了「状态」的穷举，我们开始思考每种「状态」有哪些「选择」，应该如何更新「状态」。

只看「持有状态」，可以画个状态转移图：



通过这个图可以很清楚地看到，每种状态（0 和 1）是如何转移而来的。根据这个图，我们来写一下状态转移方程：

```
dp[i][k][0] = max(dp[i-1][k][0], dp[i-1][k][1] + prices[i])
              max( 今天选择 rest,         今天选择 sell       )
```

解释：今天我没有持有股票，有两种可能，我从这两种可能中求最大利润：

1、我昨天就没有持有，且截至昨天最大交易次数限制为 `k`；然后我今天选择 `rest`，所以我今天还是没有持有，最大交易次数限制依然为 `k`。

2、我昨天持有股票，且截至昨天最大交易次数限制为 `k`；但是今天我 `sell` 了，所以我今天没有持有股票了，最大交易次数限制依然为 `k`。

```

```

```
dp[i][k][1] = max(dp[i-1][k][1], dp[i-1][k-1][0] - prices[i])
              max( 今天选择 rest,         今天选择 buy         )
```

解释：今天我持有着股票，最大交易次数限制为 k，那么对于昨天来说，有两种可能，我从这两种可能中求最大利润：

1、我昨天就持有着股票，且截至昨天最大交易次数限制为 k；然后今天选择 rest，所以我今天还持有着股票，最大交易次数限制依然为 k。

2、我昨天本没有持有，且截至昨天最大交易次数限制为 k - 1；但今天我选择 buy，所以今天我就持有股票了，最大交易次数限制为 k。

> 这里着重提醒一下，**时刻牢记「状态」的定义**，状态 k 的定义并不是「已进行的交易次数」，而是「最大交易次数的上限限制」。如果确定今天进行一次交易，且要保证截至今天最大交易次数上限为 k，那么昨天的最大交易次数上限必须是 k - 1。举个具体的例子，比方说要求你的银行卡里今天至少有 100 块钱，且你确定你今天可以赚 10 块钱，那么你就要保证昨天的银行卡要至少剩下 90 块钱。

这个解释应该很清楚了，如果 buy，就要从利润中减去 prices[i]，如果 sell，就要给利润增加 prices[i]。今天的最大利润就是这两种可能选择中较大的那个。

注意 k 的限制，在选择 buy 的时候相当于开启了一次交易，那么对于昨天来说，交易次数的上限 k 应该减小 1。

> 这里补充修正一点，以前我以为在 sell 的时候给 k 减小 1 和在 buy 的时候给 k 减小 1 是等效的，但细心的读者向我提出质疑，经过深入思考我发现前者确实是错误的，因为交易是从 buy 开始，如果 buy 的选择不改变交易次数 k 的话，会出现交易次数超出限制的的错误。

现在，我们已经完成了动态规划中最困难的一步：状态转移方程。**如果之前的内容你都可以理解，那么你已经可以秒杀所有问题了，只要套这个框架就行了**。不过还差最后一点点，就是定义 base case，即最简单的情况。

```
dp[-1][...][0] = 0
解释：因为 i 是从 0 开始的，所以 i = -1 意味着还没有开始，这时候的利润当然是 0。

dp[-1][...][1] = -infinity
解释：还没开始的时候，是不可能持有股票的。
因为我们的算法要求一个最大值，所以初始值设为一个最小值，方便取最大值。

dp[...][0][0] = 0
解释：因为 k 是从 1 开始的，所以 k = 0 意味着根本不允许交易，这时候利润当然是 0。

dp[...][0][1] = -infinity
解释：不允许交易的情况下，是不可能持有股票的。
因为我们的算法要求一个最大值，所以初始值设为一个最小值，方便取最大值。
```

把上面的状态转移方程总结一下：

```
base case:
dp[-1][...][0] = dp[...][0][0] = 0
dp[-1][...][1] = dp[...][0][1] = -infinity

状态转移方程:
dp[i][k][0] = max(dp[i-1][k][0], dp[i-1][k][1] + prices[i])
dp[i][k][1] = max(dp[i-1][k][1], dp[i-1][k-1][0] - prices[i])
```

读者可能会问，这个数组索引是 -1 怎么编程表示出来呢，负无穷怎么表示呢？这都是细节问题，有很多方法实现。现在完整的框架已经完成，下面开始具体化。

三、秒杀题目

第一题，先说力扣第 121 题「买卖股票的最佳时机」，相当于 `k = 1` 的情况：

▼ 121. 买卖股票的最佳时机 Leetcode | 力扣

给定一个数组 `prices` ，它的第 `i` 个元素 `prices[i]` 表示一支给定股票第 `i` 天的价格。

你只能选择 **某一天** 买入这只股票，并选择在 **未来的某一个不同的日子** 卖出该股票。设计一个算法来计算你所能获取的最大利润。

返回你可以从这笔交易中获取的最大利润。如果你不能获取任何利润，返回 `0` 。

示例 1：

```
输入：[7,1,5,3,6,4]
输出：5
解释：在第 2 天（股票价格 = 1）的时候买入，在第 5 天（股票价格 = 6）的时候卖出，最大利润 = 6-1 = 5 。
     注意利润不能是 7-1 = 6, 因为卖出价格需要大于买入价格；同时，你不能在买入前卖出股票。
```

示例 2：

```
输入：prices = [7,6,4,3,1]
输出：0
解释：在这种情况下， 没有交易完成， 所以最大利润为 0。
```

提示：

- `1 <= prices.length <="10<sup">5`
- `0 <= prices[i] <="10<sup">4`

直接套状态转移方程，根据 base case，可以做一些化简：

```
dp[i][1][0] = max(dp[i-1][1][0], dp[i-1][1][1] + prices[i])
dp[i][1][1] = max(dp[i-1][1][1], dp[i-1][0][0] - prices[i])
            = max(dp[i-1][1][1], -prices[i])
解释：k = 0 的 base case，所以 dp[i-1][0][0] = 0。

现在发现 k 都是 1，不会改变，即 k 对状态转移已经没有影响了。
可以进行进一步化简去掉所有 k：
dp[i][0] = max(dp[i-1][0], dp[i-1][1] + prices[i])
dp[i][1] = max(dp[i-1][1], -prices[i])
```

直接写出代码：

```
int n = prices.length;
int[][] dp = new int[n][2];
for (int i = 0; i < n; i++) {
    dp[i][0] = Math.max(dp[i-1][0], dp[i-1][1] + prices[i]);
    dp[i][1] = Math.max(dp[i-1][1], -prices[i]);
}
return dp[n - 1][0];
```

显然 `i = 0` 时 `i - 1` 是不合法的索引，这是因为我们没有对 `i` 的 base case 进行处理，可以这样给一个特化处理：

```
if (i - 1 == -1) {
    dp[i][0] = 0;
    // 根据状态转移方程可得：
    //   dp[i][0]
    // = max(dp[-1][0], dp[-1][1] + prices[i])
    // = max(0, -infinity + prices[i]) = 0

    dp[i][1] = -prices[i];
    // 根据状态转移方程可得：
    //   dp[i][1]
    // = max(dp[-1][1], dp[-1][0] - prices[i])
    // = max(-infinity, 0 - prices[i])
    // = -prices[i]
    continue;
}
```

第一题就解决了，但是这样处理 base case 很麻烦，而且注意一下状态转移方程，新状态只和相邻的一个状态有关，所以可以用前文 动态规划的降维打击：空间压缩技巧，不需要用整个 `dp` 数组，只需要一个变量储存相邻的那个状态就足够了，这样可以把空间复杂度降到 O(1)：

```
// 原始版本
int maxProfit_k_1(int[] prices) {
```

```
    int n = prices.length;
    int[][] dp = new int[n][2];
    for (int i = 0; i < n; i++) {
        if (i - 1 == -1) {
            // base case
            dp[i][0] = 0;
            dp[i][1] = -prices[i];
            continue;
        }
        dp[i][0] = Math.max(dp[i-1][0], dp[i-1][1] + prices[i]);
        dp[i][1] = Math.max(dp[i-1][1], -prices[i]);
    }
    return dp[n - 1][0];
}

// 空间复杂度优化版本
int maxProfit_k_1(int[] prices) {
    int n = prices.length;
    // base case: dp[-1][0] = 0, dp[-1][1] = -infinity
    int dp_i_0 = 0, dp_i_1 = Integer.MIN_VALUE;
    for (int i = 0; i < n; i++) {
        // dp[i][0] = max(dp[i-1][0], dp[i-1][1] + prices[i])
        dp_i_0 = Math.max(dp_i_0, dp_i_1 + prices[i]);
        // dp[i][1] = max(dp[i-1][1], -prices[i])
        dp_i_1 = Math.max(dp_i_1, -prices[i]);
    }
    return dp_i_0;
}
```

两种方式都是一样的，不过这种编程方法简洁很多，但是如果没有前面状态转移方程的引导，是肯定看不懂的。后续的题目，你可以对比一下如何把 dp 数组的空间优化掉。

第二题，看一下力扣第 122 题「买卖股票的最佳时机 II」，也就是 k 为正无穷的情况：

▼ 122. 买卖股票的最佳时机 II Leetcode | 力扣

给你一个整数数组 prices ，其中 prices[i] 表示某支股票第 i 天的价格。

在每一天，你可以决定是否购买和/或出售股票。你在任何时候 **最多** 只能持有 **一股** 股票。你也可以先购买，然后在 **同一天** 出售。

返回 *你能获得的 **最大** 利润* 。

示例 1：

```
输入：prices = [7,1,5,3,6,4]
输出：7
解释：在第 2 天（股票价格 = 1）的时候买入，在第 3 天（股票价格 = 5）的时候卖出，这笔交易所能获得利润 = 5 - 1 = 4 。
     随后，在第 4 天（股票价格 = 3）的时候买入，在第 5 天（股票价格 = 6）的时候卖出，这笔交易所能获得利润 = 6 - 3 = 3 。
     总利润为 4 + 3 = 7 。
```

示例 2：

```
输入：prices = [1,2,3,4,5]
输出：4
解释：在第 1 天（股票价格 = 1）的时候买入，在第 5 天 （股票价格 = 5）的时候卖出，这笔交易所能获得利润 = 5 - 1 = 4 。
     总利润为 4 。
```

示例 3：

```
输入：prices = [7,6,4,3,1]
输出：0
解释：在这种情况下，交易无法获得正利润，所以不参与交易可以获得最大利润，最大利润为 0 。
```

提示：

- $1 <= prices.length <= 3 * 10^4$
- $0 <= prices[i] <= 10^4$

题目还专门强调可以在同一天出售，但我觉得这个条件纯属多余，如果当天买当天卖，那利润当然就是 0，这不是和没有进行交易是一样的吗？这道题的特点在于没有给出交易总数 k 的限制，也就相当于 k 为正无穷。

如果 k 为正无穷，那么就可以认为 k 和 k - 1 是一样的。可以这样改写框架：

```
dp[i][k][0] = max(dp[i-1][k][0], dp[i-1][k][1] + prices[i])
dp[i][k][1] = max(dp[i-1][k][1], dp[i-1][k-1][0] - prices[i])
            = max(dp[i-1][k][1], dp[i-1][k][0] - prices[i])

我们发现数组中的 k 已经不会改变了，也就是说不需要记录 k 这个状态了：
dp[i][0] = max(dp[i-1][0], dp[i-1][1] + prices[i])
dp[i][1] = max(dp[i-1][1], dp[i-1][0] - prices[i])
```

直接翻译成代码：

```
// 原始版本
int maxProfit_k_inf(int[] prices) {
    int n = prices.length;
    int[][] dp = new int[n][2];
    for (int i = 0; i < n; i++) {
        if (i - 1 == -1) {
            // base case
            dp[i][0] = 0;
            dp[i][1] = -prices[i];
```

```
                continue;
            }
            dp[i][0] = Math.max(dp[i-1][0], dp[i-1][1] + prices[i]);
            dp[i][1] = Math.max(dp[i-1][1], dp[i-1][0] - prices[i]);
        }
        return dp[n - 1][0];
    }

    // 空间复杂度优化版本
    int maxProfit_k_inf(int[] prices) {
        int n = prices.length;
        int dp_i_0 = 0, dp_i_1 = Integer.MIN_VALUE;
        for (int i = 0; i < n; i++) {
            int temp = dp_i_0;
            dp_i_0 = Math.max(dp_i_0, dp_i_1 + prices[i]);
            dp_i_1 = Math.max(dp_i_1, temp - prices[i]);
        }
        return dp_i_0;
    }
```

第三题，看力扣第 309 题「最佳买卖股票时机含冷冻期」，也就是 k 为正无穷，但含有交易冷冻期的情况：

▼ 309. 最佳买卖股票时机含冷冻期 Leetcode | 力扣

给定一个整数数组prices，其中第 prices[i] 表示第 *i* 天的股票价格 。

设计一个算法计算出最大利润。在满足以下约束条件下，你可以尽可能地完成更多的交易（多次买卖一支股票）：

- 卖出股票后，你无法在第二天买入股票 (即冷冻期为 1 天)。

注意：你不能同时参与多笔交易（你必须在再次购买前出售掉之前的股票）。

示例 1:

```
输入：prices = [1,2,3,0,2]
输出：3
解释：对应的交易状态为：[买入, 卖出, 冷冻期, 买入, 卖出]
```

示例 2:

```
输入：prices = [1]
输出：0
```

提示：

- 1 <= prices.length <= 5000
- 0 <= prices[i] <= 1000

和上一道题一样的，只不过每次 sell 之后要等一天才能继续交易，只要把这个特点融入上一题的状态转移方程即可：

```
dp[i][0] = max(dp[i-1][0], dp[i-1][1] + prices[i])
dp[i][1] = max(dp[i-1][1], dp[i-2][0] - prices[i])
解释：第 i 天选择 buy 的时候，要从 i-2 的状态转移，而不是 i-1 。
```

翻译成代码：

```
// 原始版本
int maxProfit_with_cool(int[] prices) {
    int n = prices.length;
    int[][] dp = new int[n][2];
    for (int i = 0; i < n; i++) {
        if (i - 1 == -1) {
            // base case 1
            dp[i][0] = 0;
            dp[i][1] = -prices[i];
            continue;
        }
        if (i - 2 == -1) {
            // base case 2
            dp[i][0] = Math.max(dp[i-1][0], dp[i-1][1] + prices[i]);
            // i - 2 小于 0 时根据状态转移方程推出对应 base case
            dp[i][1] = Math.max(dp[i-1][1], -prices[i]);
            //   dp[i][1]
            // = max(dp[i-1][1], dp[-1][0] - prices[i])
            // = max(dp[i-1][1], 0 - prices[i])
            // = max(dp[i-1][1], -prices[i])
            continue;
        }
        dp[i][0] = Math.max(dp[i-1][0], dp[i-1][1] + prices[i]);
        dp[i][1] = Math.max(dp[i-1][1], dp[i-2][0] - prices[i]);
    }
    return dp[n - 1][0];
}

// 空间复杂度优化版本
int maxProfit_with_cool(int[] prices) {
    int n = prices.length;
    int dp_i_0 = 0, dp_i_1 = Integer.MIN_VALUE;
    int dp_pre_0 = 0; // 代表 dp[i-2][0]
    for (int i = 0; i < n; i++) {
        int temp = dp_i_0;
        dp_i_0 = Math.max(dp_i_0, dp_i_1 + prices[i]);
        dp_i_1 = Math.max(dp_i_1, dp_pre_0 - prices[i]);
        dp_pre_0 = temp;
    }
    return dp_i_0;
}
```

第四题，看力扣第 714 题「买卖股票的最佳时机含手续费」，也就是 k 为正无穷且考虑交易手续费的情况：

▼ 714. 买卖股票的最佳时机含手续费 Leetcode | 力扣

给定一个整数数组 prices，其中 prices[i]表示第 i 天的股票价格 ； 整数 fee 代表了交易股票的手续费用。

你可以无限次地完成交易，但是你每笔交易都需要付手续费。如果你已经购买了一个股票，在卖出它之前你就不能再继续购买股票了。

返回获得利润的最大值。

注意：这里的一笔交易指买入持有并卖出股票的整个过程，每笔交易你只需要为支付一次手续费。

示例 1：

```
输入：prices = [1, 3, 2, 8, 4, 9], fee = 2
输出：8
解释：能够达到的最大利润：
在此处买入 prices[0] = 1
在此处卖出 prices[3] = 8
在此处买入 prices[4] = 4
在此处卖出 prices[5] = 9
总利润：((8 - 1) - 2) + ((9 - 4) - 2) = 8
```

示例 2：

```
输入：prices = [1,3,7,5,10,3], fee = 3
输出：6
```

提示：

- $1 <= prices.length <= 5 * 10^4$
- $1 <= prices[i] < 5 * 10^4$
- $0 <= fee < 5 * 10^4$

每次交易要支付手续费，只要把手续费从利润中减去即可，改写方程：

```
dp[i][0] = max(dp[i-1][0], dp[i-1][1] + prices[i])
dp[i][1] = max(dp[i-1][1], dp[i-1][0] - prices[i] - fee)
解释：相当于买入股票的价格升高了。
在第一个式子里减也是一样的，相当于卖出股票的价格减小了。
```

> 如果直接把 fee 放在第一个式子里减，会有一些测试用例无法通过，错误原因是整型溢出而不是思路问题。一种解决方案是把代码中的 int 类型都改成 long 类型，避免 int 的整型溢出。

直接翻译成代码，注意状态转移方程改变后 base case 也要做出对应改变：

```
// 原始版本
int maxProfit_with_fee(int[] prices, int fee) {
    int n = prices.length;
    int[][] dp = new int[n][2];
    for (int i = 0; i < n; i++) {
        if (i - 1 == -1) {
            // base case
            dp[i][0] = 0;
            dp[i][1] = -prices[i] - fee;
            //   dp[i][1]
            // = max(dp[i - 1][1], dp[i - 1][0] - prices[i] - fee)
            // = max(dp[-1][1], dp[-1][0] - prices[i] - fee)
            // = max(-inf, 0 - prices[i] - fee)
            // = -prices[i] - fee
            continue;
        }
        dp[i][0] = Math.max(dp[i - 1][0], dp[i - 1][1] + prices[i]);
        dp[i][1] = Math.max(dp[i - 1][1], dp[i - 1][0] - prices[i] - fee);
    }
    return dp[n - 1][0];
}

// 空间复杂度优化版本
int maxProfit_with_fee(int[] prices, int fee) {
    int n = prices.length;
    int dp_i_0 = 0, dp_i_1 = Integer.MIN_VALUE;
    for (int i = 0; i < n; i++) {
        int temp = dp_i_0;
        dp_i_0 = Math.max(dp_i_0, dp_i_1 + prices[i]);
        dp_i_1 = Math.max(dp_i_1, temp - prices[i] - fee);
    }
    return dp_i_0;
}
```

第五题，看力扣第 123 题「买卖股票的最佳时机 III」，也就是 k = 2 的情况：

▼ 123. 买卖股票的最佳时机 III Leetcode | 力扣

给定一个数组，它的第 i 个元素是一支给定的股票在第 i 天的价格。

设计一个算法来计算你所能获取的最大利润。你最多可以完成 **两笔** 交易。

注意：你不能同时参与多笔交易（你必须在再次购买前出售掉之前的股票）。

示例 1:

输入： prices = [3,3,5,0,0,3,1,4]
输出： 6
解释： 在第 4 天（股票价格 = 0）的时候买入，在第 6 天（股票价格 = 3）的时候卖出，这笔交易所能获得利润 = 3-0 = 3 。
随后，在第 7 天（股票价格 = 1）的时候买入，在第 8 天 （股票价格 = 4）的时候卖出，这笔交易所能获得利润 = 4-1 = 3 。

示例 2：

输入： prices = [1,2,3,4,5]
输出： 4
解释： 在第 1 天（股票价格 = 1）的时候买入，在第 5 天 （股票价格 = 5）的时候卖出，这笔交易所能获得利润 = 5-1 = 4 。
注意你不能在第 1 天和第 2 天接连购买股票，之后再将它们卖出。
因为这样属于同时参与了多笔交易，你必须在再次购买前出售掉之前的股票。

示例 3：

输入： prices = [7,6,4,3,1]
输出： 0
解释： 在这个情况下，没有交易完成，所以最大利润为 0。

示例 4：

输入： prices = [1]
输出： 0

提示：

- 1 <= prices.length <="10<sup">5
- 0 <= prices[i] <="10<sup">5

k = 2 和前面题目的情况稍微不同，因为上面的情况都和 k 的关系不太大：要么 k 是正无穷，状态转移和 k 没关系了；要么 k = 1，跟 k = 0 这个 base case 挨得近，最后也没有存在感。

这道题 k = 2 和后面要讲的 k 是任意正整数的情况中，对 k 的处理就凸显出来了，我们直接写代码，边写边分析原因。

```
原始的状态转移方程，没有可化简的地方
dp[i][k][0] = max(dp[i-1][k][0], dp[i-1][k][1] + prices[i])
dp[i][k][1] = max(dp[i-1][k][1], dp[i-1][k-1][0] - prices[i])
```

按照之前的代码，我们可能想当然这样写代码（错误的）：

```
int k = 2;
int[][][] dp = new int[n][k + 1][2];
for (int i = 0; i < n; i++) {
    if (i - 1 == -1) {
        // 处理 base case
        dp[i][k][0] = 0;
        dp[i][k][1] = -prices[i];
        continue;
    }
    dp[i][k][0] = Math.max(dp[i-1][k][0], dp[i-1][k][1] + prices[i]);
    dp[i][k][1] = Math.max(dp[i-1][k][1], dp[i-1][k-1][0] - prices[i]);
}
return dp[n - 1][k][0];
```

为什么错误？我这不是照着状态转移方程写的吗？

还记得前面总结的「穷举框架」吗？就是说我们必须穷举所有状态。其实我们之前的解法，都在穷举所有状态，只是之前的题目中 k 都被化简掉了。

比如说第一题，k = 1 时的代码框架：

```
int n = prices.length;
int[][] dp = new int[n][2];
for (int i = 0; i < n; i++) {
    dp[i][0] = Math.max(dp[i-1][0], dp[i-1][1] + prices[i]);
    dp[i][1] = Math.max(dp[i-1][1], -prices[i]);
}
return dp[n - 1][0];
```

但当 k = 2 时，由于没有消掉 k 的影响，所以必须要对 k 进行穷举：

```
// 原始版本
int maxProfit_k_2(int[] prices) {
    int max_k = 2, n = prices.length;
    int[][][] dp = new int[n][max_k + 1][2];
    for (int i = 0; i < n; i++) {
        for (int k = max_k; k >= 1; k--) {
            if (i - 1 == -1) {
                // 处理 base case
                dp[i][k][0] = 0;
                dp[i][k][1] = -prices[i];
                continue;
            }
            dp[i][k][0] = Math.max(dp[i-1][k][0], dp[i-1][k][1] +
prices[i]);
            dp[i][k][1] = Math.max(dp[i-1][k][1], dp[i-1][k-1][0] -
```

```
prices[i]);
            }
        }
        // 穷举了 n × max_k × 2 个状态，正确。
        return dp[n - 1][max_k][0];
    }
```

> **这里肯定会有读者疑惑，k 的 base case 是 0，按理说应该从 k = 1, k++ 这样穷举状态 k 才对？而且如果你真的这样从小到大遍历 k，提交发现也是可以的。**

这个疑问很正确，因为我们前文 动态规划答疑篇 有介绍 dp 数组的遍历顺序是怎么确定的，主要是根据 base case，以 base case 为起点，逐步向结果靠近。

但为什么我从大到小遍历 k 也可以正确提交呢？因为你注意看，dp[i][k][..] 不会依赖 dp[i][k - 1][..]，而是依赖 dp[i - 1][k - 1][..]，而 dp[i - 1][..][..]，都是已经计算出来的，所以不管你是 k = max_k, k--，还是 k = 1, k++，都是可以得出正确答案的。

那为什么我使用 k = max_k, k-- 的方式呢？因为这样符合语义：

你买股票，初始的「状态」是什么？应该是从第 0 天开始，而且还没有进行过买卖，所以最大交易次数限制 k 应该是 max_k；而随着「状态」的推移，你会进行交易，那么交易次数上限 k 应该不断减少，这样一想，k = max_k, k-- 的方式是比较合乎实际场景的。

当然，这里 k 取值范围比较小，所以也可以不用 for 循环，直接把 k = 1 和 2 的情况全部列举出来也可以：

```
// 状态转移方程：
// dp[i][2][0] = max(dp[i-1][2][0], dp[i-1][2][1] + prices[i])
// dp[i][2][1] = max(dp[i-1][2][1], dp[i-1][1][0] - prices[i])
// dp[i][1][0] = max(dp[i-1][1][0], dp[i-1][1][1] + prices[i])
// dp[i][1][1] = max(dp[i-1][1][1], -prices[i])

// 空间复杂度优化版本
int maxProfit_k_2(int[] prices) {
    // base case
    int dp_i10 = 0, dp_i11 = Integer.MIN_VALUE;
    int dp_i20 = 0, dp_i21 = Integer.MIN_VALUE;
    for (int price : prices) {
        dp_i20 = Math.max(dp_i20, dp_i21 + price);
        dp_i21 = Math.max(dp_i21, dp_i10 - price);
        dp_i10 = Math.max(dp_i10, dp_i11 + price);
        dp_i11 = Math.max(dp_i11, -price);
    }
    return dp_i20;
}
```

有状态转移方程和含义明确的变量名指导，相信你很容易看懂。其实我们可以故弄玄虚，把上述四个变量换成 a, b, c, d。这样当别人看到你的代码时就会大惊失色，对你肃然起敬。

第六题，看力扣第 188 题「买卖股票的最佳时机 IV」，即 k 可以是题目给定的任何数的情况：

▼ 188. 买卖股票的最佳时机 IV Leetcode | 力扣

给你一个整数数组 prices 和一个整数 k，其中 prices[i] 是某支给定的股票在第 i 天的价格。

设计一个算法来计算你所能获取的最大利润。你最多可以完成 k 笔交易。也就是说，你最多可以买 k 次，卖 k 次。

注意：你不能同时参与多笔交易（你必须在再次购买前出售掉之前的股票）。

示例 1：

```
输入：k = 2, prices = [2,4,1]
输出：2
解释：在第 1 天 (股票价格 = 2) 的时候买入，在第 2 天 (股票价格 = 4) 的时候卖出，这笔交易所能获得利润 = 4-2 = 2 。
```

示例 2：

```
输入：k = 2, prices = [3,2,6,5,0,3]
输出：7
解释：在第 2 天 (股票价格 = 2) 的时候买入，在第 3 天 (股票价格 = 6) 的时候卖出，这笔交易所能获得利润 = 6-2 = 4 。
     随后，在第 5 天 (股票价格 = 0) 的时候买入，在第 6 天 (股票价格 = 3) 的时候卖出，这笔交易所能获得利润 = 3-0 = 3 。
```

提示：

- 1 <= k <= 100
- 1 <= prices.length <= 1000
- 0 <= prices[i] <= 1000

有了上一题 k = 2 的铺垫，这题应该和上一题的第一个解法没啥区别，你把上一题的 k = 2 换成题目输入的 k 就行了。

但试一下发现会出一个内存超限的错误，原来是传入的 k 值会非常大，dp 数组太大了。那么现在想想，交易次数 k 最多有多大呢？

一次交易由买入和卖出构成，至少需要两天。所以说有效的限制 k 应该不超过 n/2，如果超过，就没有约束作用了，相当于 k 没有限制的情况，而这种情况是之前解决过的。

所以我们可以直接把之前的代码重用：

```
int maxProfit_k_any(int max_k, int[] prices) {
    int n = prices.length;
    if (n <= 0) {
        return 0;
```

```
        }
        if (max_k > n / 2) {
            // 复用之前交易次数 k 没有限制的情况
            return maxProfit_k_inf(prices);
        }

        // base case:
        // dp[-1][...][0] = dp[...][0][0] = 0
        // dp[-1][...][1] = dp[...][0][1] = -infinity
        int[][][] dp = new int[n][max_k + 1][2];
        // k = 0 时的 base case
        for (int i = 0; i < n; i++) {
            dp[i][0][1] = Integer.MIN_VALUE;
            dp[i][0][0] = 0;
        }

        for (int i = 0; i < n; i++)
            for (int k = max_k; k >= 1; k--) {
                if (i - 1 == -1) {
                    // 处理 i = -1 时的 base case
                    dp[i][k][0] = 0;
                    dp[i][k][1] = -prices[i];
                    continue;
                }
                dp[i][k][0] = Math.max(dp[i-1][k][0], dp[i-1][k][1] +
prices[i]);
                dp[i][k][1] = Math.max(dp[i-1][k][1], dp[i-1][k-1][0] -
prices[i]);
            }
        return dp[n - 1][max_k][0];
    }
```

至此，6 道题目通过一个状态转移方程全部解决。

万法归一

如果你能看到这里，已经可以给你鼓掌了，初次理解如此复杂的动态规划问题想必消耗了你不少的脑细胞，不过这是值得的，股票系列问题已经属于动态规划问题中较困难的了，如果这些题你都能搞懂，试问，其他那些虾兵蟹将又何足道哉？

现在你已经过了九九八十一难中的前八十难，最后我还要再难为你一下，请你实现如下函数：

```
int maxProfit_all_in_one(int max_k, int[] prices, int cooldown, int fee);
```

输入股票价格数组 `prices`，你最多进行 `max_k` 次交易，每次交易需要额外消耗 `fee` 的手续费，而且每次交易之后需要经过 `cooldown` 天的冷冻期才能进行下一次交易，请你计算并返回可以获得的最大利润。

怎么样，有没有被吓到？如果你直接给别人出一道这样的题目，估计对方要当场吐血，不过我们这样一步步做过来，你应该很容易发现这道题目就是之前我们探讨的几种情况的组合体嘛。

所以，我们只要把之前实现的几种代码掺和到一块，**在 base case 和状态转移方程中同时加上 `cooldown` 和 `fee` 的约束就行了**：

```
// 同时考虑交易次数的限制、冷冻期和手续费
int maxProfit_all_in_one(int max_k, int[] prices, int cooldown, int fee) {
    int n = prices.length;
    if (n <= 0) {
        return 0;
    }
    if (max_k > n / 2) {
        // 交易次数 k 没有限制的情况
        return maxProfit_k_inf(prices, cooldown, fee);
    }

    int[][][] dp = new int[n][max_k + 1][2];
    // k = 0 时的 base case
    for (int i = 0; i < n; i++) {
        dp[i][0][1] = Integer.MIN_VALUE;
        dp[i][0][0] = 0;
    }

    for (int i = 0; i < n; i++)
        for (int k = max_k; k >= 1; k--) {
            if (i - 1 == -1) {
                // base case 1
                dp[i][k][0] = 0;
                dp[i][k][1] = -prices[i] - fee;
                continue;
            }

            // 包含 cooldown 的 base case
            if (i - cooldown - 1 < 0) {
                // base case 2
                dp[i][k][0] = Math.max(dp[i-1][k][0], dp[i-1][k][1] +
prices[i]);
                // 别忘了减 fee
                dp[i][k][1] = Math.max(dp[i-1][k][1], -prices[i] - fee);
                continue;
            }
            dp[i][k][0] = Math.max(dp[i-1][k][0], dp[i-1][k][1] +
prices[i]);
            // 同时考虑 cooldown 和 fee
            dp[i][k][1] = Math.max(dp[i-1][k][1], dp[i-cooldown-1][k-1][0]
- prices[i] - fee);
        }
    return dp[n - 1][max_k][0];
}

// k 无限制，包含手续费和冷冻期
int maxProfit_k_inf(int[] prices, int cooldown, int fee) {
    int n = prices.length;
    int[][] dp = new int[n][2];
```

```
    for (int i = 0; i < n; i++) {
        if (i - 1 == -1) {
            // base case 1
            dp[i][0] = 0;
            dp[i][1] = -prices[i] - fee;
            continue;
        }

        // 包含 cooldown 的 base case
        if (i - cooldown - 1 < 0) {
            // base case 2
            dp[i][0] = Math.max(dp[i-1][0], dp[i-1][1] + prices[i]);
            // 别忘了减 fee
            dp[i][1] = Math.max(dp[i-1][1], -prices[i] - fee);
            continue;
        }
        dp[i][0] = Math.max(dp[i - 1][0], dp[i - 1][1] + prices[i]);
        // 同时考虑 cooldown 和 fee
        dp[i][1] = Math.max(dp[i - 1][1], dp[i - cooldown - 1][0] -
prices[i] - fee);
    }
    return dp[n - 1][0];
}
```

你可以用这个 `maxProfit_all_in_one` 函数去完成之前讲的 6 道题目，因为我们无法对 `dp` 数组进行优化，所以执行效率上不是最优的，但正确性上肯定是没有问题的。

最后总结一下吧，本文给大家讲了如何通过状态转移的方法解决复杂的问题，用一个状态转移方程秒杀了 6 道股票买卖问题，现在回头去看，其实也不算那么可怕对吧？

关键就在于列举出所有可能的「状态」，然后想想怎么穷举更新这些「状态」。一般用一个多维 `dp` 数组储存这些状态，从 base case 开始向后推进，推进到最后的状态，就是我们想要的答案。想想这个过程，你是不是有点理解「动态规划」这个名词的意义了呢？

具体到股票买卖问题，我们发现了三个状态，使用了一个三维数组，无非还是穷举 + 更新，不过我们可以说的高大上一点，这叫「三维 DP」，怕不怕？这个大实话一说，立刻显得你高人一等，名利双收有没有，所以给个在看/分享吧，鼓励一下我。

如果你有高质量的问题，可以 点击这里 进入本文的讨论区。

▶ **引用本文的题目**

安装 我的 Chrome 刷题插件 点开下列题目可直接查看解题思路：

LeetCode	力扣
-	剑指 Offer 63. 股票的最大利润

▶ **引用本文的文章**

- 最优子结构原理和 dp 数组遍历方向

- 经典动态规划：0-1 背包问题

——————————————————

更多精品课程可查看 我的网站；扫码查看更多配套学习套件：

团灭 LeetCode 打家劫舍问题

Stars 123k 精品课程 查看 知乎 @labuladong B站 @labuladong

学算法认准 labuladong，致力于把算法讲清楚！网页版 点这里。

读完本文，你不仅学会了算法套路，还可以顺便解决如下题目：

LeetCode	力扣	难度
198. House Robber	198. 打家劫舍	🟠
213. House Robber II	213. 打家劫舍 II	🟠
337. House Robber III	337. 打家劫舍 III	🟠
-	剑指 Offer II 089. 房屋偷盗	🟠
-	剑指 Offer II 090. 环形房屋偷盗	🟠

有读者私下问我 LeetCode 「打家劫舍」系列问题（英文版叫 House Robber）怎么做，我发现这一系列题目的点赞非常之高，是比较有代表性和技巧性的动态规划题目，今天就来聊聊这道题目。

打家劫舍系列总共有三道，难度设计非常合理，层层递进。第一道是比较标准的动态规划问题，而第二道融入了环形数组的条件，第三道更绝，把动态规划的自底向上和自顶向下解法和二叉树结合起来，我认为很有启发性。如果没做过的朋友，建议学习一下。

下面，我们从第一道开始分析。

打家劫舍 I

力扣第 198 题「打家劫舍」的题目如下：

街上有一排房屋，用一个包含非负整数的数组 `nums` 表示，每个元素 `nums[i]` 代表第 `i` 间房子中的现金数额。现在你是一名专业小偷，你希望**尽可能多**的盗窃这些房子中的现金，但是，**相邻的房子不能被同时盗窃**，否则会触发报警器，你就凉凉了。

请你写一个算法，计算在不触动报警器的前提下，最多能够盗窃多少现金呢？函数签名如下：

```
int rob(int[] nums);
```

比如说输入 `nums=[2,1,7,9,3,1]`，算法返回 12，小偷可以盗窃 `nums[0], nums[3], nums[5]` 三个房屋，得到的现金之和为 2 + 9 + 1 = 12，是最优的选择。

题目很容易理解，而且动态规划的特征很明显。我们前文 动态规划详解 做过总结，**解决动态规划问题就是找「状态」和「选择」，仅此而已。**

如果你有高质量的问题，可以 点击这里 进入本文的讨论区。

▶ **引用本文的题目**

安装 我的 Chrome 刷题插件 点开下列题目可直接查看解题思路：

LeetCode	力扣
-	剑指 Offer II 089. 房屋偷盗
-	剑指 Offer II 090. 环形房屋偷盗

本文为网站会员内容，请 点这里 查看。

动态规划之博弈问题

Stars 123k 精品课程 查看 知乎 @labuladong B站 @labuladong

学算法认准 labuladong，致力于把算法讲清楚！网页版 点这里。

读完本文，你不仅学会了算法套路，还可以顺便解决如下题目：

LeetCode	力扣	难度
486. Predict the Winner	486. 预测赢家	🟠
877. Stone Game	877. 石子游戏	🟠

上一篇文章 几道智力题 中讨论到一个有趣的「石头游戏」，通过题目的限制条件，这个游戏是先手必胜的。但是智力题终究是智力题，真正的算法问题肯定不会是投机取巧能搞定的。所以，本文就借石头游戏来讲讲「假设两个人都足够聪明，最后谁会获胜」这一类问题该如何用动态规划算法解决。

博弈类问题的套路都差不多，下文参考 这个 YouTube 视频 的思路讲解，其核心思路是在二维 dp 的基础上使用元组分别存储两个人的博弈结果。掌握了这个技巧以后，别人再问你什么俩海盗分宝石，俩人拿硬币的问题，你就告诉别人：我懒得想，直接给你写个算法算一下得了。

我们把力扣第 877 题「石头游戏」改的更具有一般性：

你和你的朋友面前有一排石头堆，用一个数组 `piles` 表示，`piles[i]` 表示第 `i` 堆石子有多少个。你们轮流拿石头，一次拿一堆，但是只能拿走最左边或者最右边的石头堆。所有石头被拿完后，谁拥有的石头多，谁获胜。

石头的堆数可以是任意正整数，石头的总数也可以是任意正整数，这样就能打破先手必胜的局面了。比如有三堆石头 `piles = [1, 100, 3]`，先手不管拿 1 还是 3，能够决定胜负的 100 都会被后手拿走，后手会获胜。

假设两人都很聪明，请你写一个 `stoneGame` 函数，返回先手和后手的最后得分（石头总数）之差。比如上面那个例子，先手能获得 4 分，后手会获得 100 分，你的算法应该返回 -96。

这样推广之后就变成了一道难度比较高的动态规划问题了，力扣第 486 题「预测赢家」就是一道类似的问题：

▼ 486. 预测赢家 Leetcode | 力扣

给你一个整数数组 `nums` 。玩家 1 和玩家 2 基于这个数组设计了一个游戏。

玩家 1 和玩家 2 轮流进行自己的回合，玩家 1 先手。开始时，两个玩家的初始分值都是 `0` 。每一回合，玩家从数组的任意一端取一个数字（即，`nums[0]` 或 `nums[nums.length - 1]`），取到的数字将会从数组中

移除（数组长度减 1 ）。玩家选中的数字将会加到他的得分上。当数组中没有剩余数字可取时，游戏结束。

如果玩家 1 能成为赢家，返回 true 。如果两个玩家得分相等，同样认为玩家 1 是游戏的赢家，也返回 true 。你可以假设每个玩家的玩法都会使他的分数最大化。

示例 1：

```
输入：nums = [1,5,2]
输出：false
解释：一开始，玩家 1 可以从 1 和 2 中进行选择。
如果他选择 2（或者 1 ），那么玩家 2 可以从 1（或者 2 ）和 5 中进行选择。如果玩家 2 选择了 5 ，那么玩家 1 则只剩下 1（或者 2 ）可选。
所以，玩家 1 的最终分数为 1 + 2 = 3，而玩家 2 为 5 。
因此，玩家 1 永远不会成为赢家，返回 false 。
```

示例 2：

```
输入：nums = [1,5,233,7]
输出：true
解释：玩家 1 一开始选择 1 。然后玩家 2 必须从 5 和 7 中进行选择。无论玩家 2 选择了哪个，玩家 1 都可以选择 233 。
最终，玩家 1（234 分）比玩家 2（12 分）获得更多的分数，所以返回 true，表示玩家 1 可以成为赢家。
```

提示：

- $1 <= nums.length <= 20$
- $0 <= nums[i] <= 10^7$

函数签名如下：

```
boolean PredictTheWinner(int[] nums);
```

那么如果有了一个计算先手和后手分差的 stoneGame 函数，这道题的解法就直接出来了：

```
public boolean PredictTheWinner(int[] nums) {
    // 先手的分数大于等于后手，则能赢
    return stoneGame(nums) >= 0;
}
```

这个 stoneGame 函数怎么写呢？博弈问题的难点在于，两个人要轮流进行选择，而且都贼精明，应该如何编程表示这个过程呢？其实不难，还是按照 动态规划核心框架 中强调多次的套路，首先明确 dp 数组的含义，然后只要找到「状态」和「选择」，一切就水到渠成了。

一、定义 dp 数组的含义

定义 dp 数组的含义是很有技术含量的，同一问题可能有多种定义方法，不同的定义会引出不同的状态转移方程，不过只要逻辑没有问题，最终都能得到相同的答案。

我建议不要迷恋那些看起来很牛逼，代码很短小的解法思路，最好是稳一点，采取可解释性最好，最容易推广的解法思路。本文就给出一种博弈问题的通用设计框架。

介绍 dp 数组的含义之前，我们先看一下 dp 数组最终的样子：

piles = [2, 8, 3, 5]

start \ end	0	1	2	3
0	(2, 0)	(8, 2)	(5, 8)	(13, 5)
1		(8, 0)	(8, 3)	(11, 5)
2			(3, 0)	(5, 3)
3				(5, 0)

下文讲解时，认为元组是包含 `first` 和 `second` 属性的一个类，而且为了节省篇幅，将这两个属性简写为 `fir` 和 `sec`。比如按上图的数据，我们说 `dp[1][3].fir = 11`，`dp[0][1].sec = 2`。

先回答几个读者可能提出的问题：

这个二维 dp table 中存储的是元组，怎么编程表示呢？这个 dp table 有一半根本没用上，怎么优化？很简单，都不要管，先把解题的思路想明白了再谈也不迟。

以下是对 dp 数组含义的解释：

`dp[i][j].fir = x` 表示，对于 `piles[i...j]` 这部分石头堆，先手能获得的最高分数为 `x`。

`dp[i][j].sec = y` 表示，对于 `piles[i...j]` 这部分石头堆，后手能获得的最高分数为 `y`。

举例理解一下，假设 `piles = [2, 8, 3, 5]`，索引从 0 开始，那么：

`dp[0][1].fir = 8` 意味着：面对石头堆 `[2, 8]`，先手最多能够获得 8 分；`dp[1][3].sec = 5` 意味着：面对石头堆 `[8, 3, 5]`，后手最多能够获得 5 分。

我们想求的答案是先手和后手最终分数之差，按照这个定义也就是 `dp[0][n-1].fir - dp[0][n-1].sec`，即面对整个 `piles`，先手的最优得分和后手的最优得分之差。

二、状态转移方程

写状态转移方程很简单，首先要找到所有「状态」和每个状态可以做的「选择」，然后择优。

根据前面对 dp 数组的定义，**状态显然有三个：开始的索引 i，结束的索引 j，当前轮到的人。**

```
dp[i][j][fir or sec]
其中:
0 <= i < piles.length
i <= j < piles.length
```

对于这个问题的每个状态，可以做的**选择有两个：选择最左边的那堆石头，或者选择最右边的那堆石头。** 我们可以这样穷举所有状态：

```
n = piles.length
for 0 <= i < n:
    for j <= i < n:
        for who in {fir, sec}:
            dp[i][j][who] = max(left, right)
```

上面的伪码是动态规划的一个大致的框架，这道题的难点在于，两人足够聪明，而且是交替进行选择的，也就是说先手的选择会对后手有影响，这怎么表达出来呢？

根据我们对 dp 数组的定义，很容易解决这个难点，**写出状态转移方程：**

```
dp[i][j].fir = max(piles[i] + dp[i+1][j].sec, piles[j] + dp[i][j-1].sec)
dp[i][j].fir = max(     选择最左边的石头堆     ,     选择最右边的石头堆      )
# 解释：我作为先手，面对 piles[i...j] 时，有两种选择：

# 要么我选择最左边的那一堆石头 piles[i]，局面变成了 piles[i+1...j]，
# 然后轮到对方选了，我变成了后手，此时我作为后手的最优得分是 dp[i+1][j].sec

# 要么我选择最右边的那一堆石头 piles[j]，局面变成了 piles[i...j-1]
# 然后轮到对方选了，我变成了后手，此时我作为后手的最优得分是 dp[i][j-1].sec

if 先手选择左边:
    dp[i][j].sec = dp[i+1][j].fir
if 先手选择右边:
    dp[i][j].sec = dp[i][j-1].fir
# 解释：我作为后手，要等先手先选择，有两种情况：

# 如果先手选择了最左边那堆，给我剩下了 piles[i+1...j]
# 此时轮到我，我变成了先手，此时的最优得分是 dp[i+1][j].fir

# 如果先手选择了最右边那堆，给我剩下了 piles[i...j-1]
# 此时轮到我，我变成了先手，此时的最优得分是 dp[i][j-1].fir
```

根据 dp 数组的定义，我们也可以找出 **base case**，也就是最简单的情况：

```
dp[i][j].fir = piles[i]
dp[i][j].sec = 0
其中 0 <= i == j < n
# 解释：i 和 j 相等就是说面前只有一堆石头 piles[i]
# 那么显然先手的得分为 piles[i]
# 后手没有石头拿了，得分为 0
```

piles = [2, 8, 3, 5]

start \ end	0	1	2	3
0	(2, 0)			
1		(8, 0)		
2			(3, 0)	
3				(5, 0)

这里需要注意一点，我们发现 base case 是斜着的，而且我们推算 `dp[i][j]` 时需要用到 `dp[i+1][j]` 和 `dp[i][j-1]`：

piles = [2, 8, 3, 5]

start \ end	0	1	2	3
0	(2, 0)			
1		(8, 0)	(8, 3) →	(11, 5)
2			(3, 0)	(5, 3)
3				(5, 0)

根据前文 动态规划答疑篇 判断 dp 数组遍历方向的原则，算法应该倒着遍历 dp 数组：

```
for (int i = n - 2; i >= 0; i--) {
    for (int j = i + 1; j < n; j++) {
        dp[i][j] = ...
    }
}
```

piles = [2, 8, 3, 5]

start \ end	0	1	2	3
0	(2, 0)	(8, 2)	(5, 8)	(13, 5)
1		(8, 0)	(8, 3)	(11, 5)
2			(3, 0)	(5, 3)
3				(5, 0)

三、代码实现

如何实现这个 fir 和 sec 元组呢，你可以用 python，自带元组类型；或者使用 C++ 的 pair 容器；或者用一个三维数组 `dp[n][n][2]`，最后一个维度就相当于元组；或者我们自己写一个 Pair 类：

```
class Pair {
    int fir, sec;
    Pair(int fir, int sec) {
        this.fir = fir;
        this.sec = sec;
    }
}
```

然后直接把我们的状态转移方程翻译成代码即可，注意我们要倒着遍历数组：

```
/* 返回游戏最后先手和后手的得分之差 */
int stoneGame(int[] piles) {
    int n = piles.length;
    // 初始化 dp 数组
    Pair[][] dp = new Pair[n][n];
    for (int i = 0; i < n; i++)
        for (int j = i; j < n; j++)
            dp[i][j] = new Pair(0, 0);
    // 填入 base case
    for (int i = 0; i < n; i++) {
        dp[i][i].fir = piles[i];
        dp[i][i].sec = 0;
    }

    // 倒着遍历数组
    for (int i = n - 2; i >= 0; i--) {
        for (int j = i + 1; j < n; j++) {
            // 先手选择最左边或最右边的分数
            int left = piles[i] + dp[i+1][j].sec;
            int right = piles[j] + dp[i][j-1].sec;
            // 套用状态转移方程
            // 先手肯定会选择更大的结果，后手的选择随之改变
            if (left > right) {
                dp[i][j].fir = left;
                dp[i][j].sec = dp[i+1][j].fir;
            } else {
                dp[i][j].fir = right;
                dp[i][j].sec = dp[i][j-1].fir;
            }
        }
    }
    Pair res = dp[0][n-1];
    return res.fir - res.sec;
}
```

动态规划解法，如果没有状态转移方程指导，绝对是一头雾水，但是根据前面的详细解释，读者应该可以清晰理解这一大段代码的含义。

而且，注意到计算 `dp[i][j]` 只依赖其左边和下边的元素，所以说肯定有优化空间，转换成一维 dp，想象一下把二维平面压扁，也就是投影到一维。但是，一维 `dp` 比较复杂，可解释性比较差，大家就不必浪费这个时间去理解了。

四、最后总结

本文给出了解决博弈问题的动态规划解法。博弈问题的前提一般都是在两个聪明人之间进行，编程描述这种游戏的一般方法是二维 dp 数组，数组中通过元组分别表示两人的最优决策。

之所以这样设计，是因为先手在做出选择之后，就成了后手，后手在对方做完选择后，就变成了先手。**这种角色转换使得我们可以重用之前的结果，典型的动态规划标志。**

读到这里的朋友应该能理解算法解决博弈问题的套路了。学习算法，一定要注重算法的模板框架，而不是一些看起来牛逼的思路，也不要奢求上来就写一个最优的解法。不要舍不得多用空间，不要过早尝试优化，不要惧怕多维数组。`dp` 数组就是存储信息避免重复计算的，随便用，直到咱满意为止。

如果你有高质量的问题，可以 点击这里 进入本文的讨论区。

▶ **引用本文的文章**

- 贪心算法之区间调度问题

———————————————

更多精品课程可查看 我的网站；扫码查看更多配套学习套件：

动态规划之最小路径和

Stars 123k 精品课程 查看 知乎 @labuladong B站 @labuladong

微信搜一搜 labuladong公众号

学算法认准 labuladong，致力于把算法讲清楚！网页版 点这里。

读完本文，你不仅学会了算法套路，还可以顺便解决如下题目：

LeetCode	力扣	难度
64. Minimum Path Sum	64. 最小路径和	🟠
-	剑指 Offer II 099. 最小路径之和	🟠

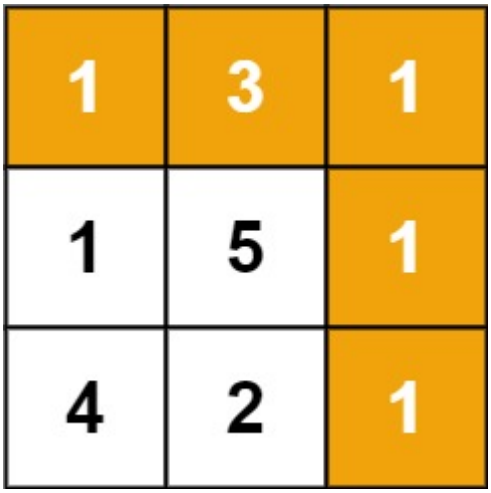
今天聊一道经典的动态规划题目，它是力扣第 64 题「最小路径和」，我来简单描述一下题目：

现在给你输入一个二维数组 `grid`，其中的元素都是**非负整数**，现在你站在左上角，**只能向右或者向下移动**，需要到达右下角。现在请你计算，经过的路径和最小是多少？

函数签名如下：

```
int minPathSum(int[][] grid);
```

比如题目举的例子，输入如下的 `grid` 数组：

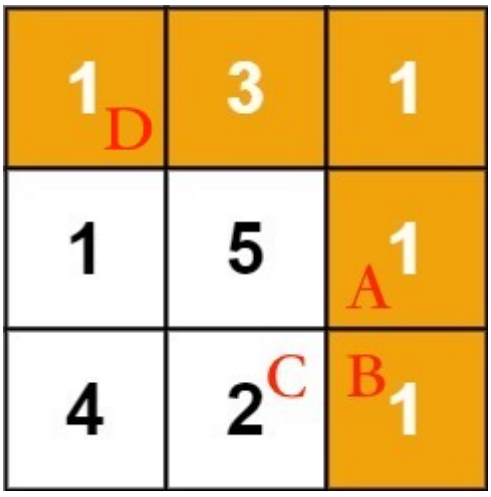


算法应该返回 7，最小路径和为 7，就是上图黄色的路径。

其实这道题难度不算大，但我们刷题群里很多朋友讨论，而且这个问题还有一些难度比较大的变体，所以讲一下这种问题的通用思路。

一般来说，让你在二维矩阵中求最优化问题（最大值或者最小值），肯定需要递归 + 备忘录，也就是动态规划技巧。

就拿题目举的例子来说，我给图中的几个格子编个号方便描述：



我们想计算从起点 D 到达 B 的最小路径和，那你说怎么才能到达 B 呢？

题目说了只能向右或者向下走，所以只有从 A 或者 C 走到 B。

那么算法怎么知道从 A 走到 B 才能使路径和最小，而不是从 C 走到 B 呢？

难道是因为位置 A 的元素大小是 1，位置 C 的元素是 2，1 小于 2，所以一定要从 A 走到 B 才能使路径和最小吗？

其实不是的，**真正的原因是，从 D 走到 A 的最小路径和是 6，而从 D 走到 C 的最小路径和是 8，6 小于 8，所以一定要从 A 走到 B 才能使路径和最小**。

换句话说，我们把「从 D 走到 B 的最小路径和」这个问题转化成了「从 D 走到 A 的最小路径和」和 「从 D 走到 C 的最小路径和」这两个问题。

理解了上面的分析，这不就是状态转移方程吗？所以这个问题肯定会用到动态规划技巧来解决。

比如我们定义如下一个 dp 函数：

```
int dp(int[][] grid, int i, int j);
```

这个 dp 函数的定义如下：

从左上角位置 (0, 0) 走到位置 (i, j) 的最小路径和为 dp(grid, i, j)。

根据这个定义，我们想求的最小路径和就可以通过调用这个 dp 函数计算出来：

```
int minPathSum(int[][] grid) {
    int m = grid.length;
    int n = grid[0].length;
    // 计算从左上角走到右下角的最小路径和
```

```
        return dp(grid, m - 1, n - 1);
    }
```

再根据刚才的分析，很容易发现，`dp(grid, i, j)` 的值取决于 `dp(grid, i - 1, j)` 和 `dp(grid, i, j - 1)` 返回的值。

我们可以直接写代码了：

```
int dp(int[][] grid, int i, int j) {
    // base case
    if (i == 0 && j == 0) {
        return grid[0][0];
    }
    // 如果索引出界，返回一个很大的值，
    // 保证在取 min 的时候不会被取到
    if (i < 0 || j < 0) {
        return Integer.MAX_VALUE;
    }

    // 左边和上面的最小路径和加上 grid[i][j]
    // 就是到达 (i, j) 的最小路径和
    return Math.min(
            dp(grid, i - 1, j),
            dp(grid, i, j - 1)
        ) + grid[i][j];
}
```

上述代码逻辑已经完整了，接下来就分析一下，这个递归算法是否存在重叠子问题？是否需要用备忘录优化一下执行效率？

前文多次说过判断重叠子问题的技巧，首先抽象出上述代码的递归框架：

```
int dp(int i, int j) {
    dp(i - 1, j); // #1
    dp(i, j - 1); // #2
}
```

如果我想从 `dp(i, j)` 递归到 `dp(i-1, j-1)`，有几种不同的递归调用路径？

可以是 `dp(i, j) -> #1 -> #2` 或者 `dp(i, j) -> #2 -> #1`，不止一种，说明 `dp(i-1, j-1)` 会被多次计算，所以一定存在重叠子问题。

那么我们可以使用备忘录技巧进行优化：

```
class Solution {
    // 备忘录
    int[][] memo;
```

```
    int minPathSum(int[][] grid) {
        int m = grid.length;
        int n = grid[0].length;
        // 构造备忘录，初始值全部设为 -1
        memo = new int[m][n];
        for (int[] row : memo)
            Arrays.fill(row, -1);

        return dp(grid, m - 1, n - 1);
    }

    int dp(int[][] grid, int i, int j) {
        // base case
        if (i == 0 && j == 0) {
            return grid[0][0];
        }
        if (i < 0 || j < 0) {
            return Integer.MAX_VALUE;
        }
        // 避免重复计算
        if (memo[i][j] != -1) {
            return memo[i][j];
        }
        // 将计算结果记入备忘录
        memo[i][j] = Math.min(
            dp(grid, i - 1, j),
            dp(grid, i, j - 1)
        ) + grid[i][j];

        return memo[i][j];
    }
}
```

▶ 👾 代码可视化动画👾

至此，本题就算是解决了，时间复杂度和空间复杂度都是 O(MN)，标准的自顶向下动态规划解法。

有的读者可能问，能不能用自底向上的迭代解法来做这道题呢？完全可以的。

首先，类似刚才的 dp 函数，我们需要一个二维 dp 数组，定义如下：

从左上角位置 (0, 0) 走到位置 (i, j) 的最小路径和为 dp[i][j]。

状态转移方程当然不会变的，dp[i][j] 依然取决于 dp[i-1][j] 和 dp[i][j-1]，直接看代码吧：

```
int minPathSum(int[][] grid) {
    int m = grid.length;
    int n = grid[0].length;
    int[][] dp = new int[m][n];
```

```
    /**** base case ****/
    dp[0][0] = grid[0][0];

    for (int i = 1; i < m; i++)
        dp[i][0] = dp[i - 1][0] + grid[i][0];

    for (int j = 1; j < n; j++)
        dp[0][j] = dp[0][j - 1] + grid[0][j];
    /********************/

    // 状态转移
    for (int i = 1; i < m; i++) {
        for (int j = 1; j < n; j++) {
            dp[i][j] = Math.min(
                dp[i - 1][j],
                dp[i][j - 1]
            ) + grid[i][j];
        }
    }

    return dp[m - 1][n - 1];
}
```

这个解法的 base case 看起来和递归解法略有不同，但实际上是一样的。

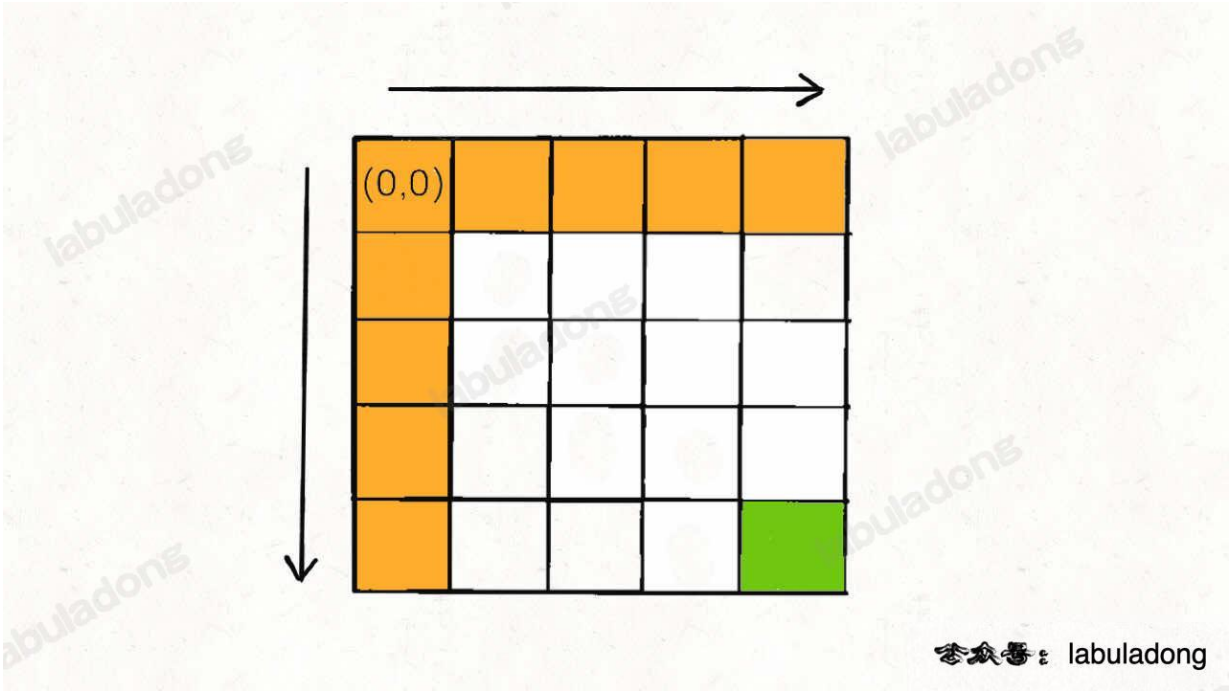
因为状态转移为下面这段代码：

```
dp[i][j] = Math.min(
    dp[i - 1][j],
    dp[i][j - 1]
) + grid[i][j];
```

那如果 `i` 或者 `j` 等于 0 的时候，就会出现索引越界的错误。

所以我们需要提前计算出 `dp[0][..]` 和 `dp[..][0]`，然后让 `i` 和 `j` 的值从 1 开始迭代。

`dp[0][..]` 和 `dp[..][0]` 的值怎么算呢？其实很简单，第一行和第一列的路径和只有下面这一种情况嘛：



那么按照 dp 数组的定义，dp[i][0] = sum(grid[0..i][0]), dp[0][j] = sum(grid[0][0..j])，也就是如下代码：

```
/**** base case ****/
dp[0][0] = grid[0][0];

for (int i = 1; i < m; i++)
    dp[i][0] = dp[i - 1][0] + grid[i][0];

for (int j = 1; j < n; j++)
    dp[0][j] = dp[0][j - 1] + grid[0][j];
/********************/
```

到这里，自底向上的迭代解法也搞定了，那有的读者可能又要问了，能不能优化一下算法的空间复杂度呢？

前文 动态规划的降维打击：空间压缩 说过降低 dp 数组的技巧，这里也是适用的，不过略微复杂些，本文由于篇幅所限就不写了，有兴趣的读者可以自己尝试一下。

本文到此结束，下篇文章写一道进阶题目，更加巧妙和有趣，敬请期待~

如果你有高质量的问题，可以 点击这里 进入本文的讨论区。

▶ 引用本文的题目

安装 我的 Chrome 刷题插件 点开下列题目可直接查看解题思路：

LeetCode	力扣
-	剑指 Offer 47. 礼物的最大价值
-	剑指 Offer II 099. 最小路径之和

▶ 引用本文的文章

- base case 和备忘录的初始值怎么定?
- 动态规划帮我通关了《魔塔》
- 最优子结构原理和 dp 数组遍历方向

——————————————

更多精品课程可查看 我的网站；扫码查看更多配套学习套件：

经典动态规划：高楼扔鸡蛋

Stars 123k 精品课程 查看 知乎 @labuladong B站 @labuladong

学算法认准 labuladong，致力于把算法讲清楚！网页版 点这里。

读完本文，你不仅学会了算法套路，还可以顺便解决如下题目：

LeetCode	力扣	难度
887. Super Egg Drop	887. 鸡蛋掉落	🔴

本文要聊一个很经典的算法问题，若干层楼，若干个鸡蛋，让你算出最少的尝试次数，找到鸡蛋恰好摔不碎的那层楼。国内大厂以及谷歌脸书面试都经常考察这道题，只不过他们觉得扔鸡蛋太浪费，改成扔杯子，扔破碗什么的。

具体的问题等会再说，但是这道题的解法技巧很多，光动态规划就好几种效率不同的思路，最后还有一种极其高效数学解法。秉承本书一贯的作风，拒绝过于诡异的技巧，因为这些技巧无法举一反三，学了也不划算。

下面就来用我们一直强调的动态规划通用思路来研究一下这道题。

一、解析题目

这是力扣第 887 题「鸡蛋掉落」，我描述一下题目：

你面前有一栋从 1 到 `N` 共 `N` 层的楼，然后给你 `K` 个鸡蛋（`K` 至少为 1）。现在确定这栋楼存在楼层 `0 <= F <= N`，在这层楼将鸡蛋扔下去，鸡蛋**恰好没摔碎**（高于 `F` 的楼层都会碎，低于 `F` 的楼层都不会碎，如果鸡蛋没有碎，可以捡回来继续扔）。现在问你，**最坏**情况下，你**至少**要扔几次鸡蛋，才能**确定**这个楼层 `F` 呢？

也就是让你找摔不碎鸡蛋的最高楼层 `F`，但什么叫「最坏情况」下「至少」要扔几次呢？我们分别举个例子就明白了。

比方说**现在先不管鸡蛋个数的限制**，有 7 层楼，你怎么去找鸡蛋恰好摔碎的那层楼？

最原始的方式就是线性扫描：我先在 1 楼扔一下，没碎，我再去 2 楼扔一下，没碎，我再去 3 楼……

以这种策略，**最坏**情况应该就是我试到第 7 层鸡蛋也没碎（`F = 7`），也就是我扔了 7 次鸡蛋。

先在你应该理解什么叫做「最坏情况」下了，**鸡蛋破碎一定发生在搜索区间穷尽时**，不会说你在第 1 层摔一下鸡蛋就碎了，这是你运气好，不是最坏情况。

现在再来理解一下什么叫「至少」要扔几次。依然不考虑鸡蛋个数限制，同样是 7 层楼，我们可以优化策略。

最好的策略是使用二分查找思路，我先去第 `(1 + 7) / 2 = 4` 层扔一下：

如果碎了说明 `F` 小于 4，我就去第 `(1 + 3) / 2 = 2` 层试……

如果没碎说明 `F` 大于等于 4，我就去第 `(5 + 7) / 2 = 6` 层试……

以这种策略，**最坏**情况应该是试到第 7 层鸡蛋还没碎（`F = 7`），或者鸡蛋一直碎到第 1 层（`F = 0`）。然而无论那种最坏情况，只需要试 `log7` 向上取整等于 3 次，比刚才尝试 7 次要少，这就是所谓的**至少**要扔几次。

实际上，如果不限制鸡蛋个数的话，二分思路显然可以得到最少尝试的次数，但问题是，**现在给你了鸡蛋个数的限制 `K`，直接使用二分思路就不行了**。

比如说只给你 1 个鸡蛋，7 层楼，你敢用二分吗？你直接去第 4 层扔一下，如果鸡蛋没碎还好，你可以把鸡蛋捡起来再去更高的楼层尝试；但如果碎了，你就没有鸡蛋继续测试了，无法确定鸡蛋恰好摔不碎的楼层 `F` 了。

其实这种情况下只能用线性扫描的方法，从下网上一层层尝试扔鸡蛋，那么最坏情况下需要扔 7 次，算法返回结果应该是 7。

有的读者也许会有这种想法：二分查找排除楼层的速度无疑是最快的，那干脆先用二分查找，等到只剩 1 个鸡蛋的时候再执行线性扫描，这样得到的结果是不是就是最少的扔鸡蛋次数呢？

很遗憾，并不是，比如说把楼层变高一些，100 层，给你 2 个鸡蛋，你在 50 层扔一下，碎了，那就只能线性扫描 1～49 层了，最坏情况下要扔 50 次。

如果不要「二分」，变成「五分」「十分」都会大幅减少最坏情况下的尝试次数。比方说第一个鸡蛋每隔十层楼扔，在哪里碎了第二个鸡蛋一个个线性扫描，总共不会超过 20 次。最优解其实是 14 次。最优策略非常多，而且并没有什么规律可言。

说了这么多废话，就是确保大家理解了题目的意思，而且认识到这个题目确实复杂，就连我们手算都不容易，如何用算法解决呢？

如果你有高质量的问题，可以 点击这里 进入本文的讨论区。

▶ **引用本文的文章**

- 动态规划穷举的两种视角
- 实际二分搜索时的思维框架
- 最优子结构原理和 dp 数组遍历方向
- 经典动态规划：戳气球

———————————————

本文为网站会员内容，请 点这里 查看。

动态规划帮我通关了《魔塔》

Stars 123k 精品课程 查看 知乎 @labuladong B站 @labuladong

微信搜一搜 labuladong公众号

学算法认准 labuladong，致力于把算法讲清楚！网页版 点这里。

读完本文，你不仅学会了算法套路，还可以顺便解决如下题目：

LeetCode	力扣	难度
174. Dungeon Game	174. 地下城游戏	🔴

「魔塔」是一款经典的地牢类游戏，碰怪物要掉血，吃血瓶能加血，你要收集钥匙，一层一层上楼，最后救出美丽的公主。

现在手机上仍然可以玩这个游戏：

嗯，相信这款游戏承包了不少人的童年回忆，记得小时候，一个人拿着游戏机玩，两三个人围在左右指手画脚，这导致玩游戏的人体验极差，而左右的人异常快乐 😂

力扣第 174 题「地下城游戏」是一道类似的题目，我简单描述一下：

输入一个存储着整数的二维数组 `grid`，如果 `grid[i][j] > 0`，说明这个格子装着血瓶，经过它可以增加对应的生命值；如果 `grid[i][j] == 0`，则这是一个空格子，经过它不会发生任何事情；如果 `grid[i][j] < 0`，说明这个格子有怪物，经过它会损失对应的生命值。

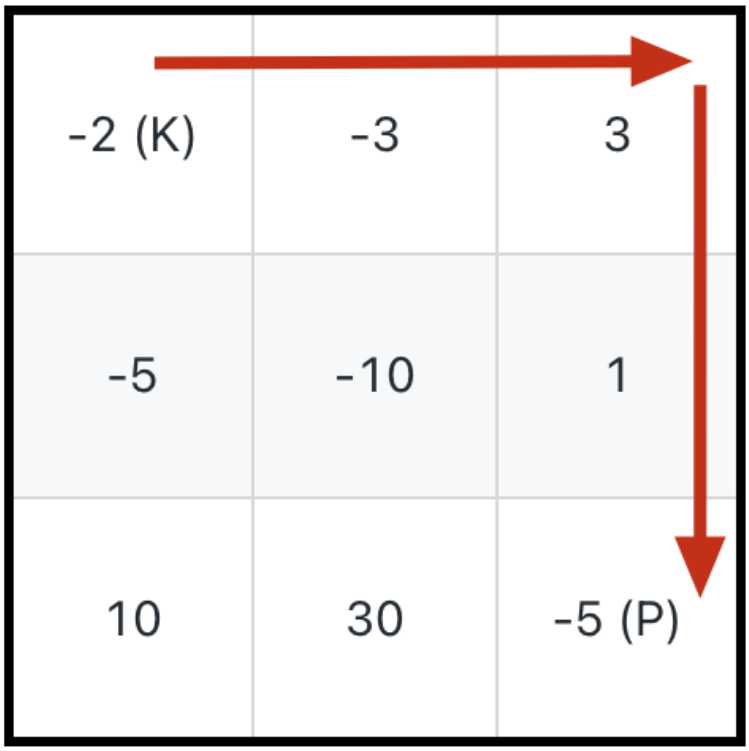
现在你是一名骑士，将会出现在最左上角，公主被困在最右下角，你只能向右和向下移动，请问你初始至少需要多少生命值才能成功救出公主？

换句话说，就是问你至少需要多少初始生命值，能够让骑士从最左上角移动到最右下角，且任何时候生命值都要大于 0。

函数签名如下：

```
int calculateMinimumHP(int[][] grid);
```

比如题目给我们举的例子，输入如下一个二维数组 `grid`，用 `K` 表示骑士，用 `P` 表示公主：



算法应该返回 7，也就是说骑士的初始生命值**至少**为 7 时才能成功救出公主，行进路线如图中的箭头所示。

上篇文章 最小路径和 写过类似的问题，问你从左上角到右下角的最小路径和是多少。

我们做算法题一定要尝试举一反三，感觉今天这道题和最小路径和有点关系对吧？

想要最小化骑士的初始生命值，是不是意味着要最大化骑士行进路线上的血瓶？是不是相当于求「最大路径和」？是不是可以直接套用计算「最小路径和」的思路？

但是稍加思考，发现这个推论并不成立，吃到最多的血瓶，并不一定就能获得最小的初始生命值。

比如如下这种情况，如果想要吃到最多的血瓶获得「最大路径和」，应该按照下图箭头所示的路径，初始生命值需要 11：

但也很容易看到，正确的答案应该是下图箭头所示的路径，初始生命值只需要 1：

所以，关键不在于吃最多的血瓶，而是在于如何损失最少的生命值。

这类求最值的问题，肯定要借助动态规划技巧，要合理设计 dp 数组/函数的定义。类比前文 最小路径和问题，dp 函数签名肯定长这样：

```
int dp(int[][] grid, int i, int j);
```

但是这道题对 dp 函数的定义比较有意思，按照常理，这个 dp 函数的定义应该是：

从左上角（grid[0][0]）走到 grid[i][j] 至少需要 dp(grid, i, j) 的生命值。

这样定义的话，base case 就是 i, j 都等于 0 的时候，我们可以这样写代码：

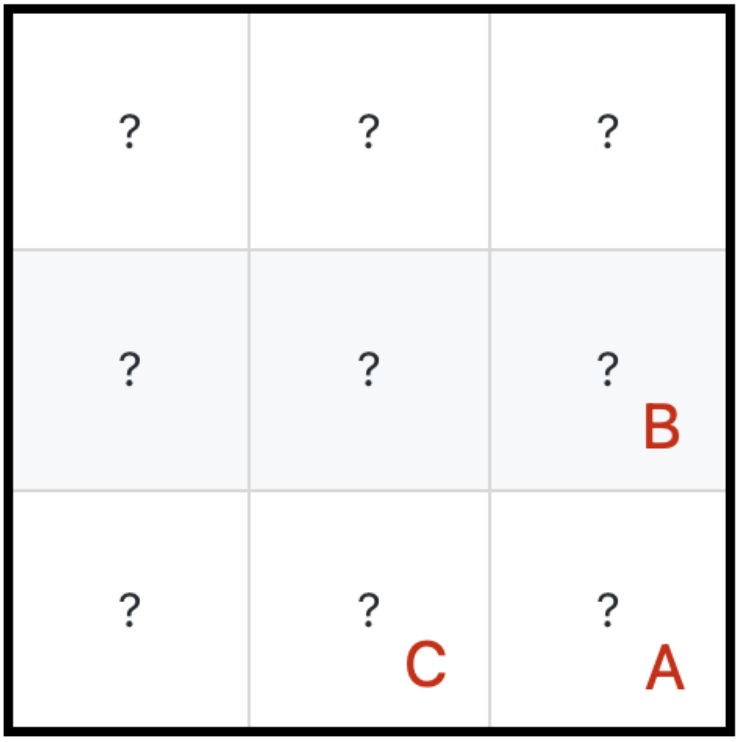
```
int calculateMinimumHP(int[][] grid) {
    int m = grid.length;
    int n = grid[0].length;
    // 我们想计算左上角到右下角所需的最小生命值
    return dp(grid, m - 1, n - 1);
}

int dp(int[][] grid, int i, int j) {
    // base case
    if (i == 0 && j == 0) {
        // 保证骑士落地不死就行了
        return gird[i][j] > 0 ? 1 : -grid[i][j] + 1;
    }
    ...
}
```

> **为了简洁，之后 dp(grid, i, j) 就简写为 dp(i, j)，大家理解就好。**

接下来我们需要找状态转移了，还记得如何找状态转移方程吗？我们这样定义 dp 函数能否正确进行状态转移呢？

我们希望 dp(i, j) 能够通过 dp(i-1, j) 和 dp(i, j-1) 推导出来，这样就能不断逼近 base case，也就能够正确进行状态转移。

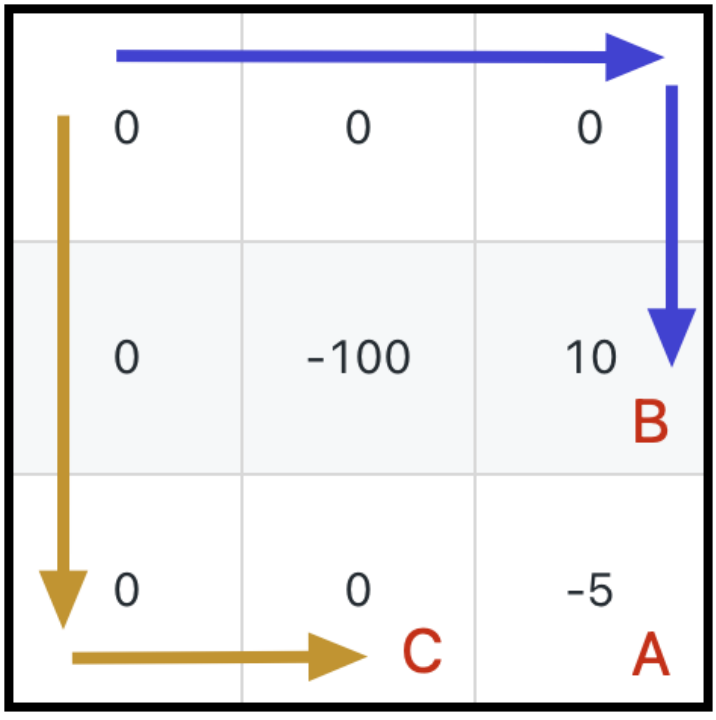
具体来说，「到达 A 的最小生命值」应该能够由「到达 B 的最小生命值」和「到达 C 的最小生命值」推导出来：



但问题是，能推出来么？实际上是不能的。

因为按照 dp 函数的定义，你只知道「能够从左上角到达 B 的最小生命值」，但并不知道「到达 B 时的生命值」。

「到达 B 时的生命值」是进行状态转移的必要参考，我给你举个例子你就明白了，假设下图这种情况：



你说这种情况下，骑士救公主的最优路线是什么？

显然是按照图中蓝色的线走到 B，最后走到 A 对吧，这样初始血量只需要 1 就可以；如果走黄色箭头这条路，先走到 C 然后走到 A，初始血量至少需要 6。

为什么会这样呢？骑士走到 B 和 C 的最少初始血量都是 1，为什么最后是从 B 走到 A，而不是从 C 走到 A 呢？

因为骑士走到 B 的时候生命值为 11，而走到 C 的时候生命值依然是 1。

如果骑士执意要通过 C 走到 A，那么初始血量必须加到 6 点才行；而如果通过 B 走到 A，初始血量为 1 就够了，因为路上吃到血瓶了，生命值足够抗 A 上面怪物的伤害。

这下应该说的很清楚了，再回顾我们对 dp 函数的定义，上图的情况，算法只知道 `dp(1, 2) = dp(2, 1) = 1`，都是一样的，怎么做出正确的决策，计算出 `dp(2, 2)` 呢？

所以说，我们之前对 dp 数组的定义是错误的，信息量不足，算法无法做出正确的状态转移。

正确的做法需要反向思考，依然是如下的 dp 函数：

```
int dp(int[][] grid, int i, int j);
```

但是我们要修改 dp 函数的定义：

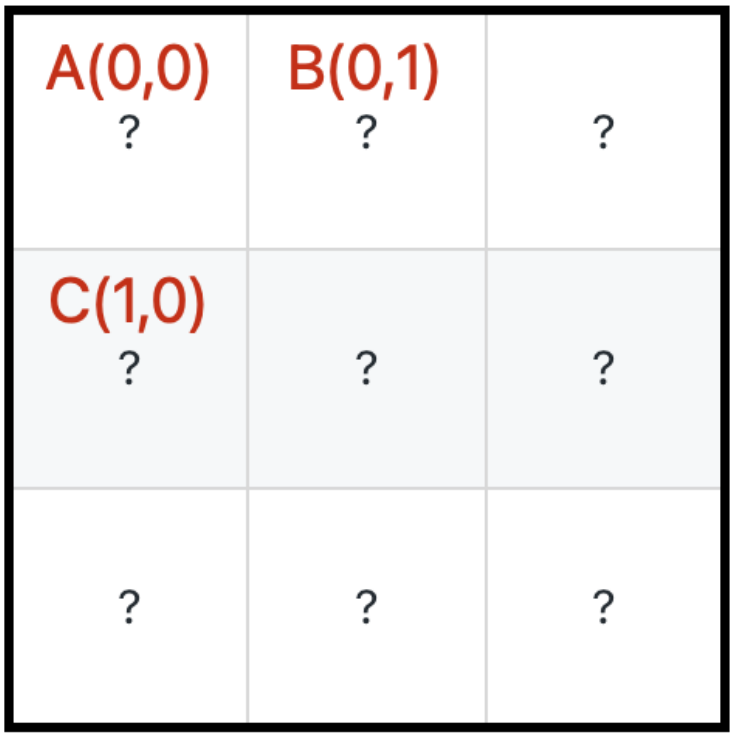
从 `grid[i][j]` 到达终点（右下角）所需的最少生命值是 `dp(grid, i, j)`。

那么可以这样写代码：

```
int calculateMinimumHP(int[][] grid) {
    // 我们想计算左上角到右下角所需的最小生命值
    return dp(grid, 0, 0);
}

int dp(int[][] grid, int i, int j) {
    int m = grid.length;
    int n = grid[0].length;
    // base case
    if (i == m - 1 && j == n - 1) {
        return grid[i][j] >= 0 ? 1 : -grid[i][j] + 1;
    }
    ...
}
```

根据新的 dp 函数定义和 base case，我们想求 `dp(0, 0)`，那就应该试图通过 `dp(i, j+1)` 和 `dp(i+1, j)` 推导出 `dp(i, j)`，这样才能不断逼近 base case，正确进行状态转移。

具体来说，「从 A 到达右下角的最少生命值」应该由「从 B 到达右下角的最少生命值」和「从 C 到达右下角的最少生命值」推导出来：



能不能推导出来呢？这次是可以的，假设 `dp(0, 1) = 5, dp(1, 0) = 4`，那么可以肯定要从 A 走向 C，因为 4 小于 5 嘛。

那么怎么推出 `dp(0, 0)` 是多少呢？

假设 A 的值为 1，既然知道下一步要往 C 走，且 `dp(1, 0) = 4` 意味着走到 `grid[1][0]` 的时候至少要有 4 点生命值，那么就可以确定骑士出现在 A 点时需要 4 - 1 = 3 点初始生命值，对吧。

那如果 A 的值为 10，落地就能捡到一个大血瓶，超出了后续需求，4 - 10 = -6 意味着骑士的初始生命值为负数，这显然不可以，骑士的生命值小于 1 就挂了，所以这种情况下骑士的初始生命值应该是 1。

综上，状态转移方程已经推出来了：

```
int res = min(
    dp(i + 1, j),
    dp(i, j + 1)
) - grid[i][j];

dp(i, j) = res <= 0 ? 1 : res;
```

根据这个核心逻辑，加一个备忘录消除重叠子问题，就可以直接写出最终的代码了：

```
class Solution {
    /* 主函数 */
    public int calculateMinimumHP(int[][] grid) {
        int m = grid.length;
        int n = grid[0].length;
        // 备忘录中都初始化为 -1
```

```
        memo = new int[m][n];
        for (int[] row : memo) {
            Arrays.fill(row, -1);
        }

        return dp(grid, 0, 0);
    }

    // 备忘录，消除重叠子问题
    int[][] memo;

    /* 定义：从 (i, j) 到达右下角，需要的初始血量至少是多少 */
    int dp(int[][] grid, int i, int j) {
        int m = grid.length;
        int n = grid[0].length;
        // base case
        if (i == m - 1 && j == n - 1) {
            return grid[i][j] >= 0 ? 1 : -grid[i][j] + 1;
        }
        if (i == m || j == n) {
            return Integer.MAX_VALUE;
        }
        // 避免重复计算
        if (memo[i][j] != -1) {
            return memo[i][j];
        }
        // 状态转移逻辑
        int res = Math.min(
                dp(grid, i, j + 1),
                dp(grid, i + 1, j)
            ) - grid[i][j];
        // 骑士的生命值至少为 1
        memo[i][j] = res <= 0 ? 1 : res;

        return memo[i][j];
    }
}
```

▶ 🎃 代码可视化动画🎃

这就是自顶向下带备忘录的动态规划解法，参考前文 动态规划套路详解 很容易就可以改写成 dp 数组的迭代解法，这里就不写了，读者可以尝试自己写一写。

这道题的核心是定义 dp 函数，找到正确的状态转移方程，从而计算出正确的答案。

如果你有高质量的问题，可以 点击这里 进入本文的讨论区。

▶ 引用本文的文章

- base case 和备忘录的初始值怎么定?

更多精品课程可查看 我的网站；扫码查看更多配套学习套件：

动态规划帮我通关了《辐射4》

Stars 123k 精品课程 查看 知乎 @labuladong B站 @labuladong

微信搜一搜 labuladong公众号

学算法认准 labuladong，致力于把算法讲清楚！网页版 点这里。

读完本文，你不仅学会了算法套路，还可以顺便解决如下题目：

LeetCode	力扣	难度
514. Freedom Trail	514. 自由之路	🔴

本文的封面图是一款叫做《辐射4》的游戏中的一个任务剧情画面：

这个可以转动的圆盘类似是一个密码机关，中间偏上的位置有个红色的指针看到没，你只要转动圆盘可以让指针指向不同的字母，然后再按下中间的按钮就可以输入指针指向的字母。

只要转动圆环，让指针依次指向 R、A、I、L、R、O、A、D 并依次按下按钮，就可以触发机关，打开旁边的门。

至于密码为什么是这几个字母，在游戏中的剧情有暗示，这里就不多说了。

那么这个游戏场景和动态规划有什么关系呢？

我们来没事儿找事儿地想一想，拨动圆盘输入这些字母还挺麻烦的，按照什么顺序才能使得拨动圆盘所需的操作次数最少呢？

拨动圆盘的不同方法所需的操作次数肯定是不同的。

比如说你想把一个字母对准到指针上，你可以顺时针转圆盘，也可以逆时针转圆盘；而且某些字母可能不止出现一次，比如上图中大写字母 O 就在圆盘的不同位置出现了三次，你到时候应该拨哪个 O 才能使得整体的操作次数最少呢？

我们之前也多次说过，遇到求最值的问题，基本都是由动态规划算法来解决，因为动态规划本身就是运筹优化算法的一种嘛。

力扣上就有一道这个转盘游戏的算法题，难度还是 Hard，但我当时看了一眼就做出来了，因为我以前思考过生活中一个非常有意思的例子可以类比到这个问题，下面来简单介绍一下。

关注了我的视频号的朋友，知道我弹过李斯特和肖邦的几首钢琴曲，但是没练过钢琴的读者可能不知道，练习钢琴曲谱是需要提前确定「指法」的。

五线谱的音符七上八下的，两个手的手指必须互相配合，也就是说你必须确定好每个音符用哪只手的哪个手指来弹奏，写到谱子上。

比如说我很喜欢的一首曲子叫做《爱之梦》，这是我的谱子：

音符上的数字 1 代表用大拇指，2 代表用食指，以此类推。按照确定下来的指法不断练习，形成肌肉记忆，就算是练会一首曲子了。

指法这东西因人而异，比如手大的人可以让中指跨到大拇指的左边，手小的人可能就有些别扭，那同一段谱子对应的指法可能就不一样。

那么问题来了，我应该如何设计指法，才能最小化手指切换的「别扭程度」，也就是最大化演奏的流畅度呢？

这里我就借助了动态规划算法技巧：手指的切换不就是状态的转移么？参考前文 动态规划套路详解，只要明确「状态」和「选择」就可以解决这个问题。

状态是什么？状态就是「下一个需要弹奏的音符」和「当前的手的状态」。

下一个需要弹奏的音符，无非就是钢琴上 88 个琴键中的一个；手的状态也很简单，五个手指头，每个手指头要么按下去了要么没按下去，2 的 5 次方 32 种情况，5 个二进制位就可以表示。

选择是什么？选择就是「下一个音符应该由哪个手指头来弹」，无非就是穷举五个手指头。

当然，结合当前手的状态，做出每个选择需要对应代价的，刚才说过这个代价是因人而异的，所以我需要给自己定制一个损失函数，计算不同指法切换的「别扭程度」。

现在的问题就变成了一个标准的动态规划问题，根据损失函数做出「别扭程度」最小的选择，使得整段演奏最流畅……

当然，最后这个算法时间复杂度太高了，我们刚才分析的只是单个的音符，但如果串成曲子，时空复杂度还得再乘曲子的音符数，很大。

而且，这个损失函数很难量化，钢琴的黑白键命中难度不同，而且「别扭程度」只能靠感觉，有点不严谨……

不过，本就没必要计算整首曲子的指法，只需要计算某些复杂段落的指法即可，这个算法还是比较有效的。

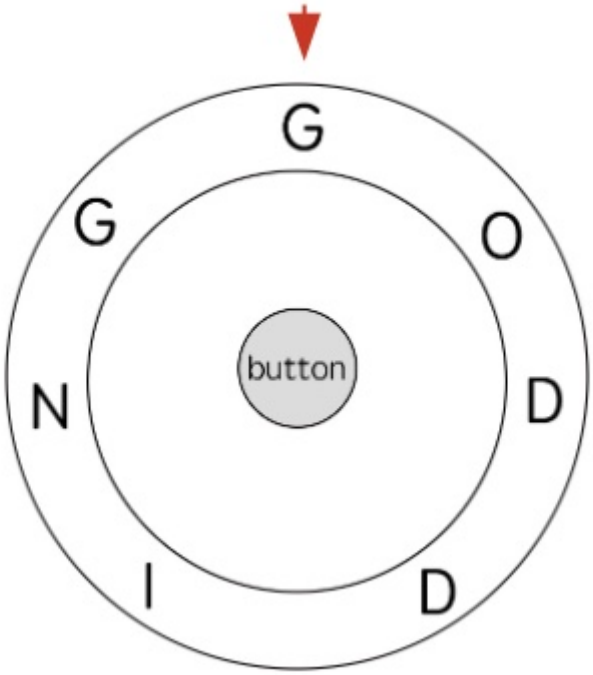
扯了这么多题外话终于要步入正题了，今天要讲的力扣第 514 题「自由之路」和钢琴指法问题有异曲同工之妙，如果你能理解钢琴的例子，相信你也能很快做出这道算法题。

题目给你输入一个字符串 `ring` 代表圆盘上的字符（指针位置在 12 点钟方向，初始指向 `ring[0]`），再输入一个字符串 `key` 代表你需要拨动圆盘输入的字符串，你的算法需要返回输入这个 `key` 至少进行多少次操作（拨动一格圆盘和按下圆盘中间的按钮都算是一次操作）。

函数签名如下：

```
int findRotateSteps(String ring, String key);
```

比如题目举的例子，输入 `ring = "godding", key = "gd"`，对应的圆盘如下（大写只是为了清晰，实际上输入的字符串都是小写字母）：



我们需要输入 `key = "gd"`，算法返回 4。

因为现在指针指的字母就是字母 `"g"`，所以可以直接按下中间的按钮，然后再将圆盘逆时针拨动两格，让指针指向字母 `"d"`，然后再按一次中间的按钮。

上述过程，按了两次按钮，拨了两格转盘，总共操作了 4 次，是最少的操作次数，所以算法应该返回 4。

我们这里可以首先给题目做一个等价，转动圆盘是不是就等于拨动指针？

原题可以转化为：圆盘固定，我们可以拨动指针；现在需要我们拨动指针并按下按钮，以最少的操作次数输入 `key` 对应的字符串。

那么，这个问题如何使用动态规划的技巧解决呢？或者说，这道题的「状态」和「选择」是什么呢？

「状态」就是「当前需要输入的字符」和「当前圆盘指针的位置」。

再具体点，「状态」就是 `i` 和 `j` 两个变量。我们可以用 `i` 表示当前圆盘上指针指向的字符（也就是 `ring[i]`）；用 `j` 表示需要输入的字符（也就是 `key[j]`）。

这样我们可以写这样一个 `dp` 函数：

```
int dp(String ring, int i, String key, int j);
```

这个 `dp` 函数的定义如下：

当圆盘指针指向 `ring[i]` 时，输入字符串 `key[j..]` 至少需要 `dp(ring, i, key, j)` 次操作。

根据这个定义，题目其实就是想计算 `dp(ring, 0, key, 0)` 的值，而且我们可以把 `dp` 函数的 base case 写出来：

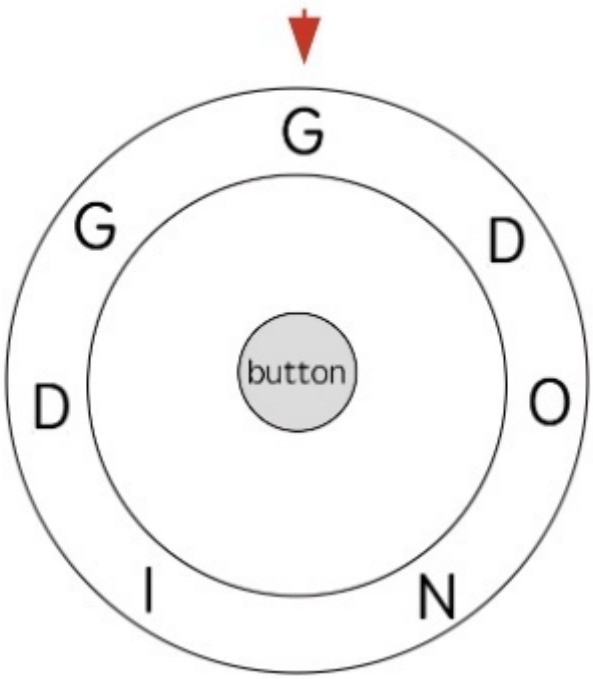
```
int dp(String ring, int i, String, int j) {
    // base case, 完成输入
    if (j == key.length()) return 0;
    // ...
}
```

接下来，思考一下如何根据状态做选择，如何进行状态转移？

「选择」就是「如何拨动指针得到待输入的字符」。

再具体点就是，对于现在想输入的字符 `key[j]`，我们可以如何拨动圆盘，得到这个字符？

比如说输入 `ring = "gdonidg"`，现在圆盘的状态如下图：



假设我想输入的字符 `key[j] = "d"`，圆盘中有两个字母 `"d"`，而且我可以顺时针也可以逆时针拨动指针，所以总共有四种「选择」输入字符 `"d"`，我们需要选择操作次数最少的那个拨法。

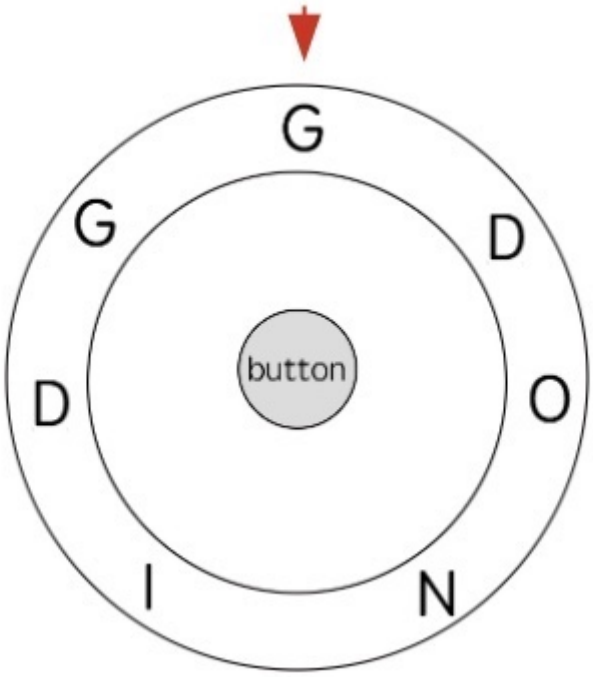
大致的代码逻辑如下：

```
int dp(String ring, int i, String, int j) {
    // base case 完成输入
    if (j == key.length()) return 0;

    // 做选择
    int res = Integer.MAX_VALUE;
    for (int k : [字符 key[j] 在 ring 中的所有索引]) {
        res = min(
            把 i 顺时针转到 k 的代价,
            把 i 逆时针转到 k 的代价
        );
    }
```

```
        return res;
    }
```

至于到底是顺时针还是逆时针，其实非常好判断，怎么近就怎么来；但是对于圆盘中的两个字符 "d"，还能是怎么近怎么来吗？

不能，因为这和 key[i] 之后需要输入的字符有关，还是上面的例子：



如果输入的是 key = "di"，那么即便右边的 "d" 离得近，也应该去左边的 "d"，因为左边的 "d" 旁边就是 "i"，「整体」的操作数最少。

那么，应该如何判断呢？其实就是穷举，递归调用 dp 函数，把两种选择的「整体」代价算出来，然后再做比较就行了。

讲到这就差不多了，直接看代码吧：

```
class Solution {
    // 字符 -> 索引列表
    HashMap<Character, List<Integer>> charToIndex = new HashMap<>();
    // 备忘录
    int[][] memo;

    /* 主函数 */
    public int findRotateSteps(String ring, String key) {
        int m = ring.length();
        int n = key.length();
        // 备忘录全部初始化为 0
        memo = new int[m][n];
        // 记录圆环上字符到索引的映射
        for (int i = 0; i < ring.length(); i++) {
```

```
                char c = ring.charAt(i);
                if (!charToIndex.containsKey(c)) {
                    charToIndex.put(c, new LinkedList<>());
                }
                charToIndex.get(c).add(i);
            }
            // 圆盘指针最初指向 12 点钟方向，
            // 从第一个字符开始输入 key
            return dp(ring, 0, key, 0);
        }

        // 计算圆盘指针在 ring[i]，输入 key[j..] 的最少操作数
        int dp(String ring, int i, String key, int j) {
            // base case 完成输入
            if (j == key.length()) return 0;
            // 查找备忘录，避免重叠子问题
            if (memo[i][j] != 0) return memo[i][j];

            int n = ring.length();
            // 做选择
            int res = Integer.MAX_VALUE;
            // ring 上可能有多个字符 key[j]
            for (int k : charToIndex.get(key.charAt(j))) {
                // 拨动指针的次数
                int delta = Math.abs(k - i);
                // 选择顺时针还是逆时针
                delta = Math.min(delta, n - delta);
                // 将指针拨到 ring[k]，继续输入 key[j+1..]
                int subProblem = dp(ring, k, key, j + 1);
                // 选择「整体」操作次数最少的
                // 加一是因为按动按钮也是一次操作
                res = Math.min(res, 1 + delta + subProblem);
            }
            // 将结果存入备忘录
            memo[i][j] = res;
            return res;
        }
    }
```

▶ 代码可视化动画

这段代码是 C++ 写的，因为我觉得涉及字符串的算法 C++ 更方便一些，这里说一些语言相关的细节问题：

1、`unordered_map` 就是哈希表，当访问不存在的键时，会自动创建对应的值，所以可以直接 `push_back` 而不用担心空指针错误。

2、`min` 函数的参数都是 int 型，所以必须先用一个 int 型变量 `n` 存储 `ring.size()`，然后调用 `min(delta, n - delta)`，否则会报错。

至此，这道题就解决了。

如果你有高质量的问题，可以 点击这里 进入本文的讨论区。

▶ 引用本文的文章

- 算法笔试「骗分」套路

更多精品课程可查看 我的网站；扫码查看更多配套学习套件：

旅游省钱大法：加权最短路径

Stars 123k 精品课程 查看 知乎 @labuladong B站 @labuladong

微信搜一搜 labuladong公众号

学算法认准 labuladong，致力于把算法讲清楚！网页版 点这里。

读完本文，你不仅学会了算法套路，还可以顺便解决如下题目：

LeetCode	力扣	难度
787. Cheapest Flights Within K Stops	787. K 站中转内最便宜的航班	🟠

毕业季，对过去也许有些欢乐和感伤，对未来也许有些迷茫和向往，不过这些终究是过眼云烟，迟早会被时间淡化和遗忘。

在这段美好时光的末尾，确实应该来一场说走就走的毕业旅行，放肆一把，给青春画上一个完美的句号。

那么，本文就教给你一个动态规划算法，~~在毕业旅行中省钱~~ 节约追求诗和远方的资本。

假设，你准备从学校所在的城市出发，游历多个城市，一路浪到公司入职，那么你应该如何安排旅游路线，才能最小化机票的开销？

我们来看看力扣第 787 题「K 站中转内最便宜的航班」，我描述一下题目：

现在有 n 个城市，分别用 0, 1..., n - 1 这些序号表示，城市之间的航线用三元组 [from, to, price] 来表示，比如说三元组 [0,1,100] 就表示，从城市 0 到城市 1 之间的机票价格是 100 元。

题目会给你输入若干参数：正整数 n 代表城市个数，数组 flights 装着若干三元组代表城市间的航线及价格，城市编号 src 代表你所在的城市，城市编号 dst 代表你要去的目标城市，整数 K 代表你最多经过的中转站个数。

函数签名如下：

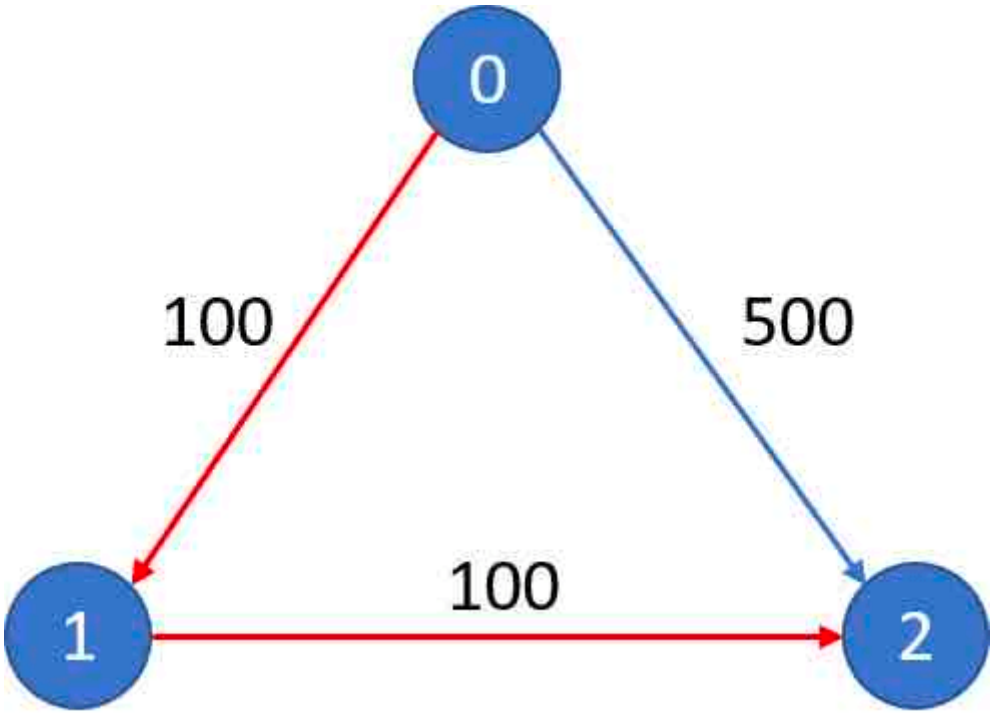
```
int findCheapestPrice(int n, int[][] flights, int src, int dst, int K);
```

请你的算法计算，在 K 次中转之内，从 src 到 dst 所需的最小花费是多少钱，如果无法到达，则返回 -1。

比方说题目给的例子：

```
n = 3, flights = [[0,1,100],[1,2,100],[0,2,500]], src = 0, dst = 2, K = 1
```

航线就是如下这张图所示，有向边代表航向的方向，边上的数字代表航线的机票价格：



出发点是 0，到达点是 2，允许的最大中转次数 K 为 1，所以最小的开销就是图中红色的两条边，从 0 出发，经过中转城市 1 到达目标城市 2，所以算法的返回值应该是 200。

注意这个中转次数的上限 K 是比较棘手的，如果上述题目将 K 改为 0，也就是不允许中转，那么我们的算法只能返回 500 了，也就是直接从 0 飞到 2。

很明显，这题就是个加权有向图中求最短路径的问题。

说白了，就是给你一幅加权有向图，让你求 src 到 dst 权重最小的一条路径，同时要满足，**这条路径最多不能超过 K + 1 条边**（经过 K 个节点相当于经过 K + 1 条边）。

我们来分析下求最短路径相关的算法。

BFS 算法思路

我们前文 BFS 算法框架详解 中说到，求最短路径，肯定可以用 BFS 算法来解决。

因为 BFS 算法相当于从起始点开始，一步一步向外扩散，那当然是离起点越近的节点越先被遍历到，如果 BFS 遍历的过程中遇到终点，那么走的肯定是最短路径。

不过呢，我们在 BFS 算法框架详解 用的是普通的队列 `Queue` 来遍历多叉树，而对于加权图的最短路径来说，普通的队列不管用了，得用优先级队列 `PriorityQueue`。

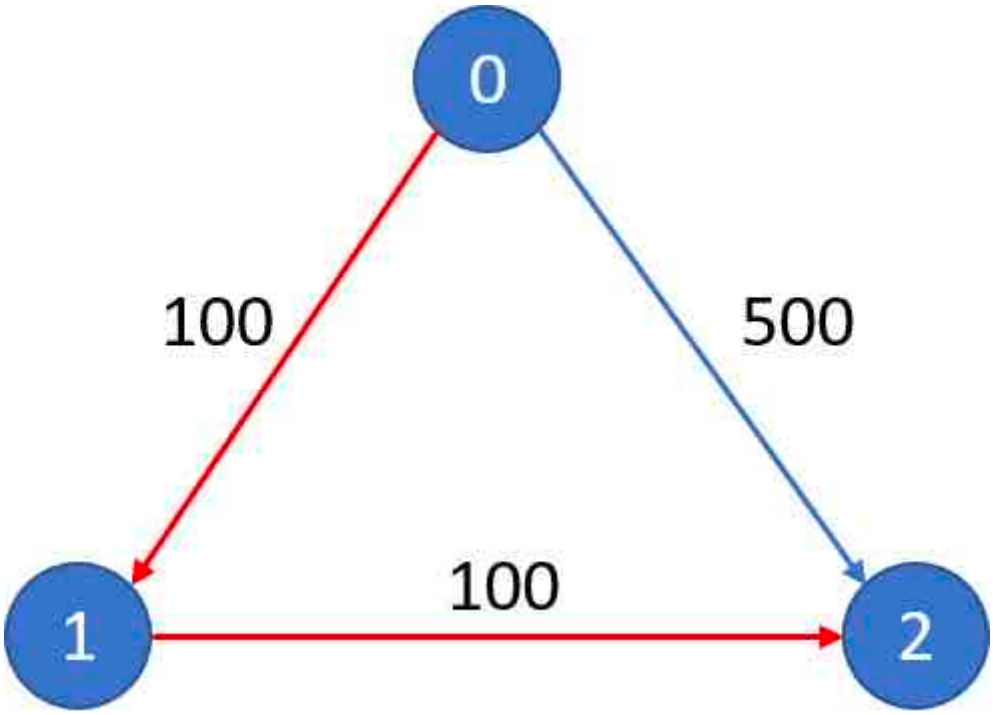
为什么呢？也好理解，在多叉树（或者扩展到无权图）的遍历中，与其说边没有权重，不如说每条边的权重都是 1，起点与终点之间的路径权重就是它们之间「边」的条数。

这样，按照 BFS 算法一步步向四周扩散的逻辑，先遍历到的节点和起点之间的「边」更少，累计的权重当然少。

换言之，先进入 `Queue` 的节点就是离起点近的，路径权重小的节点。

但对于加权图，路径中边的条数和路径的权重并不是正相关的关系了，有的路径可能边的条数很少，但每条边的权重都很大，那显然这条路径权重也会很大，很难成为最短路径。

比如题目给的这个例子：



你是可以一步从 `0` 走到 `2`，但路径权重不见得是最小的。

所以，对于加权图的场景，我们需要优先级队列「自动排序」的特性，将路径权重较小的节点排在队列前面，以此为基础施展 BFS 算法，也就变成了 Dijkstra 算法。

说了这么多 BFS 算法思路，只是帮助大家融会贯通一下，我们本文准备用动态规划来解决这道题，因为我们公众号好久没有写动态规划相关的算法了，关于 Dijkstra 算法的实现代码，文末有写，供读者参考。

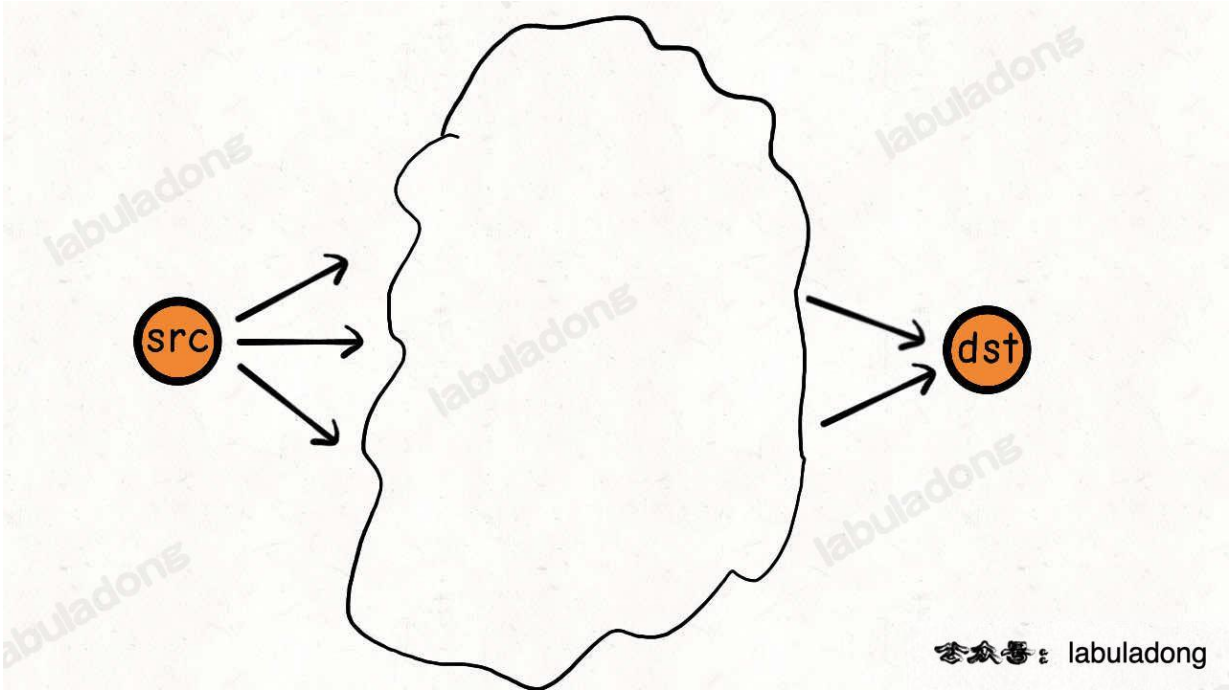
动态规划思路

我们前文 动态规划核心套路详解 中说过，求最值的问题，很多都可能使用动态规划来求解。

加权最短路径问题，再加个 K 的限制也无妨，不也是个求最值的问题嘛，动态规划统统拿下。

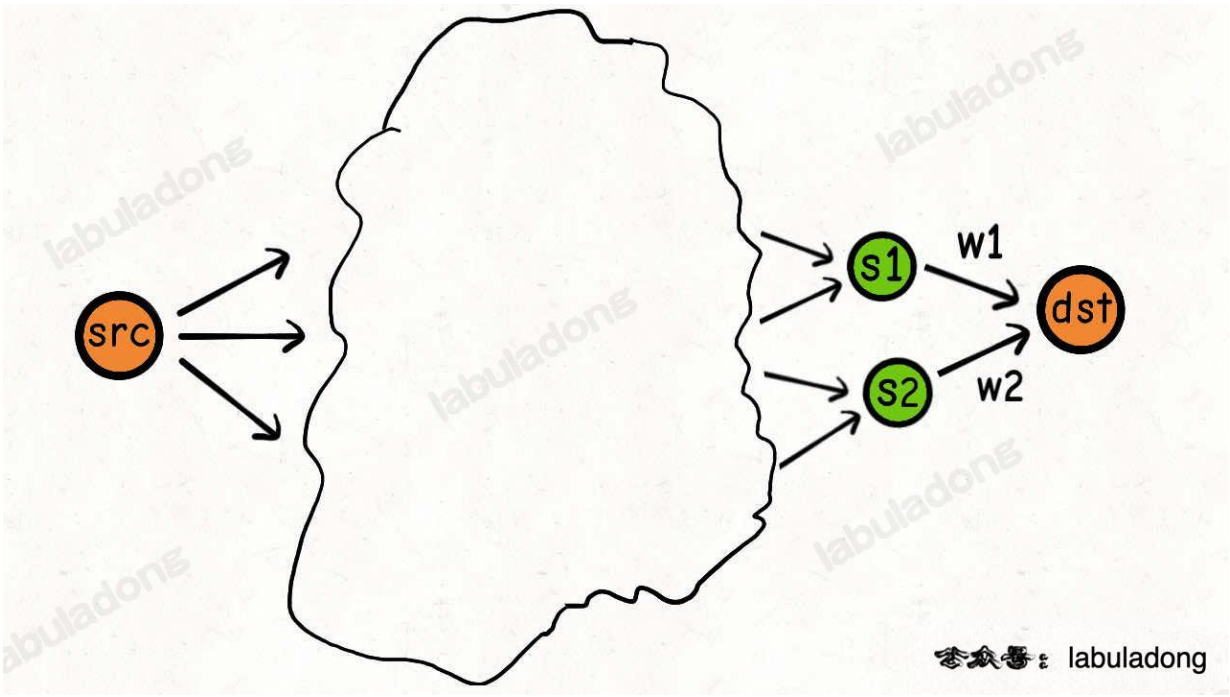
我们先不管 K 的限制，单就「加权最短路径」这个问题来看看，它怎么就是个动态规划问题了呢？

比方说，现在我想计算 src 到 dst 的最短路径：



最小权重是多少？我不知道。

但我可以把问题进行分解：



s1, s2 是指向 dst 的相邻节点，它们之间的权重我是知道的，分别是 w1, w2。

只要我知道了从 src 到 s1, s2 的最短路径，我不就知道 src 到 dst 的最短路径了吗！

```
minPath(src, dst) = min(
    minPath(src, s1) + w1,
    minPath(src, s2) + w2
)
```

这其实就是递归关系了，就是这么简单。

不过别忘了，题目对我们的最短路径还有个「路径上不能超过 K + 1 条边」的限制。

那么我们不妨定义这样一个 dp 函数：

```
int dp(int s, int k);
```

函数的定义如下：

从起点 src 出发，k 步之内（一步就是一条边）到达节点 s 的最小路径权重为 dp(s, k)。

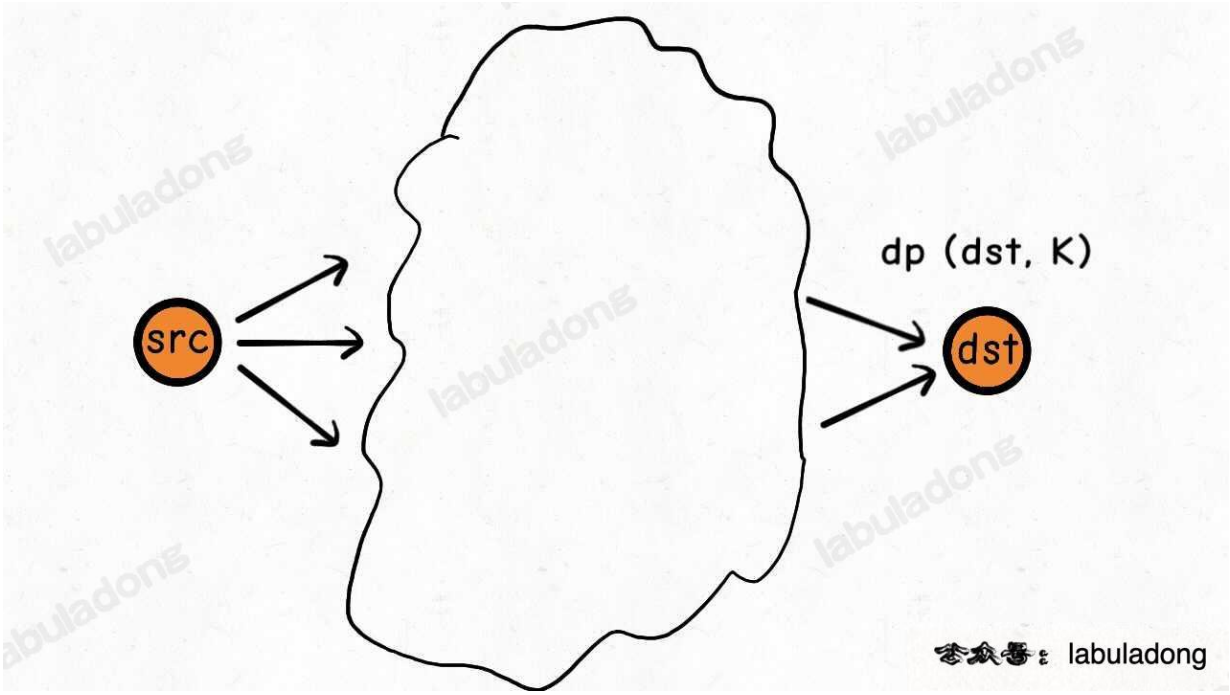
那么，dp 函数的 base case 就显而易见了：

```
// 定义：从 src 出发，k 步之内到达 s 的最小成本
int dp(int s, int k) {
    // 从 src 到 src，一步都不用走
    if (s == src) {
        return 0;
    }
    // 如果步数用尽，就无解了
    if (k == 0) {
        return -1;
    }

    // ...
}
```

题目想求的最小机票开销就可以用 dp(dst, K+1) 来表示：

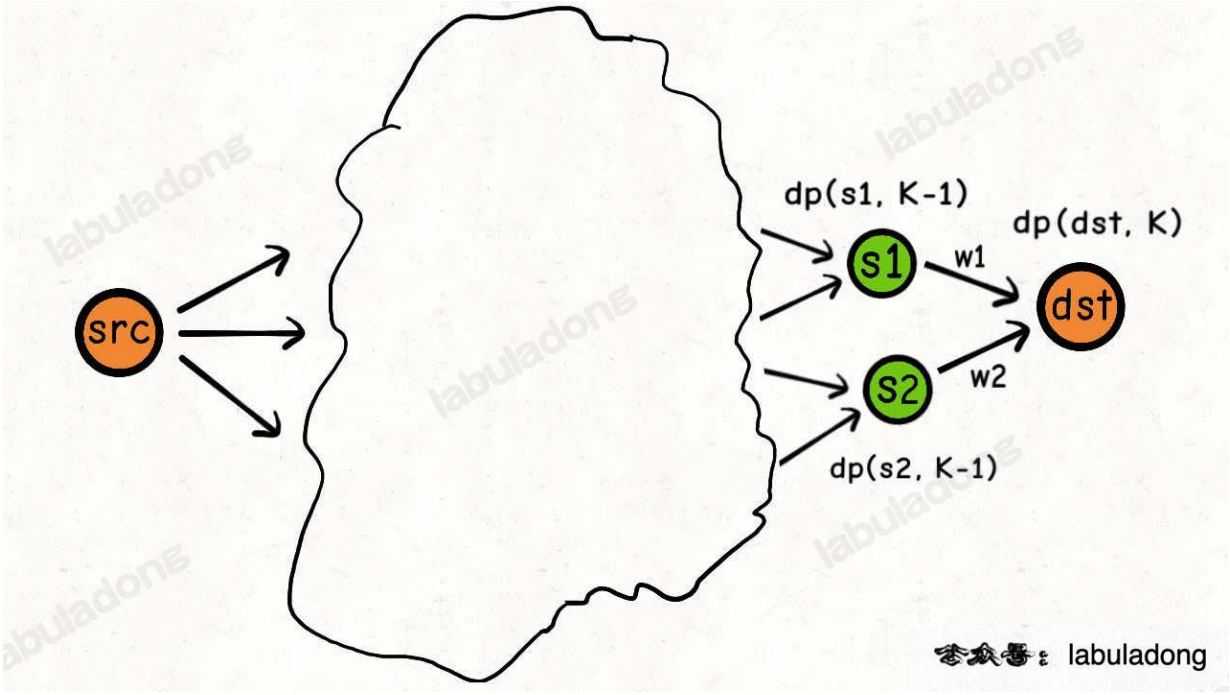
```
int findCheapestPrice(int n, int[][] flights, int src, int dst, int K) {
    // 将中转站个数转化成边的条数
    K++;
    //...
    return dp(dst, K);
```

添加了一个 K 条边的限制，状态转移方程怎么写呢？其实和刚才是一样的：



K 步之内从 src 到 dst 的最小路径权重是多少？我不知道。

但我可以把问题分解：



s1, s2 是指向 dst 的相邻节点，我只要知道 K - 1 步之内从 src 到达 s1, s2，那我就可以在 K 步之内从 src 到达 dst。

也就是如下关系式：

```
dp(dst, k) = min(
    dp(s1, k - 1) + w1,
    dp(s2, k - 1) + w2
)
```

这就是新的状态转移方程，如果你能看懂这个算式，就已经可以解决这道题了。

代码实现

根据上述思路，我怎么知道 s1, s2 是指向 dst 的相邻节点，他们之间的权重是 w1, w2?

我希望给一个节点，就能知道有谁指向这个节点，还知道它们之间的权重，对吧。

专业点说，得用一个数据结构记录每个节点的「入度」indegree：

```
// 哈希表记录每个点的入度
// to -> [from, price]
HashMap<Integer, List<int[]>> indegree;
int src, dst;

public int findCheapestPrice(int n, int[][] flights, int src, int dst, int
K) {
    // 将中转站个数转化成边的条数
    K++;
    this.src = src;
    this.dst = dst;

    indegree = new HashMap<>();
    for (int[] f : flights) {
        int from = f[0];
        int to = f[1];
        int price = f[2];
        // 记录谁指向该节点，以及之间的权重
        indegree.putIfAbsent(to, new LinkedList<>());
        indegree.get(to).add(new int[] {from, price});
    }

    return dp(dst, K);
}
```

有了 indegree 存储入度，那么就可以具体实现 dp 函数了：

```
// 定义：从 src 出发，k 步之内到达 s 的最短路径权重
int dp(int s, int k) {
    // base case
    if (s == src) {
        return 0;
    }
    if (k == 0) {
        return -1;
    }
    // 初始化为最大值，方便等会取最小值
    int res = Integer.MAX_VALUE;
    if (indegree.containsKey(s)) {
        // 当 s 有入度节点时，分解为子问题
```

```
            for (int[] v : indegree.get(s)) {
                int from = v[0];
                int price = v[1];
                // 从 src 到达相邻的入度节点所需的最短路径权重
                int subProblem = dp(from, k - 1);
                // 跳过无解的情况
                if (subProblem != -1) {
                    res = Math.min(res, subProblem + price);
                }
            }
        }
        // 如果还是初始值，说明此节点不可达
        return res == Integer.MAX_VALUE ? -1 : res;
    }
```

有之前的铺垫，这段解法逻辑应该是很清晰的。当然，对于动态规划问题，肯定要消除重叠子问题。

为什么有重叠子问题？很简单，如果某个节点同时指向两个其他节点，那么这两个节点就有相同的一个入度节点，就会产生重复的递归计算。

怎么消除重叠子问题？找问题的「状态」。

状态是什么？在问题分解（状态转移）的过程中变化的，就是状态。

谁在变化？显然就是 `dp` 函数的参数 `s` 和 `k`，每次递归调用，目标点 `s` 和步数约束 `k` 在变化。

所以，本题的状态有两个，应该算是二维动态规划，我们可以用一个 `memo` 二维数组或者哈希表作为备忘录，减少重复计算。

我们选用二维数组做备忘录吧，注意 `K` 是从 1 开始算的，所以备忘录初始大小要再加一：

```
int src, dst;
HashMap<Integer, List<int[]>> indegree;
// 备忘录
int[][] memo;

public int findCheapestPrice(int n, int[][] flights, int src, int dst, int
K) {
    K++;
    this.src = src;
    this.dst = dst;
    // 初始化备忘录，全部填一个特殊值
    memo = new int[n][K + 1];
    for (int[] row : memo) {
        Arrays.fill(row, -888);
    }

    // 其他不变
    // ...

    return dp(dst, K);
}
```

```
// 定义：从 src 出发，k 步之内到达 s 的最小成本
int dp(int s, int k) {
    // base case
    if (s == src) {
        return 0;
    }
    if (k == 0) {
        return -1;
    }
    // 查备忘录，防止冗余计算
    if (memo[s][k] != -888) {
        return memo[s][k];
    }

    // 状态转移不变
    // ...

    // 存入备忘录
    memo[s][k] = res == Integer.MAX_VALUE ? -1 : res;
    return memo[s][k];
}
```

▶ 🌟 代码可视化动画🌟

备忘录初始值为啥初始为 -888？前文 base case 和备忘录的初始值怎么定 说过，随便初始化一个无意义的值就行。

至此，这道题就通过自顶向下的递归方式解决了。当然，完全可以按照这个解法衍生出自底向上迭代的动态规划解法，但由于篇幅所限，我就不写了，反正本质上都是一样的。

其实，大家如果把我们号之前的所有动态规划文章都看一遍，就会发现我们一直在套用 动态规划核心套路，其实真没什么困难的。

最后扩展一下，有的读者可能会问：既然这个问题本质上是一个图的遍历问题，为什么不需要 `visited` 集合记录已经访问过的节点？

这个问题我在 Dijkstra 算法模板 中探讨过，可以去看看。另外，这题也可以利用 Dijkstra 算法模板来解决，代码如下：

```
public int findCheapestPrice(int n, int[][] flights, int src, int dst, int
K) {
    List<int[]>[] graph = new LinkedList[n];
    for (int i = 0; i < n; i++) {
        graph[i] = new LinkedList<>();
    }
    for (int[] edge : flights) {
        int from = edge[0];
        int to = edge[1];
        int price = edge[2];
```

```
            graph[from].add(new int[]{to, price});
        }

        // 启动 dijkstra 算法
        // 计算以 src 为起点在 k 次中转到达 dst 的最短路径
        K++;
        return dijkstra(graph, src, K, dst);
    }

    class State {
        // 图节点的 id
        int id;
        // 从 src 节点到当前节点的花费
        int costFromSrc;
        // 从 src 节点到当前节点经过的节点个数
        int nodeNumFromSrc;

        State(int id, int costFromSrc, int nodeNumFromSrc) {
            this.id = id;
            this.costFromSrc = costFromSrc;
            this.nodeNumFromSrc = nodeNumFromSrc;
        }
    }

    // 输入一个起点 src，计算从 src 到其他节点的最短距离
    int dijkstra(List<int[]>[] graph, int src, int k, int dst) {
        // 定义：从起点 src 到达节点 i 的最短路径权重为 distTo[i]
        int[] distTo = new int[graph.length];
        // 定义：从起点 src 到达节点 i 的最小权重路径至少要经过 nodeNumTo[i] 个节点
        int[] nodeNumTo = new int[graph.length];
        Arrays.fill(distTo, Integer.MAX_VALUE);
        Arrays.fill(nodeNumTo, Integer.MAX_VALUE);
        // base case
        distTo[src] = 0;
        nodeNumTo[src] = 0;

        // 优先级队列，costFromSrc 较小的排在前面
        Queue<State> pq = new PriorityQueue<>((a, b) -> {
            return a.costFromSrc - b.costFromSrc;
        });
        // 从起点 src 开始进行 BFS
        pq.offer(new State(src, 0, 0));

        while (!pq.isEmpty()) {
            State curState = pq.poll();
            int curNodeID = curState.id;
            int costFromSrc = curState.costFromSrc;
            int curNodeNumFromSrc = curState.nodeNumFromSrc;

            if (curNodeID == dst) {
                // 找到最短路径
                return costFromSrc;
            }
            if (curNodeNumFromSrc == k) {
```

```
                // 中转次数耗尽
                continue;
            }

            // 将 curNode 的相邻节点装入队列
            for (int[] neighbor : graph[curNodeID]) {
                int nextNodeID = neighbor[0];
                int costToNextNode = costFromSrc + neighbor[1];
                // 中转次数消耗 1
                int nextNodeNumFromSrc = curNodeNumFromSrc + 1;

                // 更新 dp table
                if (distTo[nextNodeID] > costToNextNode) {
                    distTo[nextNodeID] = costToNextNode;
                    nodeNumTo[nextNodeID] = nextNodeNumFromSrc;
                }
                // 剪枝，如果中转次数更多，花费还更大，那必然不会是最短路径
                if (costToNextNode > distTo[nextNodeID]
                    && nextNodeNumFromSrc > nodeNumTo[nextNodeID]) {
                    continue;
                }

                pq.offer(new State(nextNodeID, costToNextNode,
nextNodeNumFromSrc));
            }
        }
        return -1;
    }
```

关于这个解法这里就不多解释了，可对照前文 Dijkstra 算法模板 理解。

如果你有高质量的问题，可以 点击这里 进入本文的讨论区。

▶ 引用本文的题目

安装 我的 Chrome 刷题插件 点开下列题目可直接查看解题思路：

LeetCode	力扣
286. Walls and Gates🔒	286. 墙与门🔒

▶ 引用本文的文章

- Dijkstra 算法模板及应用

——————————————

更多精品课程可查看 我的网站；扫码查看更多配套学习套件：

算法学习网站：https://labuladong.gitee.io/algo/ 或 https://labuladong.github.io/algo/

二维码太多，长按识别不到？放大图片 -> 让对应二维码充满屏幕 -> 长按识别该二维码